

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(x-1)(x+1)}{2} - \frac{x-5}{6} = \frac{2}{3}(x+1)$ **(1 punto)**

b) $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$ **(1,5 puntos)**

c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x+1} - 1$ **(1,5 puntos)**

2. Resuelve el siguiente sistema (no lineal) de dos ecuaciones con dos incógnitas **(1,5 puntos)**:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{xy}{4} - x + y = 1 \\ x - \frac{y+7}{3} = -1 \end{array} \right\}$$

3. Un comerciante compra melones a 40 céntimos el kilo y los vende a 60 céntimos el kilo. Halla cuántos kilos de melones compró si se le estropearon 10 kilos y obtuvo por la venta del resto un beneficio de 42 euros. **(1,5 puntos)**

4. Resuelve la siguiente ecuación polinómica **(1 punto)**:

$$3x^4 + x^3 - 21x^2 - 25x - 6 = 0$$

5. Hallar el valor de k para que la división del polinomio $2x^4 - x^3 - 14x^2 + kx - 6$ entre $x-1$ sea exacta. Para dicho valor de k factorizar el polinomio y decir cuáles son todas sus raíces. **(2 puntos)**

Soluciones:

1. a) $\frac{(x-1)(x+1)}{2} - \frac{x-5}{6} = \frac{2}{3}(x+1) \Rightarrow$ (multiplicando todos los términos por 6) \Rightarrow

$$\Rightarrow 3(x-1)(x+1) - (x-5) = 4(x+1) \Rightarrow 3x^2 - 3 - x + 5 = 4x + 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

El discriminante de esta ecuación es: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$.

$$\text{Entonces: } x = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \Rightarrow \frac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{2x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{6}{(x+3)(x-3)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow \text{(dividiendo entre 3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x+1} - 1 \Rightarrow (\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{2x+1} - 1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x-1 = 2x+1 - 2\sqrt{2x+1} + 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x+1} = 3 \Rightarrow (2\sqrt{2x+1})^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(2x+1) = 9 \Rightarrow 8x+4 = 9 \Rightarrow 8x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

2. $\left. \begin{array}{l} \frac{xy}{4} - x + y = 1 \\ x - \frac{y+7}{3} = -1 \end{array} \right\}$ En primer lugar eliminemos denominadores, multiplicando todos los términos de la primera

ecuación por 4 y todos los términos de la segunda por 3:

$$\left. \begin{array}{l} xy - 4x + 4y = 4 \\ 3x - y - 7 = -3 \end{array} \right\} \text{Despejando } y \text{ de la segunda ecuación: } -y = -3x + 4 \Rightarrow y = 3x - 4. \text{ Sustituyendo en la}$$

primera ecuación: $x(3x-4) - 4x + 4(3x-4) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 4x + 12x - 16 = 4 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 20 = 0$. El discriminante de esta última ecuación es $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-20) = 16 + 240 = 256$. Entonces:

$$x = \frac{-4 \pm 16}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{-20}{6} = -\frac{10}{3} \end{cases}, \text{ y sustituyendo ahora en } y = 3x - 4 \text{ se tiene:}$$

• Si $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 3 \cdot 2 - 4 \Rightarrow y_1 = 2$

• Si $x_2 = -\frac{10}{3} \Rightarrow y_2 = 3 \cdot -\frac{10}{3} - 4 = -10 - 4 \Rightarrow y_2 = -14$

3. Llamemos x a los kilos de melones que compró el comerciante. Como se le estropearon 10 tuvo que vender los $x-10$ que le quedaron. Además, el beneficio por kilo es de 20 céntimos y obtuvo 42 euros por los melones que vendió. Por tanto el planteamiento es: $20(x-10)=4200$ (42 euros son 4200 céntimos). Resolviendo la

$$\text{ecuación: } 20x - 200 = 4200 \Rightarrow 20x = 4400 \Rightarrow x = \frac{4400}{20} \Rightarrow x = 220$$

Por tanto el comerciante compró 220 kilos de melones.

4. Las posibles raíces del polinomio $3x^4 + x^3 - 21x^2 - 25x - 6$ están entre los divisores del término independiente: $Div(-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Apliquemos la regla de Ruffini:

	3	1	-21	-25	-6
-1		-3	2	19	6
	3	-2	-19	-6	0
-2		-6	16	6	
	3	-8	-3	0	
3		9	3		
	3	1	0		

Entonces la ecuación $3x^4 + x^3 - 21x^2 - 25x - 6 = 0$ es equivalente a la ecuación

$$(x+1)(x+2)(x-3)(3x+1) = 0, \text{ de donde}$$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$, $x+2=0 \Rightarrow x=-2$, $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (obsérvese que estas tres soluciones coinciden con las tres raíces del enteras del polinomio), y $3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

5. Utilizando el teorema del resto:

$$P(1) = 0 \Rightarrow 2 - 1 - 14 + k - 6 = 0 \Rightarrow k - 19 = 0 \Rightarrow k = 19$$

Para este valor de k el polinomio es $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6$. Utilizando la regla de Ruffini:

	2	-1	-14	19	-6
1		2	1	-13	6
	2	1	-13	6	0
2		4	10	-6	
	2	5	-3	0	
-3		-6	3		
	2	-1	0		

Por tanto la factorización del polinomio es $(x-1)(x-2)(x+3)(2x-1) = 0$ y las raíces del mismo son 1, 2, -3 y $\frac{1}{2}$ (observa que la última raíz es la solución de la ecuación $2x-1=0$).