

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2(x-2)}{5} - 1 = \frac{3x^2}{4} - 2x$ **(1 punto)**

b) $\frac{10}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2$ **(1,5 puntos)**

c) $\sqrt{4-2x} = 2 - \sqrt{x+2}$ **(1,5 puntos)**

2. Resuelve el siguiente sistema (no lineal) de dos ecuaciones con dos incógnitas **(1,5 puntos)**:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

3. Se desea mezclar dos clases de vino de 120 y 180 céntimos el litro. ¿Qué cantidad debemos tomar de cada uno, para obtener 50 litros de mezcla a 162 céntimos el litro? **(1,5 puntos)**

4. Resuelve la siguiente ecuación polinómica **(1 punto)**:

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$$

5. Hallar el valor de k para que la división del polinomio $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + kx - 4$ entre $x + 1$ sea exacta. Para dicho valor de k factorizar el polinomio y decir cuáles son todas sus raíces. **(2 puntos)**

Soluciones:

1. a) $\frac{2(x-2)}{5} - 1 = \frac{3x^2}{4} - 2x \Rightarrow$ (multiplicando todos los términos por 20) \Rightarrow

$$\Rightarrow 8(x-2) - 20 = 15x^2 - 40x \Rightarrow 8x - 16 - 20 = 15x^2 - 40x \Rightarrow 15x^2 - 48x + 36 = 0 \Rightarrow \text{(dividiendo entre 3)}$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 16x + 12 = 0.$$

El discriminante de esta ecuación es: $\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 256 - 240 = 16.$

$$\text{Entonces: } x = \frac{16 \pm 4}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{20}{10} = 2 \\ x_2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

b) $\frac{10}{x^2 - 4} - \frac{5}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{10}{(x+2)(x-2)} - \frac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 - 5x + 10 = 3x + 6 - 2x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow \text{(dividiendo entre 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

c) $\sqrt{4-2x} = 2 - \sqrt{x+2} \Rightarrow (\sqrt{4-2x})^2 = (2 - \sqrt{x+2})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4 - 2x = 4 - 4\sqrt{x+2} + x + 2 \Rightarrow 4\sqrt{x+2} = 3x + 2 \Rightarrow (4\sqrt{x+2})^2 = (3x + 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x+2) = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow 16x + 32 = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow 9x^2 - 4x - 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-28)}}{2 \cdot 9} = \frac{4 \pm \sqrt{1024}}{18} = \frac{4 \pm 32}{18} = \begin{cases} x_1 = \frac{36}{18} = 2 \\ x_2 = \frac{-28}{18} = \frac{-14}{9} \end{cases}$$

2. $\left. \begin{matrix} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 3 \end{matrix} \right\}$ De la segunda ecuación: $y = 3 - x$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x^2 - (3-x)^2 = 21 \Rightarrow x^2 - (9 - 6x + x^2) = 21 \Rightarrow x^2 - 9 + 6x - x^2 = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5. \text{ Como } y = 3 - x \Rightarrow y = -2.$$

3. Designando por x e y las cantidades de vino de 120 cts./l y 180 cts./l, respectivamente, como se desean obtener 50 l de mezcla, puede expresarse

$$x + y = 50$$

Por otra parte, considerando que el coste de la mezcla es igual a la suma de los costes de los vinos mezclados y que el coste de un vino se obtiene multiplicando la cantidad por el precio, se tiene:

$$120x + 180y = 50 \cdot 162$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones planteadas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 50 \\ 120x + 180y = 8100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 50 \\ 2x + 3y = 135 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3x - 3y = -150 \\ 2x + 3y = 135 \end{array} \right\} \Rightarrow -x = -15 \Rightarrow x = 15$$

Como $x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x \Rightarrow y = 50 - 15 = 35$

Por tanto debemos mezclar 15 litros de vino de 120 cts./l y 35 litros de vino de 180 cts./l

4. Las posibles raíces del polinomio $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ están entre los divisores del término independiente:

$Div(-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Apliquemos la regla de Ruffini:

	1	-1	-7	13	-6
1		1	0	-7	6
	1	0	-7	6	0
1		1	1	-6	
	1	1	-6	0	
2		2	6		
	1	3	0		

Entonces la ecuación $3x^4 + x^3 - 21x^2 - 25x - 6 = 0$ es equivalente a la ecuación $(x-1)(x-1)(x-2)(x+3) = 0$, de donde se obtiene que $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (solución doble), $x-2=0 \Rightarrow x=2$, $x+3=0 \Rightarrow x=-3$.

5. Utilizando el teorema del resto:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 3 - k - 4 = 0 \Rightarrow 4 - k = 0 \Rightarrow k = 4$$

Para este valor de k el polinomio es $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$. Utilizando la regla de Ruffini:

	1	-4	3	4	-4
-1		-1	5	-8	4
	1	-5	8	-4	0
1		1	-4	4	
	1	-4	4	0	
2		2	-4		
	1	-2	0		

Por tanto la factorización del polinomio es $(x+1)(x-1)(x-2)(x-2) =$

$= (x+1)(x-1)(x-2)^2$ y las raíces del mismo son $-1, 1$ y 2 (doble).