COMBINATORIA

10.1 Variaciones

EJERCICIOS PÁGINA 230

1. En una liga de fútbol en la que participan 18 equipos, el primer clasificado acude a un campeonato europeo y segundo tiene que ir a una eliminatoria previa. ¿ De cuántas formas distintas se pueden ocupar estos dos puestos?

Hay 18 equipos para ocupar los dos primeros puestos, de forma unívoca (si eres primero no puedes ser segundo, y viceversa).

Son $V_{18,2} = \dfrac{18!}{(18-2)!} = \dfrac{18!}{16!} = 18 \cdot 17 = 306$ formas distintas de ocupar los dos primeros puestos.

Otra forma de verlo:

$V_{18,2} = \dfrac{18!}{16!} = \dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!}$

2. ¿Cuántas apuestas habrá que rellenar para acertar seguro una quiniela de 14 partidos?

Cada partido tiene tres posibles resultados $\{1, X, 2\}$, es decir, tres resultados.

$VR_{3,14} = 3^{14} = 4.7830 \times 10^6$

3. ¿Cuántos números naturales de seis cifras distintas hay?

Las cifras con las que formo los números son $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

OJO!! El cero no puede ir en primer lugar. Es decir, que para la primera cifra sólo tengo 9 opciones. Para las cinco siguientes, tengo 9 opciones para cada una, pues una cifra ya le he utilizado.

Serán $9 \cdot V_{9,5} = 9 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) = 136080$

10.2 Permutaciones sin repetición

EJERCICIOS PÁGINA 231

4 ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar las letras de la palabra LIBRO?

Hay cinco elementos $\{L, I, B, R, O\}$ que tomamos de cinco en cinco sin poder repetirlos. Se trata de permutaciones sin repetición de cinco elementos:

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

5 Seis amigos van al cine y compran seis entradas con asientos consecutivos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar?

Los seis amigos tienen que estar sentados y cada uno sólo puede ocupar una butaca; se trata de permutaciones sin repetición de seis elementos:

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

6 En un banquete de bodas, las mesas son redondas y con capacidad para ocho comensales.

a) ¿De cuántas formas distintas podrán sentarse en una de las mesas?

Aquí interesa sólo quien está sentado a tu derecha y a tu izquierda sin importar la silla que ocupes en la mesa. Se trata de permutaciones circulares de ocho elementos:

$PC_8 = (8-1)! = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

b) ¿De cuántas distribuciones diferentes habrá una mesa en la que dos personas quieren estar juntas?

Como esas dos personas quieren estar juntas siempre, las convertimos en una sola persona. Se trata de permutaciones circulares de siete elementos.

$PC_7 = (7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

10.3 Permutaciones con repetición

7 Para acceder a una caja fuerte se tiene que introducir un número de 10 cifras. Se sabe que dicho número está formado por 5 doses, 3 cincos y 2 seises. ¿Cuántas claves diferentes se pueden formar?

$P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$

Observa que $5 + 3 + 2 = 10$

Parecen muchas, pero piensa cuántos números de 10 cifras podemos formar con $\{2,5,6\}$. Se trataría de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 10 en 10:

$VR_{3,10} = 3^{10} = 59\,049$

Luego no son tantas combinaciones distintas a probar!

8 Un equipo de baloncesto ha ganado una liga ganando 10 partidos, empatando 2 y perdiendo 4. ¿De cuántas formas diferentes ha podido hacerse?

La liga ha tenido $10 + 2 + 4 = 16$ partidos

Se trataría de permutaciones con repetición de 16 elementos tomados de 10,4,2 formas;

$P_{16}^{10,4,2} = \frac{16!}{10! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 =$
$= 120\,120$

9 ¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar con 8 unos, 4 equis y 2 doses?

Hay en total $8 + 4 + 2 = 14$ partidos.

Se trataría de permutaciones con repetición de 14 elementos tomados de 8,4,2 formas;

$P_{14}^{8,4,2} = \frac{14!}{8! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 9 =$
$= 45\,045$

Por otro lado, ¿cuántas quinielas distintas se pueden formar?

Tenemos tres elementos, $\{1, X, 2\}$, que se pueden repetir para cubrir 14 posiciones. Se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$VR_{3,14} = 3^{14} = 4782\,969$

Comparando los números, no tienes todavía todas las de llevarte el premio seguro.

10.4 Combinaciones sin repetición

PÁGINA 233 EJERCICIOS

12 Para decidir los ganadores de un concurso de poesía, un profesor debe elegir de jurado 3 de sus 22 alumnos. ¿De cuántas formas distintas puede realizar su elección?

Como lo único que te interesa es la composición del jurado, quien lo forma, no influye el orden. Claramente son combinaciones de 22 elementos tomados de 3 en 3.

$C_{22,3} = \frac{22!}{(22-3)! \cdot 3!} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19!}{19! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1540$

13 ¿Cuántas diagonales se pueden formar en un hexágono? ¿Y en un dodecágono?

Hablando de diagonales, sólo interesa que una dos vértices, no hay sentido en la diagonal; por lo tanto, no hay orden.

- Hexágono

  Se trata de combinaciones de 6 elementos tomados de 2 en 2.

  $C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$

- Dodecágono

  Se trata de combinaciones de 12 elementos tomados de 2 en 2.

  $C_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$

14 Con las cifras 1,2,3,5,6 y 7:

a) ¿Cuántos productos diferentes se pueden hacer con tres factores no repetidos?

En un producto, por la propiedad conmutativa, no influye el orden de los factores.

Se trata de combinaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

b) De todos los productos anteriores, ¿Cuántos dan como resultado un múltiplo de 6?

Aquí, tenemos dos posibles formas de obtener múltiplos de 6:

- $2 \cdot 3 \cdot \_$

El agujero se completaría con las cifras 1,5,7. Hay tres posibilidades.

- $6 \cdot \_ \cdot \_$

  Los dos agujeros se completarían con las cifras 1,2,3,5,7. Se trataría de combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2.

  $C_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Luego son $10 + 3 = 13$ múltiplos de 6.

10.5 Combinaciones con repetición

PÁGINA 234 EJERCICIOS

15 Se lanzan simúltaneamente 4 dados. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?

Al caer los dados, aunque estos sean distinguibles, lo único que te interesa es el resultado de las cuatro caras de arriba de los cuatro dados.

Se trata de combinaciones con repetición (cada uno de los cuatro dados, va numerado del 1 al 6) de 6 tomados de 4 en 4.

$CR_{6,4} = C_{6+4-1,4} = \dfrac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

16 Tenemos 6 pelotas de golf que se colorean con 3 colores diferentes. ¿De cuántas formas distintas se pueden colorear?

Las pelotas de golf son indistinguibles, por lo que lo único que interesará es el color que le demos.

Se trata de combinaciones con repetición (hay seis pelotas que pintar y solo tres colores diferentes) de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$CR_{6,3} = C_{6+3-1,3} = \dfrac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

17 En un restaurante de comida rápida se puede elegir entre hamburguesa con queso, sándwich vegetal, sándwich mixto, ensalada César y perrito caliente. ¿Cuántos pedidos diferentes pueden hacer un grupo de seis amigos?

Lo único que interesa del pedido, son los platos que lo componen, no el orden en el que los pedimos. Por otro lado, tenemos nada más que cinco platos para seis amigos, pero todos comen, de ahí que haya que repetir un plato.

Se trata de combinaciones con repetición de cinco elementos tomados de 6 en 6.

$CR_{5,6} = C_{6+5-1,6} = \dfrac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ pedidos distintos

10.6 Números combinatorios

PÁGINA 235 EJERCICIOS

18 Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} - \binom{9}{4} =$ (3º propiedad) $=$

$= \binom{8}{3} + \binom{8}{4} - \binom{9}{4} =$ (3º propiedad) $= \binom{9}{4} - \binom{9}{4} = 0$

b) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} =$

$=$ (4º propiedad) $= 2^4 - \binom{4}{4} =$ (1º propiedad) $= 16 - 1 = 15$

19 Simplifica la expresión:

$$\frac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{25}\right] \cdot 4!}{630} = \frac{\left[\dfrac{29!}{(29-3)! \cdot 3!} + \dfrac{29!}{(29-25)! \cdot 25!}\right] \cdot 4!}{630} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \dfrac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{4! \cdot 25!}\right] \cdot 4!}{630} =$$

$$= \frac{\left[29 \cdot 14 \cdot 9 + \dfrac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right] \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{630} =$$

$$= \frac{[29 \cdot 14 \cdot 9 + 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13] \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{630} = \frac{27405 \cdot 24}{630} = \, = 1044$$

$29 \cdot 14 \cdot 9 + 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 = 3654 + 23751 = 27405$

$29 \cdot 14 \cdot 9 = 3654$

$29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 = 23751$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

20 Simplifica la expresión:

$$\frac{2^{n-3} \cdot (n+2)!}{2^{n-1} \cdot \binom{n+2}{2}} = \frac{2^{n-3-(n-1)} \cdot (n+2)!}{\frac{(n+2)!}{(n+2-2)! \cdot 2!}} = \frac{2^{-2} \cdot 1}{\frac{1}{n! \cdot 2 \cdot 1}} =$$

$$= 2^{-2} \div \frac{1}{n! \cdot 2} = \frac{n! \cdot 2}{2^2} = \frac{n!}{2}$$

Binomio de Newton

21 Desarrolla el binomio $(2x+y)^5$

$(2x+y)^5 =$

$= \binom{5}{0}(2x)^5y^0 + \binom{5}{1}(2x)^{5-1}y^1 + \binom{5}{2}(2x)^{5-2}y^2 + \binom{5}{3}(2x)^{5-3}y^3 +$

$+\binom{5}{4}(2x)^{5-4}y^4 + \binom{5}{5}(2x)^{5-5}y^5 =$

$= 1 \cdot (2x)^5 \cdot 1 + 5 \cdot (2x)^4 \cdot y + 10 \cdot (2x)^3 \cdot y^2 + 10 \cdot (2x)^2 \cdot y^3 + 5 \cdot (2x)^1 \cdot y^4 +$

$+1 \cdot 1 \cdot y^5 = 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

- $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$
- $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} = 5$

ATENCIÓN SE CUMPLE QUE $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$

- $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

22 Calcula el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(x-2)^6$.

Aparecerá x^4 en $\binom{6}{2}x^{6-2}(-2)^2 = 15x^4 \cdot 4 = 60x^4$

Os recuerdo que $(x-2)^6 = (x+(-2))^6$

Entonces el coeficiente pedido es 60.

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$

24 Calcula $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = \left(x + \left(-\frac{1}{x}\right)\right)^6 =$

$= \binom{6}{0}x^{6-0}\left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1}x^{6-1}\left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2}x^{6-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 +$

$+\binom{6}{3}x^{6-3}\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^{6-4}\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}x^{6-5}\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}x^{6-6}\left(-\frac{1}{x}\right)^6 =$

$= 1 \cdot x^6 \cdot 1 + 6 \cdot x^5 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + 15 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 20 \cdot x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right) +$

$+15 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^4} + 6 \cdot x^1 \cdot \left(-\frac{1}{x^5}\right) + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^6} =$

$= x^6 - 6x^{5-1} + 15x^{4-2} - 20x^{3-3} + 15x^{2-4} - 6x^{-4} + \frac{1}{x^6} =$

$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$

$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$

$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$

72 Calcula cuántos números capicúas hay de:

a) Dos cifra.

Un número es capicúa si de izquierda a derecha, y viceversa, se lee igual. Por ejemplo, 22, 121, 32423,.......

Los números se construyen con las cifras $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; en total diez cifras.

Habrá $9 = 9 \cdot 10^0$, pues como sólo tienen dos cifras, las dos han de ser iguales; el 00 no vale.

b) Tres cifras.

Será de la forma aba donde a y b son cifras.

Los valores que puede tomar a son $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, nueve valores distintos.

Los valores que puede tomar la b son $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, diez valores distintos.

Luego, podemos hacer $9 \cdot 10 = 90$

Hemos aplicado el principio de la multiplicación.

c) Cuatro cifras.

Será $abba$ donde a y b son cifras.

Los valores que puede tomar a son $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, nueve valores distintos.

Los valores que puede tomar la b son $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, diez valores distintos.

Luego, podemos hacer $9 \cdot 10 = 90 = 9 \cdot 10^1$

Hemos aplicado el principio de la multiplicación.

d) Cinco cifras.

Será $abcba$ donde a, b y c son cifras.

Los valores que puede tomar a son $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, nueve valores distintos.

Los valores que puede tomar la b y c son $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, diez valores distintos.

Luego, podemos hacer $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

Hemos aplicado el principio de la multiplicación.

e) n cifras, con n par.

Si fuesen seis cifras, será $abccba$, y podemos hacer $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Si fuesen ocho cifras, será $abcddcba$, y podemos hacer $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000 = 9 \cdot 10^3$.

Si fuesen diez cifras, será $abcdeedcba$, y podemos hacer $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000 = 9 \cdot 10^4$.

Si fuesen n cifras, podemos hacer $9 \cdot 10^{\frac{n}{2}-1}$

75 Un director de teatro está haciendo un casting para cubrir 10 personajes distintos, 4 de hombres y 6 de mujeres. Si a las pruebas asisten 20 hombres y 23 mujeres. ¿De cuántas formas distintas se pueden asignar los personajes?

Es claro que los hombres sólo pueden ser hombres y las mujeres sólo mujeres.

Los candidatos a los 4 personajes de hombres son 20 siendo los personajes indistinguibles, es decir, no influye el orden, sólo interesa los cuatro hombres elegidos. Esto se puede hacer de $C_{20,4} = \binom{20}{4} =$

$= \dfrac{20!}{(20-4)! \cdot 4!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 = 4845$ formas

Análogamente, para las mujeres esto se puede hacer de $C_{23,6} = \binom{23}{6} =$

$= \dfrac{23!}{(23-6)! \cdot 6!} = \dfrac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 3 =$

$= 403\,788$

Finalmente, el casting se puede hacer $4845 \cdot 403788$

Aplicamos el principio de la multiplicación.

78 En el Departamento de Matemáticas de un instituto hay 8 profesores, en el de Física y Química hay 3 y en el de Biología hay 4. Se quiere crear un tribunal de 6 profesores que juzgue los trabajos científicos de varios alumnos. ¿De cuántas formas se pueden agrupar en los siguientes casos?

a) Puede pertenecer al comité cualquier profesor de estos Departamentos.

Hay $8 + 3 + 4 = 15$ candidatos.

Como sólo me interesa que haya ocho miembros sin importar el orden de elección, tenemos

$C_{15,6} = \binom{15}{6} = \dfrac{15!}{(15-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 =$

$= 5005$ formas

b) El tribunal estará compuesto por 3 profesores de Matemáticas, 2 de Biología y 1 de Física y Química.

Para elegir los de Matemáticas hay $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \dfrac{8!}{(8-3)!3!} =$

$= \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$ posibilidades

Para elegir a los de Física y Química hay $C_{3,1} = \binom{3}{1} = \dfrac{3!}{(3-1)! \cdot 1!} =$

$= \dfrac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$ posibilidades

Para elegir a los de Biología hay $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \dfrac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 3 = 6$ posibilidades

Por lo tanto, aplicando el principio de multiplicación habría

$56 \cdot 6 \cdot 3 = 1008$ posibilidades para elegir el tribunal.

c) En el tribunal estarán los respectivos Jefes de Departamento y un profesor de cada Departamento.

Los tres Jefes no son elegibles, están por ser Jefes. Luego, en cada Departamento, habrá que elegir otro miembro.

En Matemáticas hay siete profesores de a pie para elegir, lo que se puede hacer de $C_{7,1} = \binom{7}{1} = 7$

En Biología hay tres profesores de a pie para elegir, lo que se puede hacer de $C_{3,1} = \binom{3}{1} = 3$

En Física y Química hay dos profesores de a pie para elegir, lo que se puede hacer de $C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$

Entonces aplicando el principio de multiplicación se pueden formar

$7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$ tribunales.

80 Para guardar siete balones iguales de voleibol, el profesor de educación física dispone de cinco armarios. ¿De cuántos formas distintas puede guardar los balones?

Tienes que puedes meter todos los balones en un armario; también puede ser que metes los balones en solo dos armarios; otra forma, es que metas todos los balones sólo en tres armarios; otra, todos los balones en sólo cuatro armarios; y que utilices los cinco armarios. En este último caso, tienes dos formas de hacerlo: cuatro pelotas en cuatro armarios y tres en uno; tres pelotas en tres armarios y las otras cuatro repartidas en los dos armarios; dos armarios con dos pelotas, y las otras cinco repartidas en los tres armarios; un armario con una pelota, y las otras seis repartidas en los cuatro armarios.

- La primera forma tiene $C_{5,1} = \binom{5}{1} = 5$ posibilidades: los siete balones son un paquete.
- La segunda forma tiene $C_{5,2} \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$ (donde 3 esel número de formas de distribuir siete pelotas en dos grupos. $\binom{5}{2} = 10$). Sumar siete se puede hacer de las siguientes formas: $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4;$ es decir, de tres formas distintas.
- La tercera forma tiene $C_{5,3} \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40$ (donde 4 es el número de formas de distribuir siete pelotas en tres grupos. $\binom{5}{3} = 10$). Sumar siete se puede hacer de las siguientes formas: $1 + 2 + 4, 1 + 3 + 3, 1 + 1 + 5, 2 + 2 + 3$.
- La cuarta forma tiene $C_{5,4} \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$ (donde 3 es el número de formas de distribuir siete pelotas en cuatro grupos. $\binom{5}{4} = 5$) Sumar siete se puede hacer de las formas siguientes: $1 + 1 + 1 + 4, 1 + 1 + 1 + 3, 1 + 2 + 2 + 2$.
- La quinta forma, en la que utilizas todos los armarios, se diferencia a su vez en:
  - Si tenemos $1 + 1 + 1 + 1 + 3,$ esto se puede hacer de $C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$
  - Si tenemos $1 + 1 + 1 + 2 + 2,$ esto se puede hacer de $C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$

Finalmente sumamos todas las posibles formas obtenidas:

$10 + 10 + 15 + 40 + 30 + 5 = 110$

83 En una clase hay 20 alumnos. Se quieren hacer 4 grupos de 5 alumnos cada uno. ¿De cuántas formas distintas se pueden hacer estos grupos?

$C_{20,5} = \binom{20}{5} = \dfrac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15! 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 19 \cdot 6 \cdot 17 \cdot 8 = 15\,504$ esto serían todas las formas posibles de elegir los cinco primeros.

$C_{15,5} = \binom{15}{5} = 3003$ esto serían todas las formas posibles de elegir los cinco siguientes.

$C_{10,5} = \binom{10}{5} = 252$ esto serían todas las formas posibles de elegir los cinco siguientes.

Entonces se puede hacer, aplicando el principio de multiplicación, $15504 \cdot 3003 \cdot 252 = 11\,732\,745\,024$

85 Los códigos de identificación de algunos motores están formados por cinco dígitos, repetidos o no, seguidos de tres letras que no se pueden repetir. ¿Cuántos códigos diferentes se pueden formar si el alfabeto tiene 26 letras?

Las cifras que se emplean son $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, es decir, diez cifras.

Hemos de contar todos los códigos numéricos que se pueden formar y todos los códigos de letras que se pueden formar.

Para los números será $VR_{10,5} = 10^5$

Para las letras será $V_{26,3} = 26 \cdot 25 \cdot 24$

Entonces, aplicando el principio de multiplicación será:

$10^5 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 1560\,000\,000$ formas posibles.