Operaciones en el conjunto de los números racionales Q

Operación	Ejemplo
Suma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{bd}$	**a)** $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{22}{15}$ **b)** $\frac{7}{24}+\frac{11}{36}=\frac{7\cdot 3+11\cdot 2}{72}=\frac{43}{72}$ **¡OJO!** *Observa como en este ejemplo el denominador común no es el producto de los denominadores sino el* ***M.C.M.*** *de 24 y 36. De esta manera las operaciones serán mucho más sencillas.*
Resta (diferencia) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{bd}$	$\frac{8}{3}-\frac{6}{4}=\frac{8\cdot 4-6\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$ **¡OJO!** *El resultado siempre hay que simplificarlo. Para ello se divide el numerador y el denominador entre el* ***M.C.D.*** *de ambos. En este caso hemos dividido entre 2 ya que* ***M.C.D.(14, 12) = 2****.*
Producto (multiplicación) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$
Cociente (división) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, o bien $\frac{a/b}{c/d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ **Observación:** *la fracción d/c se llama* ***inversa*** *de c/d (al multiplicarlas el resultado es 1). Pues bien,* ***para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.***	$\frac{15}{7}:\frac{5}{2}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$, o lo que es lo mismo, $\frac{15/7}{5/2}=\frac{\text{extremos}}{\text{medios}}=\frac{15\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$
Potencia (de exponente entero positivo o cero) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\overset{(n\text{ veces})}{\cdots\cdots}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$
Potencia (de exponente entero negativo) $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{}{a}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{b^n}{a^n}$ **Observación:** *para hacer una potencia de exponente negativo* ***se cambia la base por su fracción inversa*** *(en este caso a/b por b/a)* ***y el exponente negativo se cambia a positivo****. Así pues el resultado es la potencia de base la fracción inversa elevada al exponente pero positivo.*	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$ **¡OBSERVA!:** *El resultado obtenido (81/16) es la fracción inversa del resultado obtenido anteriormente (16/81), que era la misma potencia pero de exponente positivo.*

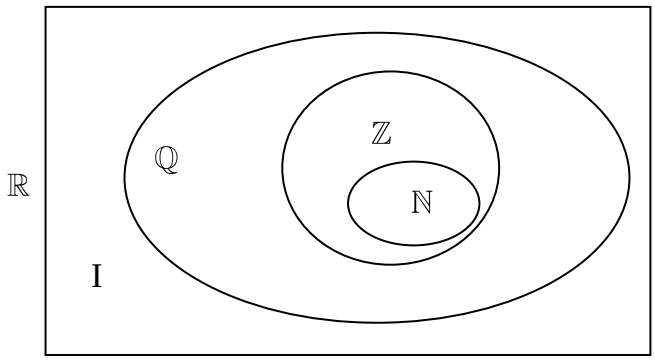
Es **importante** recordar que la **jerarquía entre las operaciones** es la siguiente:

- **Primero:** corchetes y paréntesis.
- **Segundo:** productos y divisiones.
- **Tercero:** sumas y restas.

Así no cometeremos errores a la hora de efectuar operaciones más extensas. Por ejemplo:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{-3}{2}+\frac{5}{3}\right)}{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}=\frac{\left[\left(\frac{10+12}{15}\right):\left(\frac{3-4}{6}\right)\right]\cdot\left(\frac{-9+10}{6}\right)}{\frac{8-15}{6}}=\frac{\left(\frac{22}{15}:\frac{-1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-15}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}}=\frac{\frac{132}{-90}}{\frac{-7}{6}}=\frac{792}{630}=\frac{44}{35}$$

El conjunto de los números reales

Conjuntos numéricos	
El conjunto de los **números naturales**: $\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ .....\}$
El conjunto de los **números enteros**: $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{.....\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .....\}$
El conjunto de los **números racionales**: $\mathbb{Q}$ (fracciones)	$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}:\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\ \text{con}\ q\neq 0\right\}$
Propiedad: todo número racional es entero, decimal exacto o decimal periódico (puro o mixto) ***Importante:*** *debes recordar de cursos anteriores cómo se expresa un decimal exacto, periódico puro o periódico mixto en forma de fracción. Por ejemplo:* $1,65=\frac{165-1}{99}=\frac{164}{99}$; $5,639=\frac{5639-56}{990}=\frac{5583}{990}=\frac{1861}{330}$	$\frac{10}{-5}=-2$ (entero); $\frac{13}{8}=1,625$ (decimal exacto); $\frac{-14}{9}=1,555...=1,\widehat{5}$ (decimal periódico puro); $\frac{19}{12}=1,58333...=1,5833$ (decimal periódico mixto)
El conjunto de los **números irracionales:** I. Está formado por todos aquellos números reales que no son racionales. Tienen infinitas cifras decimales pero no forman período.	$1,23456791011121314151617181920 21.....$ $\sqrt{2}=1,4142136.....$ $\pi=3,14155927.....$
Representación de los números reales:	

Intervalos y semirrectas		
Intervalo abierto: $(a,\ b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<b\}$		Números que están comprendidos entre a y b
Intervalo cerrado: $[a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a\leq x\leq b\}$		Números comprendidos entre a y b, incluidos éstos
Intervalos semiabiertos	$(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x\leq b\}$	Números mayores que a y menores o iguales que b
	$(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x\leq b\}$	Números mayores o iguales que a y menores que b
Semirrectas	$(-\infty,\ a)=\{x\in\mathbb{R}:\ x<a\}$	Números menores que a
	$(-\infty,\ a]=\{x\in\mathbb{R}:\ x\leq a\}$	Números menores que a, incluido el propio a
	$(a,\ +\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ x>a\}$	Números mayores que a
	$[a,\ +\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq a\}$	Números mayores que a, incluido el propio a

Propiedades de las potencias. Igualdades notables

Propiedades de las potencias	
Producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes: $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$	$$\left(2x^3y^2\right)\left(-3x^2z^3\right)\left(-4yz^2\right) = 24x^3x^2y^2yz^3z^2 = = 24x^5y^3z^5$$
Cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes: $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$	$$\frac{12a^3x^5}{28ax^3} = \frac{12}{28}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{x^5}{x^3} = \frac{3}{7}a^2x^2$$
Potencia de un producto es igual al producto de las potencias: $$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$	$$(-2xyzp)^3 = (-2)^3 x^3y^3z^3p^3 = -8x^3y^3z^3p^3$$
Potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias: $$\left(\frac{}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$	$$\left(\frac{-3ab}{2xy}\right)^3 = \frac{(-3ab)^3}{(2xy)^3} = \frac{-3^3a^3b^3}{2^3x^3y^3} = \frac{-27a^3b^3}{8x^3y^3}$$
Potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes: $$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$$	$$\left(-\frac{2}{3}x^2z^4\right)^3 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(x^2\right)^3\left(z^4\right)^3 = -\frac{8}{27}x^6z^{12}$$
Igualdades notables	
Cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$ **¡OJO!** *No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea:* $(a+b)^2 = a^2+b^2$	a) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = 4x^2+12x+9$ b) $\left(\frac{5}{x}+2x\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right) + 2\cdot\frac{5}{x}\cdot 2x + (2x)^2 =$ $= \frac{25}{x} + 20 + 4x^2$
Cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo $$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$ **¡OJO!** *No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea:* $(a-b)^2 = a^2-b^2$	a) $(5b-3)^2 = (5b)^2 - 2\cdot 5b\cdot 3 + 3^2 = 25b^2-30b+9$ b) $\left(6x-\frac{x^2}{2}\right)^2 = (6x)^2 - 2\cdot 6x\cdot\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 =$ $= 36x^2 - 6x^3 + \frac{x^4}{4}$
Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados: $$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$	$$(4x+2y)(4x-2y) = (4x)^2-(2y)^2 = 16x^2-4y^2$$

¡Recuerda!

Cuando el signo de la base de una potencia es negativo, entonces:

- ✓ Si el exponente es **par** el resultado es positivo.
- ✓ Si el exponente es **impar** el resultado es negativo.

Radicales

$\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow a=b^n$ $\sqrt[n]{a}$ es el **radical**, a el **radicando** y n el **índice** de la raíz.	Si $a \geq 0$, existe cualquiera que sea a. Si $a<0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para valores impares de n.
Forma exponencial: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, ya que $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2^{\frac{3}{3}}=2$
Propiedades de los radicales	
Radicales equivalentes: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$	$\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[2\cdot 4]{3^4}=\sqrt{3}$ Reducir a índice común $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$: $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}=\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 2]{2^2}=\sqrt[6]{4}$
Potencia de un radical: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$	$\left(\sqrt[6]{2}\right)^4=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}$
Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{9}}}=\sqrt[24]{9}=\sqrt[24]{3^2}=\sqrt[12]{3}$
Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\,b}$	$\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ (en este ejemplo la propiedad se ha utilizado dos veces)
Raíz de un cociente: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt[6]{6}}=\dfrac{\sqrt[6]{(12)^2}\cdot\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{6}}=\sqrt[6]{\dfrac{(2^2 3)^2\ (3^2)^3}{2\cdot 3}}=$ $=\sqrt[6]{\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot 3^6}{2\cdot 3}}=\sqrt[6]{2\cdot 3^7}=\sqrt[6]{4374}$ (observa cómo se han utilizado en este ejemplo varias de las propiedades anteriores para simplificar)
Suma de radicales: dos expresiones con radicales se dicen *semejantes* si la raíz que aparece en ambas tiene el mismo índice y el mismo radicando (por ejemplo $5\sqrt{2}$ y $-3\sqrt{2}$ son radicales semejantes). Solamente se pueden sumar (o restar) expresiones con radicales que sean semejantes.	$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3^3}-\sqrt{5^2\cdot 3}=$ $=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+3-5)\sqrt{3}=0\sqrt{3}=0$
Racionalización de denominadores	
Con una raíz cuadrada en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la misma raíz.	$\dfrac{3}{5\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$
Con una raíz de índice n en el denominador: se multiplica arriba y abajo por otra raíz de índice n de tal manera que se complete el radicando con una potencia de exponente n.	$\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{2\sqrt{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$
Con una suma o diferencia de raíces cuadradas en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la expresión conjugada del denominador.	$\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\dfrac{3(\sqrt{6}\quad\sqrt{3})}{6-3}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$

Notación científica

Definición	
Un número está expresado en **notación científica** si se escribe como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor estrictamente que 10, y una potencia de 10. Si un número está expresado en notación científica al exponente entero al que está elevado la potencia de 10 se le llama **orden de magnitud**.	$0,00000034 = \frac{34}{100\,000\,000} = 34 \cdot 10^{-8} = 3,4 \cdot 10^{-7}$
	$26\,531\,000\,000 = 2,6531 \cdot 10^{10}$
	$947855,36 = 9,4785536 \cdot 10^{5}$
Suma y resta en notación científica	
Para sumar y restar números expresados en notación científica **es necesario que todos estén expresados con el mismo orden de magnitud**. Es habitual escribirlos en el mayor de los órdenes de magnitud que aparezca en dichas sumas o restas.	$5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11} = 5,3 \cdot 10^{12} - 0,3 \cdot 10^{12} =$ $= (5,3 - 0,3) \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{12}$
	$3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-5} + 0,82 \cdot 10^{-5} =$ $= (3 + 0,82) \cdot 10^{-5} = 3,82 \cdot 10^{-5}$
Producto y división en notación científica	
Para multiplicar y dividir números expresados en notación científica se opera con las potencias de 10 por un lado (aplicando las propiedades de las potencias), y el resto de la expresión por el otro.	$(3,5 \cdot 10^{7}) \cdot (4 \cdot 10^{8}) = (3,5 \cdot 4) \cdot (10^{7} \cdot 10^{8}) =$ $= 14 \cdot 10^{15} = 1,4 \cdot 10^{16}$
	$(1,2 \cdot 10^{7}) : (5 \cdot 10^{-6}) = (1,2 : 5) \cdot (10^{7} : 10^{-6}) =$ $= 0,24 \cdot 10^{13} = 2,4 \cdot 10^{12}$
Cifras significativas	
Recibe el nombre de **cifra significativa** todo dígito (exceptuando el cero cuando se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número $2,503$ tiene cuatro cifras significativas. El número $0,00103$ tiene tres cifras significativas; los tres primeros ceros no son cifras significativas ya que simplemente sitúan el punto decimal. En notación científica este último número se escribe $1,03 \cdot 10^{-3}$.	Por ejemplo, expresemos el resultado de la operación $\frac{(7,2 \cdot 10^{-6})^3}{5,3 \cdot 10^{-9}}$ en notación científica con tres cifras significativas: $\frac{(7,2 \cdot 10^{-6})^3}{5,3 \cdot 10^{-9}} = \frac{(7,2)^3 \cdot (10^{-6})^3}{5,3 \cdot 10^{-9}} = \frac{373,248 \cdot 10^{-18}}{5,3 \cdot 10^{-9}} =$ $= \frac{373,248}{5,3} \cdot \frac{10^{-18}}{10^{-9}} = 70,4 \cdot 10^{-9} = 7,04 \cdot 10^{-8}$

Aproximaciones y errores

Orden de aproximación	
Se dice que de un número real tomamos una aproximación de orden n cuando se trata de un número racional con n cifras decimales.	$\frac{3\sqrt{5}}{4}=1,7$ (Aproximación de orden 1). $\frac{3\sqrt{5}}{4}=1,677$ (Aproximación de orden 3).
Métodos de aproximación	
Por defecto o truncamiento: se eliminan las cifras decimales a partir del orden considerado. **Por exceso**: se eliminan las cifras decimales hasta el orden considerado y se añade una cifra **Redondeo**: se eliminan todas las cifras decimales a partir del orden indicado y, si la cifra siguiente al orden considerado es mayor o igual que 5, se añade una unidad a la última cifra	Aproximar $5,245848$ hasta el orden 3 (milésimas). O lo que es lo mismo, aproximar $5,245848$ con cuatro cifras significativas. Truncamiento: $5,245$ Por exceso: $5,246$ Redondeo: $5,246$
Error absoluto. Cota del error absoluto	
Error absoluto (E_a) de una medida aproximada es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real (V_r) y el valor aproximado (V_a): $E_a=\lvert V_r-V_a\rvert$ El valor real o exacto es, en la mayoría de los casos, desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo, diciendo que **el error absoluto es menor que…** Una **cota del error absoluto** se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.	El error absoluto que se comete al redondear $5,245848$ a las milésimas es: $E_a=\lvert V_r-V_a\rvert=\lvert 5,245848-5,246\rvert=0,000152$ Si una piscina tiene una capacidad de $719\ \mathrm{m}^3$, la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto es menor que medio metro cúbico: $E_a<0,5\ \mathrm{m}^3$
Error relativo. Cota del error relativo	
Error relativo (E_r) es el cociente entre el error absoluto y el valor real: $E_r=\left\lvert\frac{E_a}{V_r}\right\rvert$ El error relativo es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan.	Veamos un par de ejemplos basados en los dos ejemplos anteriores. El error relativo que se comente al redondear $5,245848$ a las milésimas es: $E_r=\left\lvert\frac{E_a}{V_r}\right\rvert=\left\lvert\frac{0,000152}{5,245848}\right\rvert=0,000028975$ Al tomar como capacidad de la piscina $719\ \mathrm{m}^3$, el error relativo que se comete es menor que: $E_r<\frac{0,5}{719}=0,0007$