Ecuaciones e Inecuaciones.

1. Ecuaciones con una incógnita.

En mucha de las situaciones de la vida diaria se plantean problemas que se pueden resolver a partir de ecuaciones. Por ejemplo, si queremos saber el ladote un jardín cuadrado de $100m^2$:

x=lado → área=$x^2=100m^2$ → x=$\sqrt{100m^2}=10m$

1.1 Ecuaciones de primer grado

Son las mas sencillas de resolver, a partir de las operaciones de simplificación obtendremos una expresión de la forma

a·x+b=0 donde a y b son números reales. Cuya solución es única **x=-b/a**

Ejemplo:

$$\frac{3(x+1)}{2}-x=\frac{x-4}{3} \rightarrow \frac{9(x+1)}{6}-\frac{6x}{6}=\frac{2\cdot(x-4)}{6} \rightarrow 9x+9-6x=2x-8 \rightarrow x=-17$$

Comprobación: $\frac{3(-17+1)}{2}-(-17)=\frac{-17-4}{3} \rightarrow -24+17=-7$

Ejercicio 1. Resolver:

a) $\frac{x-3}{2}+7=x-\frac{5-x}{3}$ → solución x=43/5

b) $\frac{-3(5-x)}{10}-\frac{3x}{2}=7-\frac{5x}{3}$ → solución x=$\frac{255}{14}$

1.2 Ecuaciones de segundo grado

Después de operar la expresión simplificada de ecuaciones de segundo grado es de la forma:

a·x²+bx+c=0. → **solución:** $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}$

Podemos ver que según el signo del discrimínate $\Delta=b^2-4ac$ podemos tener 1,2 o ninguna solución:

a) Δ>0 dos soluciones $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

b) Δ=0 una solución $x=\frac{-b}{2\cdot a}$ (raíz doble)

c) Δ<0 ninguna solución real (números complejos)

Resolución de ecuaciones incompletas (b o c nulas). Se pueden resolver por el método general, pero también se puede resolver de manera más sencilla. Veamos los dos casos:

1) $ax^2+c=0 \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\begin{cases} si\ \frac{c}{a}>0\ no\,solución \\ si\ \frac{c}{a}<0\ 2\,soluciones \end{cases}$

2) $ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0,\ x=-b/a$. Siempre dos soluciones

Ejercicio 2. Resolver:

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0 \rightarrow x=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{72-72}}{2}=3\sqrt{2}$

b) $2x^2-7x+3=0 \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\left\langle\begin{matrix}6\\1\end{matrix}\right.$

c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1 \rightarrow (x+7)\cdot(x^2+2x-3)+(x^2-3x+6)=(x+3)\cdot(x^2+2x-3)\rightarrow$

$5x^2+5x-6=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+120}}{10}=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{10}=\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{145}}{10}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{145}}{10}\end{matrix}\right.$

d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2} \rightarrow 2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)=5(x+5)(x-4)\rightarrow 5x^2+19x-102=0$

$x=\frac{-19\pm\sqrt{361+2040}}{10}=\frac{-19\pm 49}{10}=\left\langle\begin{matrix}3\\-\frac{34}{5}\end{matrix}\right.$

e) $(x-\sqrt{3})^2-1+x=x \rightarrow x^2-2\sqrt{3}x+3-1=0 \rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2}=\left\langle\begin{matrix}\sqrt{3}+1\\\sqrt{3}-1\end{matrix}\right.$

f) $1+(x-2)^2=1 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2$

g) $9x^2-25=0 \rightarrow x^2=25/9 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

h) $x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow x=0,\ x=2$

1.3 Ecuaciones bicuadradas

Ecuaciones polinómicas de 4º grado sin términos impar, es decir de la forma:

$ax^4+bx^2+c=0$. con $a,b,c\in \mathbb{R}$

Procedimiento para resolver las ecuaciones bicuadráticas:

1. Cambio variable: $x^2=t$, luego $x^4=t^2 \rightarrow at^2+bt+c=0$
2. Resolver la ecuación de segundo grado en t.
3. Soluciones son las raíces cuadradas de las soluciones en t (deshacer cambio variable). $x=\pm\sqrt{t}$.

El número de posibles soluciones son:

a) 0 soluciones, o no soluciones en t o son negativas.
b) 2 soluciones distintas
c) 2 soluciones dobles
d) 4 soluciones distintas

Ejemplo: $x^4-5x^2+4=0$

Paso1: $x^2=t \rightarrow t^2-5t+4=0$

Paso2: $t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$

Paso3 : $x=2,-2,1,-1$

Ejercicio 3 : resolver las siguientes inecuaciones

a) $x^4-x^2-6=0$ $\rightarrow$ solución : $x=\pm\sqrt{3}$
b) $x^4-3x^2+2=0$ $\rightarrow$ solución $x=\pm\sqrt{2},\pm 1$
c) $-x^4-4x^2-45=0$ $\rightarrow$ No soluciones reales

1.4 Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones polinómicas son expresiones de la forma p(x)=0 con p(x) un polinomio. Consiste en obtener los valores de x que anulan el polinomio, es decir las raíces. Las formas de proceder a calcular las soluciones son las mismas que las de obtener las raíces, vistas en el tema anterior (Ruffini, factor común, ecuaciones de 2º grado…)

Ejemplos:

$x^3+x^2=0 \rightarrow x^2(x+1)=0 \rightarrow x=0$ (doble) y $x=-1$

$x^5-3x^4-8x^3+12x^2+16x=0 \rightarrow x\cdot(x-4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)=0 \rightarrow x=0, x=-2, x=2, x=-1, x=4$

Ejercicio 4. Resolver:

a) $(x+\pi)\cdot(x-1/2)\cdot(3x-7)=0$ $\rightarrow$ soluciones $x=-\pi$, $x=1/2$, $x=7/3$

b) $x^2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(5x+1)=0$ $\rightarrow$ soluciones $x=0$ (doble), $x=\sqrt{2}$, $x=-1/5$

c) $4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0$ $\rightarrow$ soluciones $x=1$ (doble), $x=-7$, $x=1/2$, $x=-1/2$

1.5 Ecuaciones con radicales.

En este apartado veremos ecuaciones con raíces o con radicales. El objetivo a la hora de resolver estas ecuaciones es eliminar la raíz. Dos casos:

a) Si tenemos una única raíz tendremos que aislarla a un lado de la igualdad, tomando cuadrados ambos de la igualdad desaparecerá la raíz.
b) Si tenemos dos raíces y ningún otro factor dejamos una a cada lado de la igualdad y elevamos al cuadrado

Una vez obtenidas las soluciones tendremos que comprobar que estas lo son realmente, ya que al elevar al cuadrado se introducen soluciones inexistentes.

Nota: la razón de que al elevar al cuadrado haya soluciones no válidas es que el signo al cuadrado se pierde, así $1\neq-1$ pero $(1)^2=(-1)^2$

Ejemplo:

$$\sqrt{3x+4}-4=-2x\rightarrow\sqrt{3x+4}=4-2x\xrightarrow{\text{elev cuadrado}}3x+4=(4-2x)^2\rightarrow$$

$$3x+4=16+4x^2-16x\rightarrow4x^2-19x+12=0\quad x=\begin{cases}4\\ 3/4\end{cases}$$

Comprobación:

x=4 → $\sqrt{16}-4\neq-8$ (no solución)

x= $3/4$ → $\sqrt{\frac{25}{4}}-4=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}=-2\cdot\frac{3}{4}$ (solución)

$$\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+5}=0\rightarrow\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+5}\xrightarrow{\text{elv cuadrado}}x^2+3x-1=x^2+5$$

$$3x=6\rightarrow x=2$$

Comprobación:

x=2→ $\sqrt{2^2+3\cdot2-1}-\sqrt{2^2+5}=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0$ solución.

Ejercicio 5. Resolver:

a) $4x+2\sqrt{x+4}=4\rightarrow2\sqrt{x+4}=4-4x\rightarrow\left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(4-4x)^2\rightarrow$

$4(x+4)=16x^2-32x+16\rightarrow16x^2-36x=0\rightarrow4x(4x-9)=0\quad x=\begin{cases}0\\ 9/4\end{cases}$

Comprobación:

x=0 → $0+2\cdot\sqrt{0+4}=4$ Solución

x=$9/4$ → $4\cdot\frac{9}{4}+2\sqrt{\frac{9}{4}+4}=9+2\cdot\frac{5}{2}\neq4$ No solución

b) $x^2+\sqrt{4x^2-3}=0\rightarrow x^2=-\sqrt{4x^2-3}\xrightarrow{\text{elev}}x^4=4x^2-3\rightarrow x^4-4x^2+3=0$

$x^2=t,\ x^4=t^2\rightarrow t^2-4t+3=0\rightarrow t=\begin{cases}3\\ 1\end{cases}\quad x=\begin{cases}\pm\sqrt{3}\\ \pm1\end{cases}$

Comprobación:

x=1 → $1^2+\sqrt{4\cdot1^2-3}=2\neq0$ No solución

x=-1 → $(-1)^2+\sqrt{4\cdot(-1)^2-3}=2\neq0$ No solución

x=$\sqrt{3}$ → $\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq0$ No solución

x=$-\sqrt{3}$ → $\left(-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(-\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq0$ No solución

c) $x-\sqrt{x}=2 \rightarrow x-2=\sqrt{x} \xrightarrow{elv} (x-2)^2=x \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x=\begin{cases}4\\1\end{cases}$

Comprobación:

x=1 $\rightarrow$ $1-\sqrt{1}=0\neq 2$ No solución

x=4 $\rightarrow$ $4-\sqrt{4}=2$ Solución

1.6 Ecuaciones de fracciones polinómicas.

Son ecuaciones de suma y resta de fracciones polinómica. La forma de resolver estas ecuaciones se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1: Se expresan todas las fracciones con común denominador a ambos lados de la igualdad

Paso 2: se igualan los denominadores y se resuelve dicha ecuación.

Paso 3: se comprueban las soluciones. En caso de que alguna de las soluciones anule algún denominador esta no será válida.

Ejemplo: $\frac{2x-2}{x-2}+\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}$

Paso 1:

$$\frac{6(2x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}+\frac{6x(x-2)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}-\frac{6(x-2)(x+1)(x-2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}=\frac{5(x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}$$

Paso 2

$12\cdot x^3 + 42\cdot x^2 - 36\cdot x - 48 = 5\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 20\cdot x - 20 \rightarrow 7\cdot x^3+37\cdot x^2-16\cdot x-28=0$

Soluciones: x=1, x=$\frac{-22\pm 12\sqrt{2}}{7}$

Paso 3: Las 3 soluciones son validas porque para estos valores de x no se anula ningún denominador.

Ejercicio 6. Resolver:

a) $\frac{2}{x}-\frac{2-x}{x+3}=1$ $\rightarrow$ Solución x=2

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+2}=3$ $\rightarrow$ No tiene soluciones.

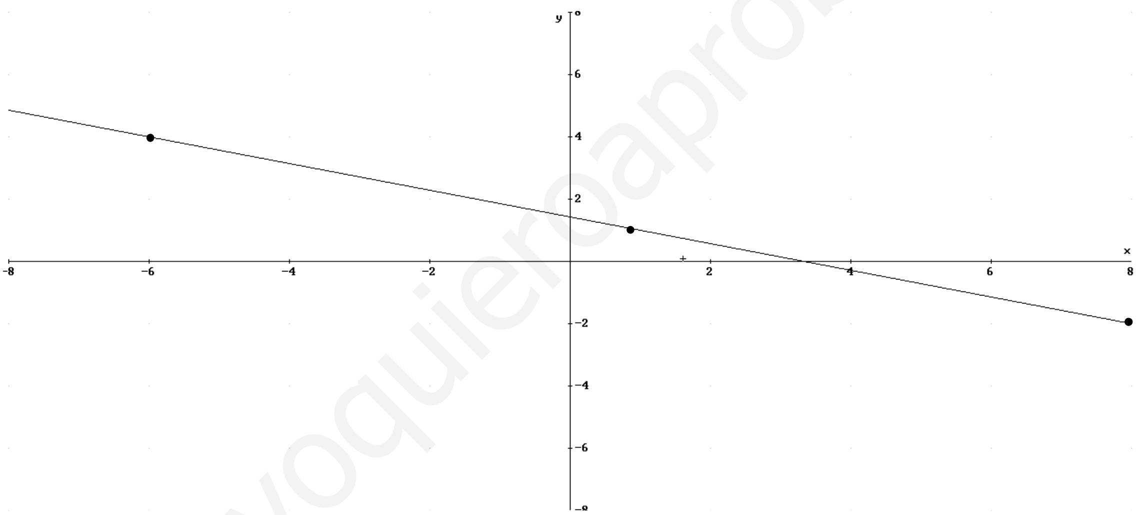
2. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma **ax+by=c**, se caracterizan por tener infinitas soluciones para las dos variables (x,y) situadas sobre una recta.

Ejemplo: **3x+7y=10,** despejamos una variable (cualquiera de las dos) $x = \frac{10 - 7y}{3}$, damos valores a la variable no despejada y obtendremos valores de la despejada. Como es una recta si lo hacemos correctamente con dos valores sería suficiente, ya que por dos puntos pasa una única recta.

x	**y**
1	1
-6	4
8	-2

Representamos las soluciones:



Ejercicio 7. Representa las soluciones de las siguientes ecuaciones

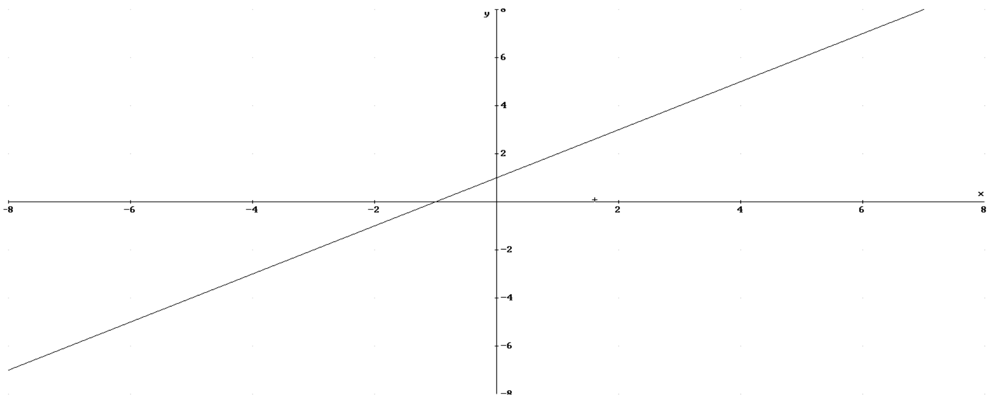
a) –x+y=1

b) √3x+5y=√3

c) -7x+3y=-5

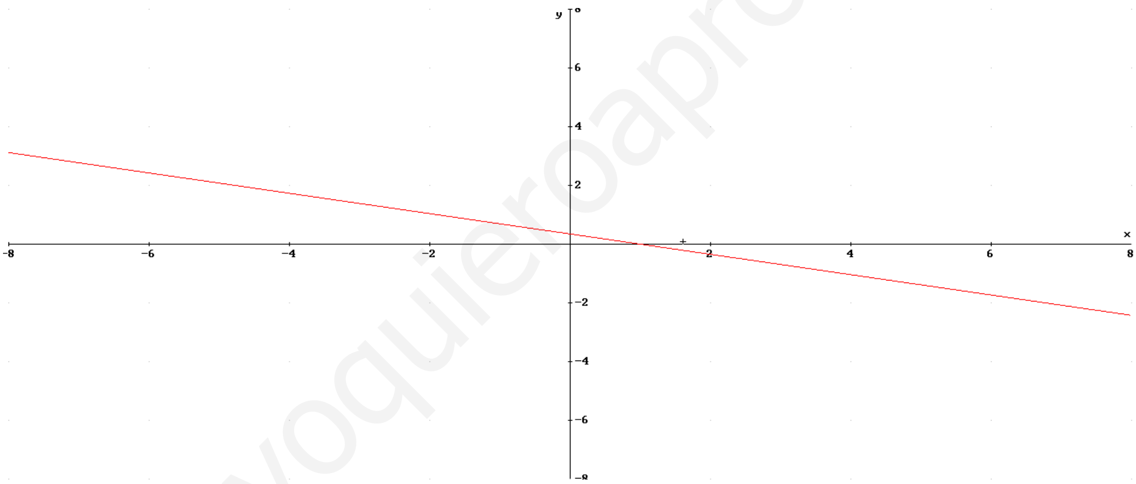
a) –x+y=1 → y=1+x

x	y
1	2
0	1
-1	0



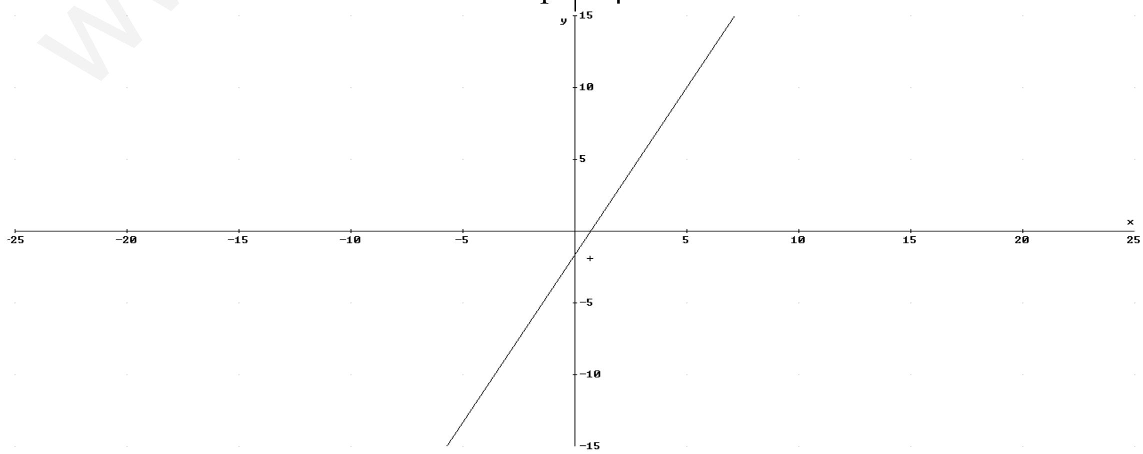
b) √3x+5y=√3 → $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{5}$

X	y
1	0
2	$-\sqrt{3}/_5 \approx -0{,}35$



c) -7x+3y=-5 → $y=\dfrac{-5+7x}{3}$

x	y
2	3
-1	-4



3. Sistemas de ecuaciones

3.1. Dos ecuaciones lineales

Los sistemas con dos ecuaciones lineales son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ ax+by=c \\ (2)\ a'x+b'y=c'\end{array}\right\}$$

Las soluciones al sistema serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera (S_1) y las soluciones de la segunda ecuación (S_2). De esta forma si llamamos S a las soluciones del sistema, estas serán igual a

$S=S_1\cap S_2$

3.1.1. Soluciones. Interpretación gráfica de las soluciones.

Según el número de soluciones se puede distinguir entre los siguientes tipos de sistemas:

1. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

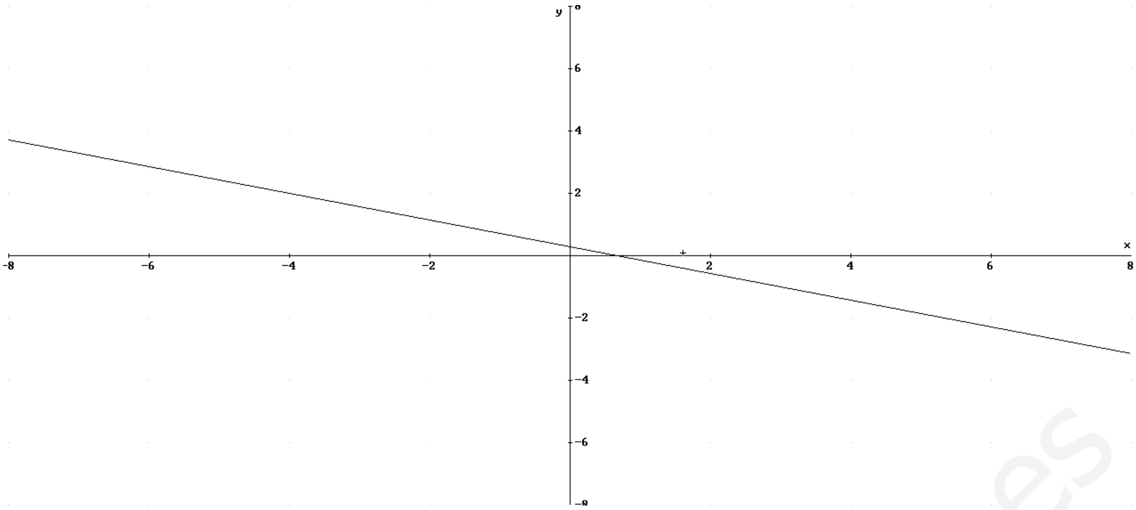
Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\ 3x+7y=2 \\ (2)\ -6x-14y=-4\end{array}\right\}(2)\equiv(1)\rightarrow\frac{3}{-6}=\frac{7}{-14}=\frac{2}{-4}$

Si representamos las dos ecuaciones se trata de dos rectas iguales, por tanto las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2).

Ejemplo: en el ejemplo anterior las soluciones son:



2. Sistema incompatible, no tiene soluciones

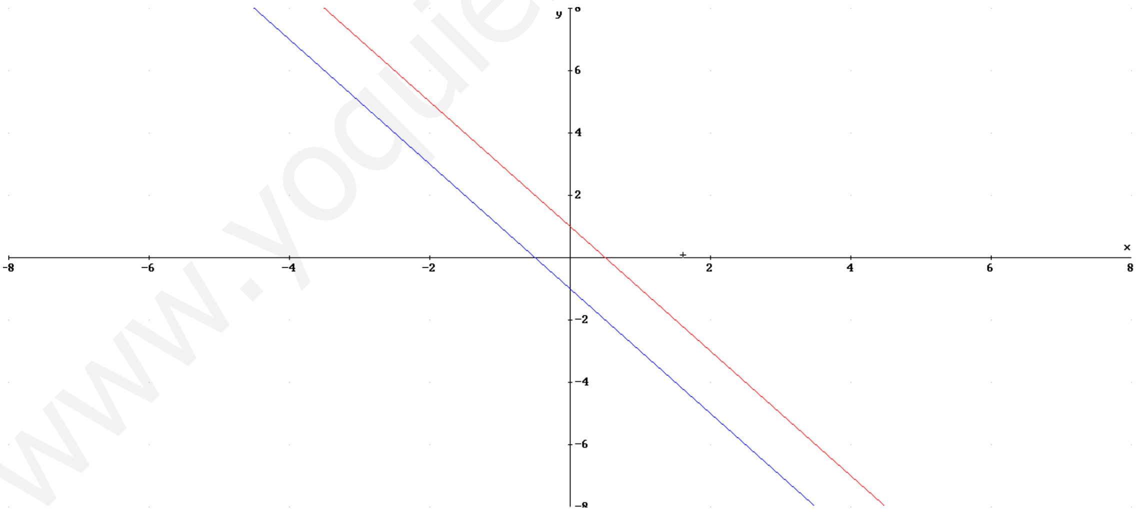
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir tienen ninguna solución en común. Ocurre cuando la relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ 2x + y = 1 \\ (2)\ 4x + 2y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-2}.$$

Interpretación gráfica:



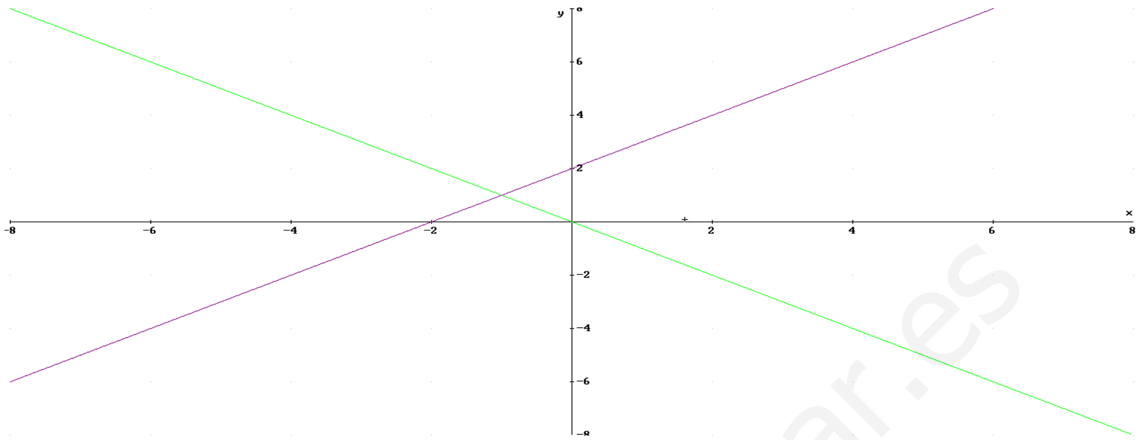
3. Compatible determinado, una única solución.

Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=0\\(2)\ -x+y=2\end{array}\right\}\ \frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}\rightarrow comp\ \det$$



3.1.2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, según el tipo de sistema tendremos:

1. **Compatibles indeterminados:** la solución es la de una de las dos ecuaciones, que resolvemos como hemos visto en el apartado anterior representando una recta.
2. **Incompatibles:** no tienen solución, por lo que no tendremos que resolverlas
3. **Compatibles determinados:** tiene una única solución que resolvemos por uno de los tres métodos vistos en el curso anterior. Veamos un ejemplo y resolvámoslo por los tres métodos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)x+y=1\\(2)x-y=0\end{array}\right\}$$

a) Sustitución: igualamos una incógnita en una ecuación y la introducimos en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

y=1-x → x-(1-x) =0; 2x=1; x=1/2; y=1-1/2=1/2 → **solución; x=1/2, y=1/2**

b) Igualación: consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualarlas entre si y obtener una ecuación con una incógnita:

y=1-x; y=x → 1-x=x; 2x=1→ **solución x=1/2; y=1/2**

c) Reducción: consiste en sumando o restando las ecuaciones multiplicadas por factores se anula alguna incógnita, la x o la y. Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

(1)+(2) → 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 → **solución x=1/2; y=1/2**

Ejercicio 8. Resuelve, clasifica y interpreta gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\,3x-2y=1\\(2)\,6x-4y=2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\;4x-y=5\\(2)-8x+2y=3\end{array}\right\}$

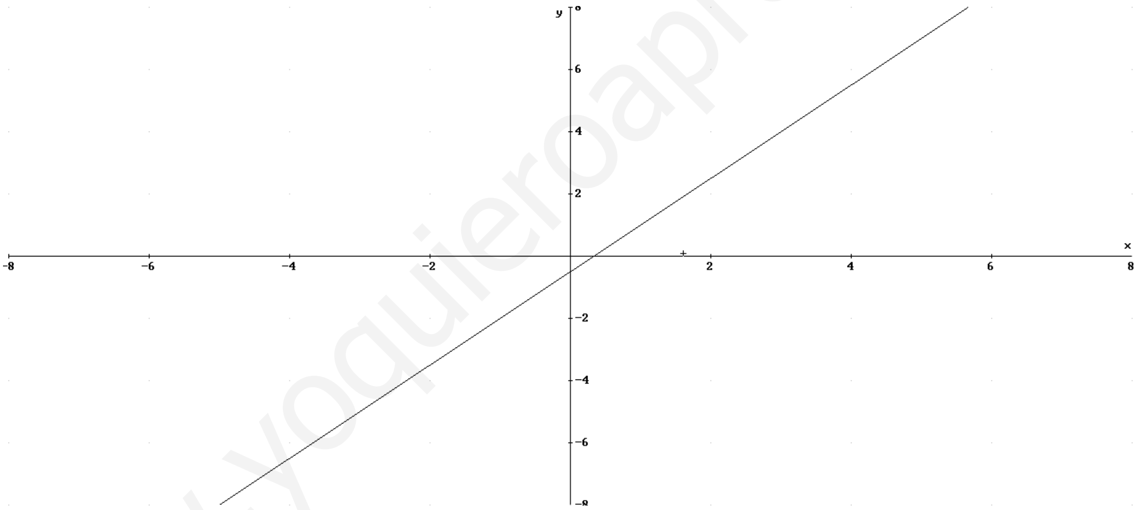
c) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\;x-3y=2\\(2)\;2x+y=4\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}(1)-18x+6=6y\\(2)\,y+3x+5=6\end{array}\right\}$

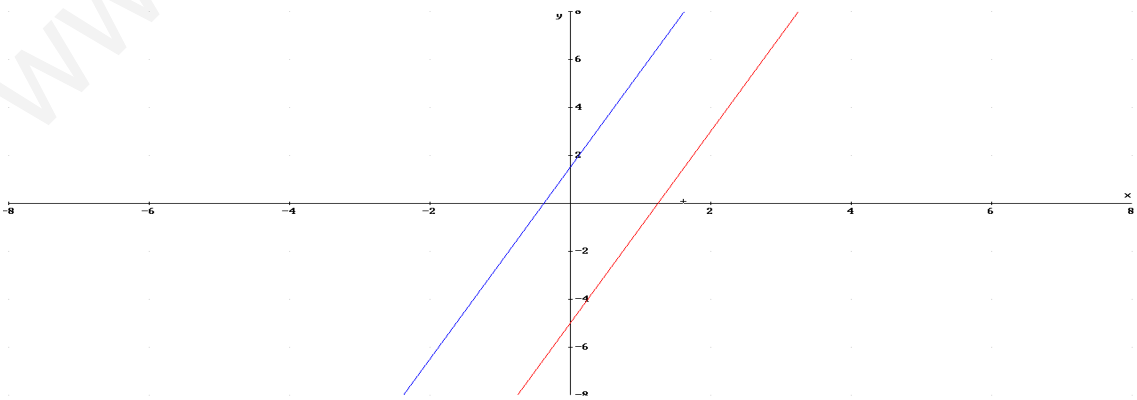
e) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\;\dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\(2)\;\;5x+y=0\end{array}\right\}$

Soluciones:

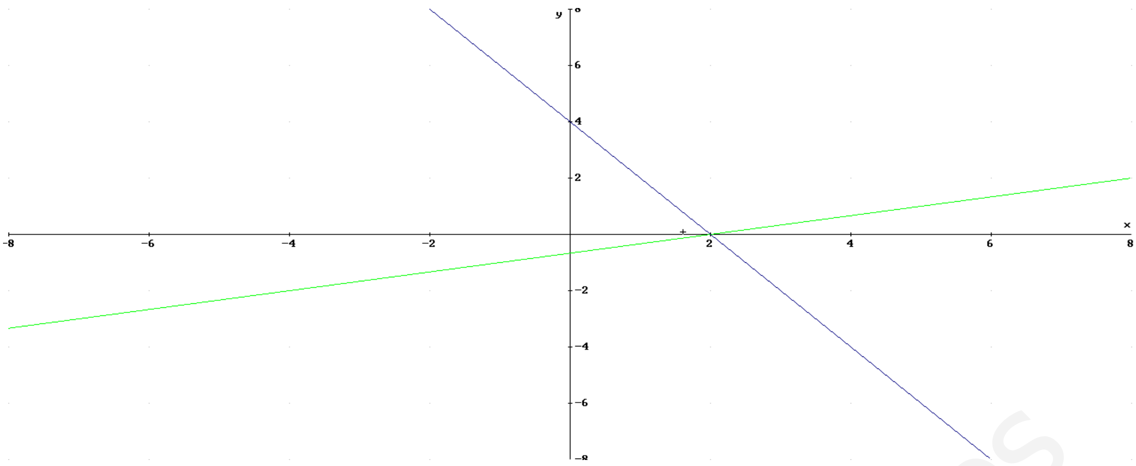
a) $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$ Compatible indeterminado→ $x=\dfrac{1+2y}{3}$



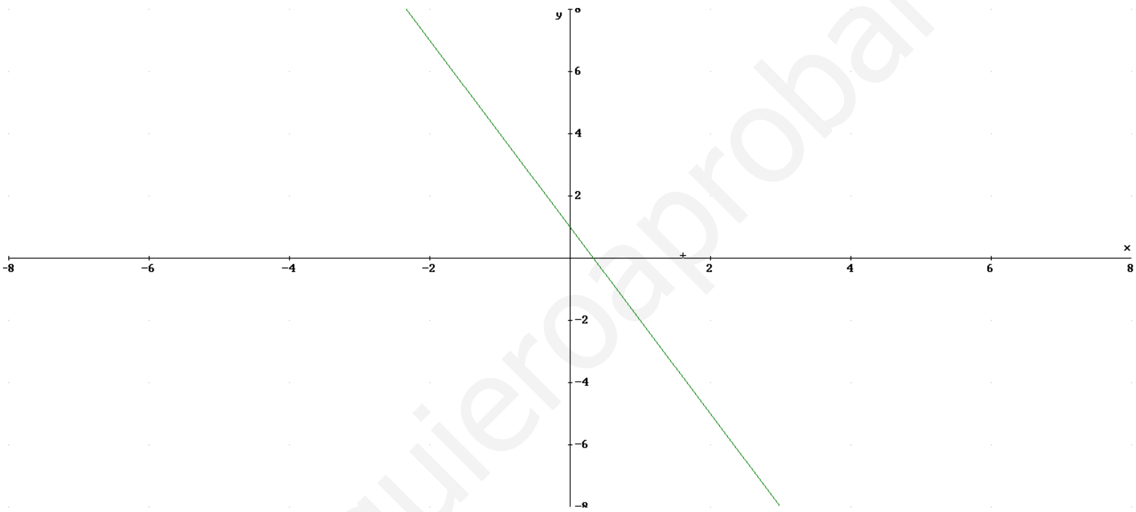
b) $\dfrac{4}{-8}=\dfrac{-1}{2}\neq\dfrac{5}{3}$. Incompatible, no solución



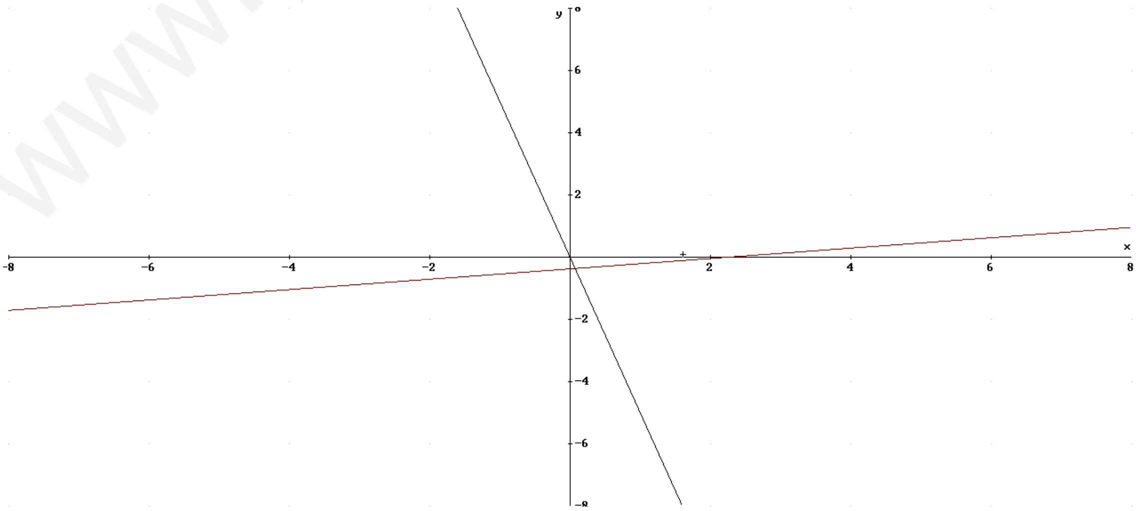
c) $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-3}{1}$. Compatible determinado, una solución. **x=2, y=0**



d) $\frac{-18}{3} = \frac{-6}{1} = \frac{-6}{1}$ → Compatible indeterminado. Infinitas soluciones.



e) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \frac{x}{3} - 2y = \frac{3}{4} \\ (2)\ 5x + y = 0\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l}(1)\ 4x - 24y = 9 \\ (2)\ 5x + y = 0\end{array}\right\}$ $\frac{4}{5} \neq \frac{-24}{1}$ → compatible determinado, una solución → Solución x=9/124, y=-45/124



3.2. Sistemas no lineales con dos incógnitas

Estos sistemas son aquellos donde una o varias ecuaciones no son lineales, es decir aparecen términos cuadráticos, cúbico, etc. En este tema trataremos sólo cuando tenemos exponentes cuadráticos. Generalmente se resuelve por sustitución. Veamos tres ejemplos:

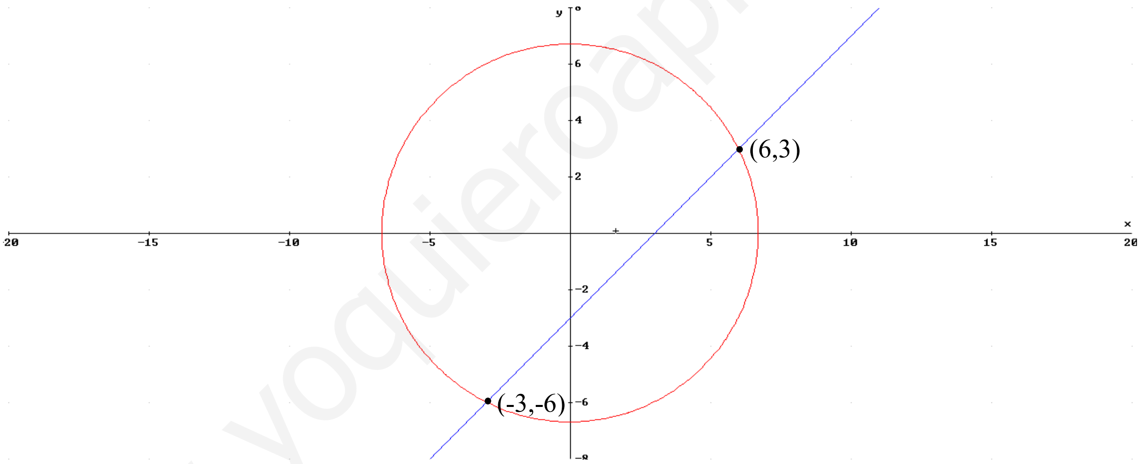
Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x-y=3\\(2)\ x^2+y^2=45\end{array}\right\} \rightarrow x=3+y \text{ , sustituyendo en (2) } (3+y)^2+y^2=45;\ \ 2y^2+6y-36=0$$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{36+288}}{4}=\frac{-6\pm 18}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-6\rightarrow x=3-6=-3\\ \\ 3\rightarrow x=3+3=6\end{array}\right. .$$

Dos soluciones (x=-3, y=-6); (x=6, y=3)

Para interpretar gráficamente la solución tendremos que saber que la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio R es de la forma $x^2+y^2=R^2$. De esta forma la ecuación $x^2+y^2=45$, es una ecuación de una circunferencia de radio $R=\sqrt{45}$



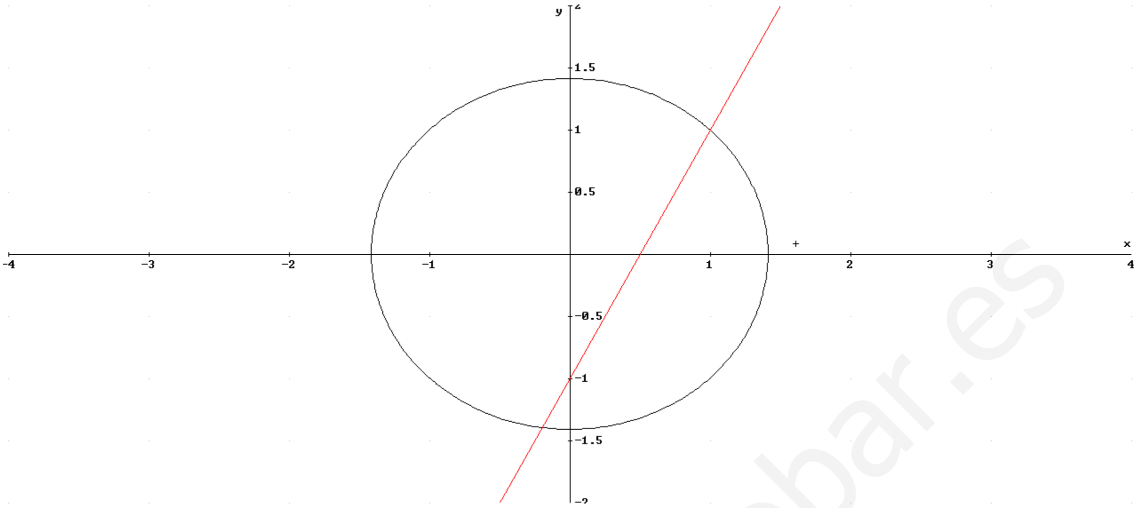
Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y-x=-1+x\\(2)\ x^2+y^2=2\end{array}\right\} \rightarrow y=-1+2x \rightarrow x^2+(2x-1)^2=2;\ \ x^2+4x^2-4x+1-2=0$$

$$5x^2-4x-1=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\frac{4\pm 6}{10}=\left\langle\begin{array}{l}1\rightarrow y=-1+2=1\\ \\ -1/5\rightarrow x=-1-2/5=-7/5\end{array}\right.$$

Soluciones (x=1, y=1); (x=$-1/5$, y=$-7/5$)

Interpretación gráfica (circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y recta)



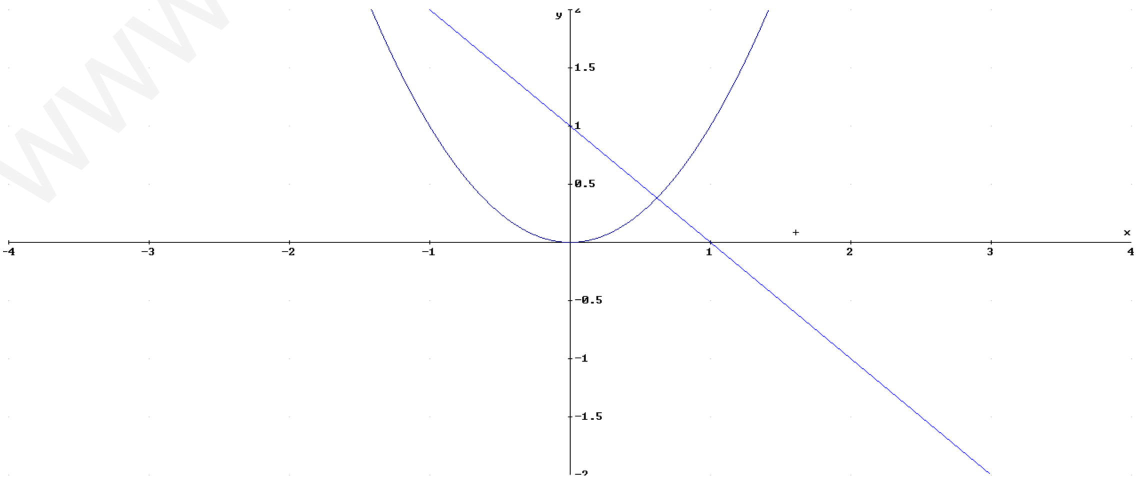
Ejemplo 3:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y = x^2 \\ (2)\ \ y + x = 1\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=1-x \quad \rightarrow \quad 1-x=x^2 \quad \rightarrow \quad x^2+x-1=0 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = 1 - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = 1 - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Soluciones (x=$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, y=$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$) (x=$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, y=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$)

Interpretación gráfica (y=x^2 es una parábola, y+x=1 una recta)



4. Inecuaciones lineales

Las inecuaciones son expresiones semejantes a las ecuaciones pero en vez de aparecer el signo = aparecen los signos $\leq, <, \geq, >$. Veamos diferentes tipos de inecuaciones

4.1. Inecuaciones lineales con una incógnita

Son expresiones de la forma (después de simplificar) de la forma:

$ax+b<c$, $ax+b>c$, $ax+b\leq c$ ó $ax+b\geq c$ siendo $a,b,c\in \mathbb{R}$ y $a\neq 0$

Para resolver la inecuación hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

a) Si un número está a un lado de la desigualdad y deseamos pasarla al otro lado pasará restando y al revés (igual que en las ecuaciones)

Ejemplo: $5x-2<6 \rightarrow 5x<6+2 \rightarrow 5x<8$

b) Si multiplicamos o dividimos la desigualdad por un número negativo entonces el signo $<$ o $\leq$ cambia a $>$ o $\geq$, y al revés. De esta forma si queremos despejar de x un número que le multiplica pasa dividiendo cambiando el sentido de la desigualdad si es un número negativo. Lo mismo pasa si está dividiendo

Ejemplos: $-3x<2 \rightarrow x>-2/3$

$-x/5\geq 2 \rightarrow x\leq -10$

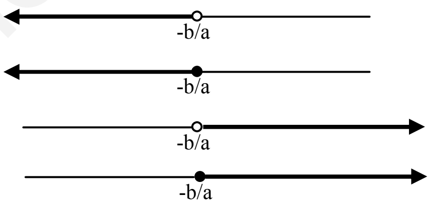
Despejando la x de la inecuación anterior tendremos las siguientes posibles expresiones:

$x<-b/a$ Solución$=(-\infty,-b/a)$

$x\leq -b/a$ Solución$=(-\infty,-b/a]$

$x>-b/a$ Solución$=(-b/a,\infty)$

$x\geq -b/a$ Solución$=[-b/a,\infty)$



Ejemplo: $3-5x< 8 \rightarrow -5x<8-3 \rightarrow -5x<5 \rightarrow x>-1$ $x\in(-1,\infty)$

Ejercicio 9. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2(x-2)+3x<5x+6$

b) $3x+7-5(2x-3)\geq(x-1)/2 -1$

c) $3\cdot(x-1)/2 - x > (x-3)/2$

Solución

a) $2x-4+3x<5x+6 \rightarrow 0x<10 \rightarrow 0<10$,que es cierto independientemente del valor de x, luego la solución es $x\in \mathbb{R}$

b) $3x+7-10x+15\geq(x-1)/2-1$, $-7x+22\geq(x-1)/2-1 \xrightarrow{mult\ por\ 2} -14x+44\geq x-1-2 \rightarrow$ $-15x\geq -47 \rightarrow x\leq\frac{47}{15}$, $x\in(-\infty,\frac{47}{15}]$

c) $\frac{3x-3}{2}-x>\frac{x-3}{2}\xrightarrow{mul\ por\ 2}3x-3-2x>x-3\rightarrow 0x>0\rightarrow 0>0$ No es cierto independientemente del valor de x, luego no hay soluciones S=∅

4.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

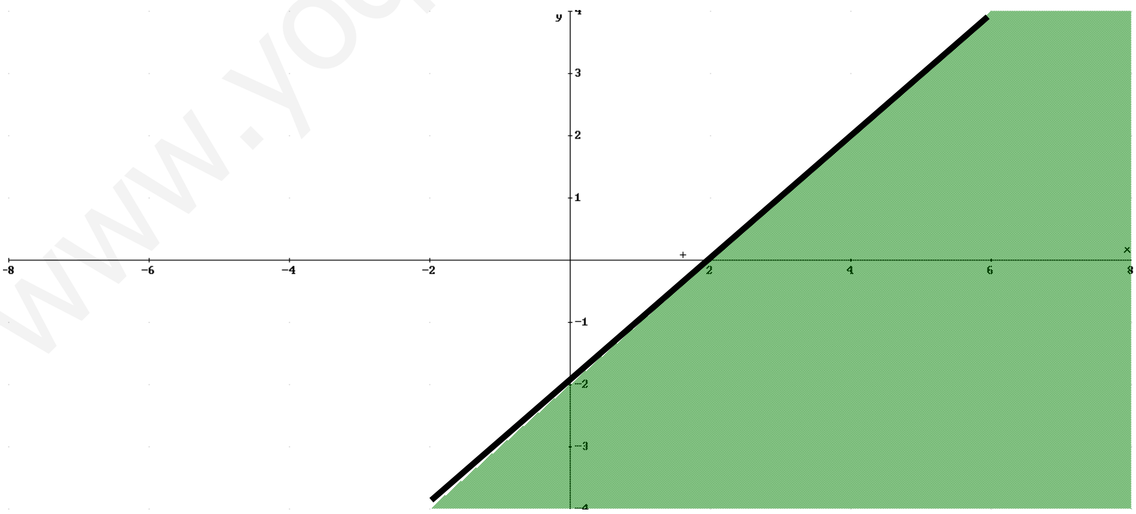
ax+by<c; ax+by>c; ax+by≤c ; ax+by≥c

Por lo general existen infinitos valores de parejas (x,y) que cumplen las soluciones a la inecuación lineal. Veremos las soluciones representadas en los ejes de coordenadas. Pasos a seguir para obtener las soluciones:

1. Representamos la recta determinada por ax+by=c. quedando dividido el plano en dos semiplanos (uno de ellos será la solución)
2. Tomamos un punto arbitrario con un valor de x e y. Si para estos valores de x y de y la inecuación es cierta, el semiplano que contiene el punto es la solución, sino es así es el otro semiplano
3. Si tenemos ≥ ó ≤ la recta será solución (que es la solución a la igualdad ax`by=c) si tenemos < ó > entonces la recta no será solución

Ejemplo:

x-y ≥ 2. representamos la recta y=x+2. Tomamos el punto (0,0) → 0-0 ≥2 que no cumple la inecuación, luego la solución es el semiplano que no contiene el origen. La recta es solución ya que el símbolo es ≥



Ejercicio 10. Resolver:

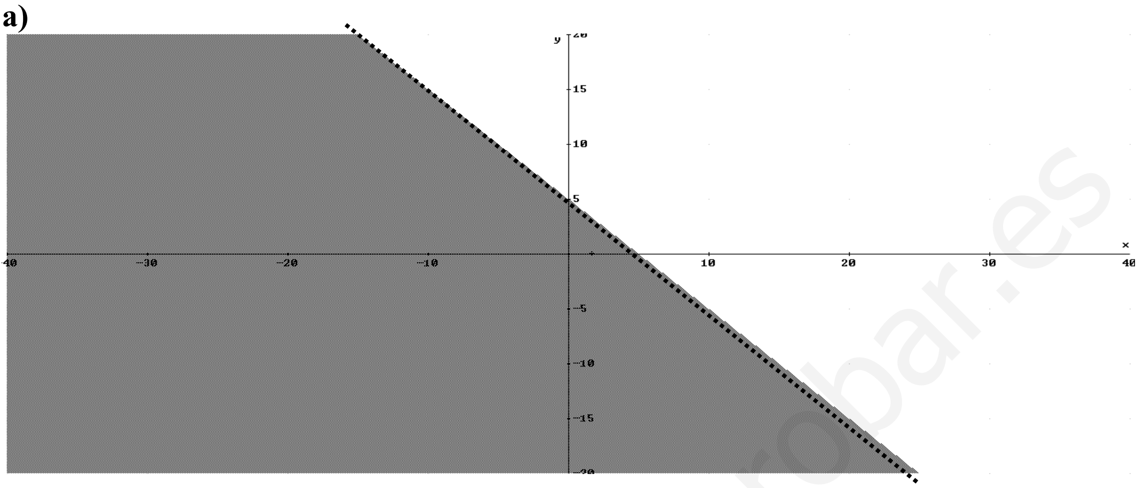
a) $x+y<5$

b) $x-y \leq 1$

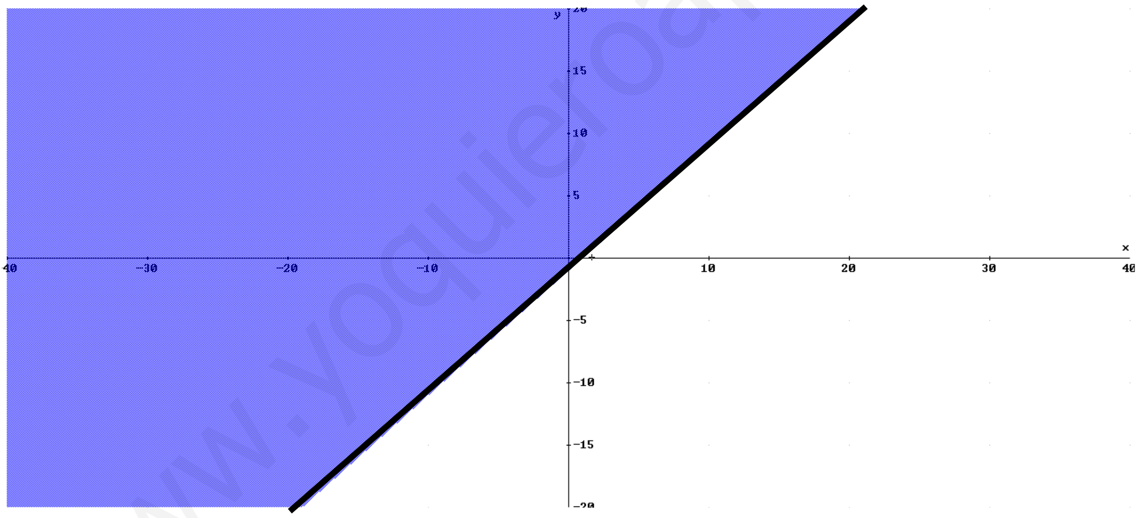
c) $2x-1/3 \geq x-y$

Solución

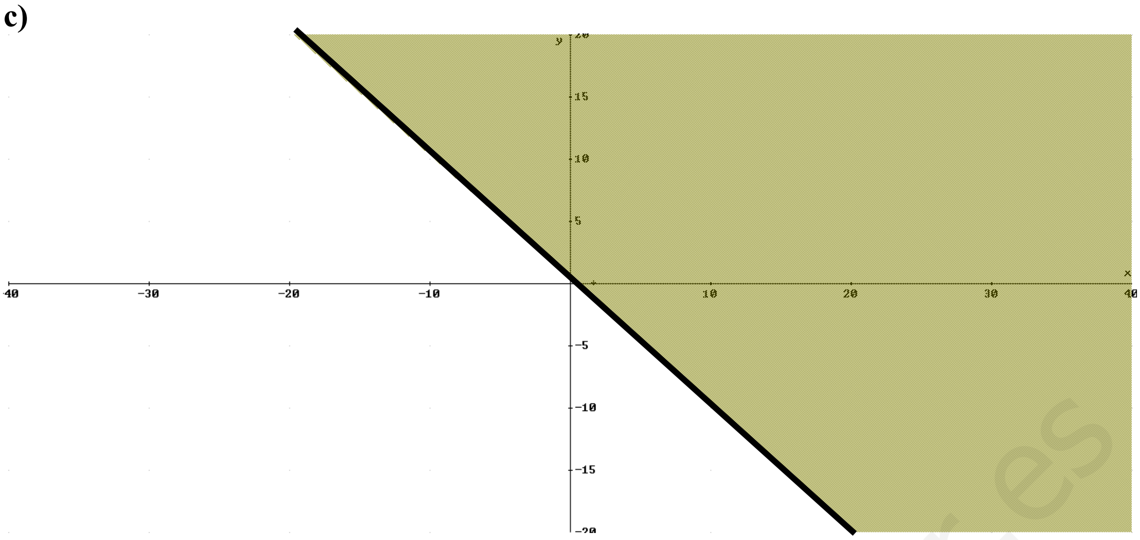
a)



b)



c)



4.3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Son expresiones que después de operar son de la forma:
$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\leq 0$; $ax^2+bx+c\geq 0$

Los pasos para la resolución de las inecuaciones son los siguientes:

1. Cálculo de las soluciones a la igualdad (raíces de ax^2+bx+c) que son x_1 y x_2
   a. Si son soluciones reales, factorizamos el polinomio $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$
      i. Dividimos la recta real en 3 intervalos(2 si es raíz doble) $(-\infty,x_1)$; (x_1,x_2) ; (x_2,∞). Estudiamos el signo en cada intervalo
      ii. Las soluciones son los intervalos que cumplen la desigualdad.
   b. Si no son reales entonces ax^2+bx+c no cambia de signo, por lo que o es siempre positivo si $c>0$ o negativo si $c<0$. Así las soluciones serán o todo R o el vacío.

Ejemplos:

a) $x^2+x-6\leq 0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}-3\\2\end{array}\right.$$

$x^2+x-6\leq 0 \rightarrow (x+3)(x-2)\leq 0$

	$(-\infty,-3)$	-3	(-3,2)	2	$(2,\infty)$
Signo(x+3)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+x-6)	+	0	-	0	+

Solución $x\in[-3,2]$

b) $x^2+1<0$

$x^2=-1 \rightarrow$ no solución real.

x^2+1 siempre es positivo, por ejemplo en x=0: $0^2+1=1>0$

No soluciones $S=\varnothing$

c) $x^2+1>0 \rightarrow x\in R$

Ejercicio 11. Resolver:

a) $x^2-6x+9>0$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0$

c) $(x-3)^2\geq 4$

d) $(2x-1)/5>3x^2/2$

Soluciones:

a) $(x-3)^2>0$

	$(-\infty,3)$	3	$(3,\infty)$
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x^2-6x+9)	+	0	+

Solución $\rightarrow x\in R-\{3\}$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0 \rightarrow -3(x-1/3)(x+2)\leq 0$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1/3)$	1/3	$(1/3,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-1/3)	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-
Signo(x^2+x-6)	-	0	+	0	-

Solución $\rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1/3,\infty)$

c) $(x-3)^2\geq 4 \rightarrow x^2-6x+5\geq 0 \rightarrow (x-5)\cdot(x-1) \geq 0$

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$

Signo(x-1)	-	0	+	+	+
Signo(x-5)	-	-	-	0	+
Signo(x^2-6x+5)	+	0	-	0	+

Solución → $x \in (-\infty,1] \cup [5,\infty)$

4.4. Inecuaciones polinómicas y fracciones algebraicas

4.4.1. Polinomios

En este apartado estudiaremos las inecuaciones del tipo:

$P(x)<0$, $P(x)>0$, $P(x)\leq 0$, $P(x)\geq 0$.

Resolución:

1. Factorizamos, obteniendo las raíces x_1, x_2, …,x_n
2. Estudiamos el signo en los intervalos $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2),…, (x_n,∞)
3. De los intervalos tomamos aquellos que solucionen la inecuación.

Ejemplo : $x^4+x^3+3x^2-11x-14\leq 0$; Factoriz→$(x+1)(x-2)(x^2+2x+7) \leq 0$.Raíces x=-1, x=2

	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,2)	2	$(2,\infty)$
Signo(x+1)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+2x+7)	+	+	+	+	+
Signo($x^4+x^3+3x^2-11x-14$)	+	0	-	0	+

Solución $x \in [-1,2]$

Ejercicio 12. Resuelve

1) $-x^3-2x^2+x+2>0$

2) $-3x^3-24x^2-21x\leq 0$

Solución:

1) $-x^3-2x^2+x+2=-(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)>0$. Raíces x=-2, -1,1

	$(-\infty,-2)$	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	-	-	0	+
-1	-	-	-	-	-	-	-

Signo($-x^3$-$2x^2$+x+2)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$

2) $-3x^3-24x^2-21x=-3\cdot x\cdot(x+7)\cdot(x+1)\leq 0$. Raíces x=-7,-1, 0

	$(-\infty,-7)$	-7	(-7,-1)	-1	(-1,0)	0	$(0,\infty)$
Signo(x+7)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x)	-	-	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3$-$2x^2$+x+2)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in[-7,-1]\cup[0,\infty)$

3) $x^3-2x^2\leq x \rightarrow x^3-2x^2-x\leq 0 \rightarrow x(x-1)^2\leq 0$

	$(-\infty,0)$	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x^3-$2x^2$-x)	-	0	+	0	+

Solución $x\in(-\infty,0]\cup\{1\}$

4.4.2. Inecuaciones de fracciones algebraicas

Las inecuaciones de fracciones algebraicas son expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0\ ;\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0;\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$$, siendo P(x) y Q(x) polinomios.

La forma de resolver estas inecuaciones es semejante a la de los polinomios. Los pasos son los siguientes:

1. Factorización de P(x) y de Q(x). Y simplificación de la fracción si coincide algún factor.
2. Estudiamos el signo en los intervalos comprendidos entre las raíces de P(x) y Q(X) que no han sido simplificadas

3. A partir de estudiar el signo de cada factor podemos determinar cuando la fracción algebraica es mayor, menor o igual que cero

Nota: cuidado con las raíces del polinomioQ(x), ya que en estos valores $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *no se anula, sino que no existe (dividir por cero)*

Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x^2+5x+6} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+3)} \leq 0$ → raíces son -3, -2, -1 y 1

	(-∞,-3)	-3	(-3,-2)	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
Sig(x+3)	-	0	+	+	+	+	+	+	+
Sig(x+2)	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Sig(x+1)	-	-	-	-	-	0	+	+	+
Sig(x-1)	-	-	-	-	-	-	-	0	+
Sig($\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}$)	+	No existe	-	No existe	+	0	-	0	+

Solución: x∈(-3,-2)∪[-1,1]

Ejercicio 13. Resolver las siguientes inecuaciones

a) $\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4} \geq 0 \rightarrow \frac{-(x-4)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \geq 0$ → raíces -2 y 4

	(-∞,-2)	-2	(-2,4)	4	(4,∞)
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-4)	-	-	-	0	+
Signo(-1)	-	-	-	-	-
Signo($\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4}$)	-	No existe	+	0	-

Solución x∈(-2,4]

b) $\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2+6x+10}{x(x-1)} \leq 0$ → raíces 0 y 1.

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo($2x^2$+6x+10)	+	+	+	+	+
Signo($\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x}$)	+	No existe	-	No existe	+

Solución x∈(0,1)

5. Sistemas lineales de inecuaciones

5.1. Una incógnita

Los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita son sistemas de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} (1)\ ax+b \leq 0 \\ (2)\ a'x+b' > 0 \end{array}\right\}$$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

La forma de resolver el sistema es el siguiente:

1. Obtenemos las soluciones de (1) y de (2), S_1 y S_2 respectivamente
2. Las soluciones del sistema tienen que ser de (1) y (2) luego es la intersección de sus soluciones $S=S_1 \cap S_2$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} (1)\ x+3>0 \\ (2)\ 3x-6 \geq 0 \end{array}\right\}$

S_1→ x>-3 S_1=(-3,∞)

S_2→ 3x≥6; x≥2 S_2=[2,∞)

Solución $S=S_1 \cap S_2$=[2,∞)

Ejercicio 14:

1. $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5-3x \geq 4x+13 \\ (2)\ 2x+7 < 5x+11\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow$ -8≥7x ; x≤(-8/7) S_1=(-∞, -8/7]

$S_2 \rightarrow$ -3x<4 ; x>-4/3 S_2=(-4/3,∞)

S=$S_1 \cap S_2$=(-4/3,-8/7]

2. $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5(x-3) \leq -2+x \\ (2)\ 3x > 2x+1 \\ (3)\ \ x < 3\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow$ 4x≤13; S_1=(-∞,13/4]

$S_2 \rightarrow$ x>1 ; S_2=(1,∞)

$S_3 \rightarrow$ x<3; S_3=(-∞,3)

S=$S_1 \cap S_2 \cap S_3$=(1,3)

5.2. Dos incógnitas

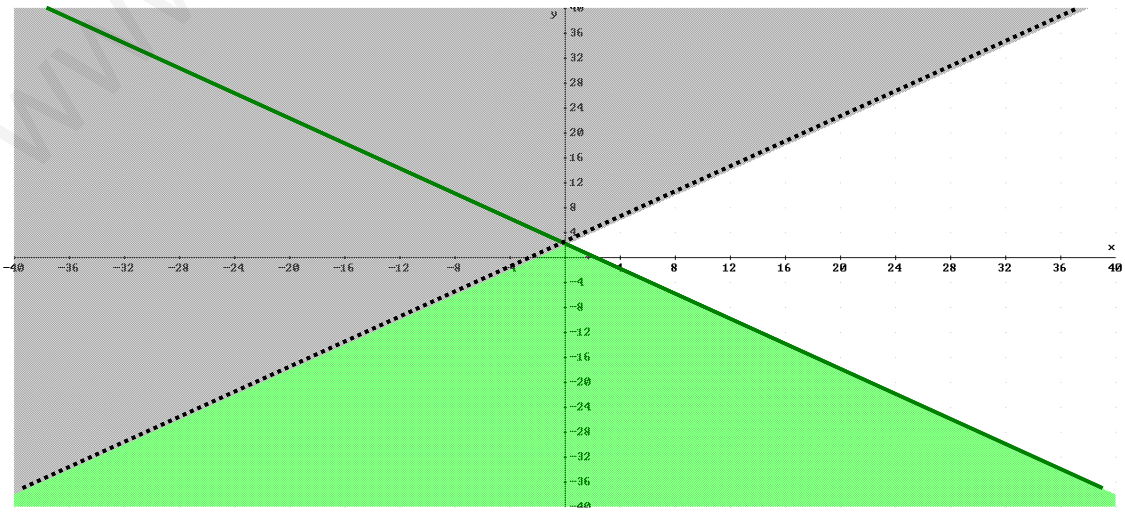
Son sistemas formados por dos o más inecuaciones con dos incógnitas (como los vistos en el apartado 4.2).

$\left.\begin{array}{l}(1)\quad ax+by \leq c \\ (2)\ a'x+b'y > c'\end{array}\right\}$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

Resolución de los sistemas:

1. Se representan en el plano cartesiano las soluciones de (1) y (2)
2. Las soluciones del sistema son la intersección de las soluciones a las dos inecuaciones

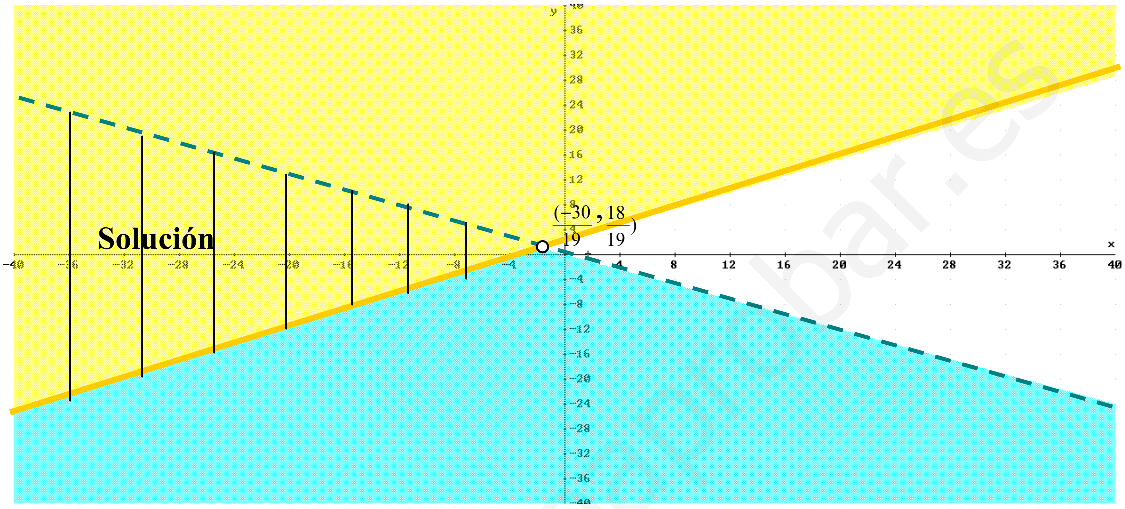
Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\qquad x+y \leq 2 \\ (2)\ -2x+2y > 4\end{array}\right\}$



Punto de corte, es la solución al sistema $\left.\begin{array}{l}(1) \quad x+y=2 \\ (2)\ -2x+2y=4\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=0, y=2

Ejercicio 15. Resolver

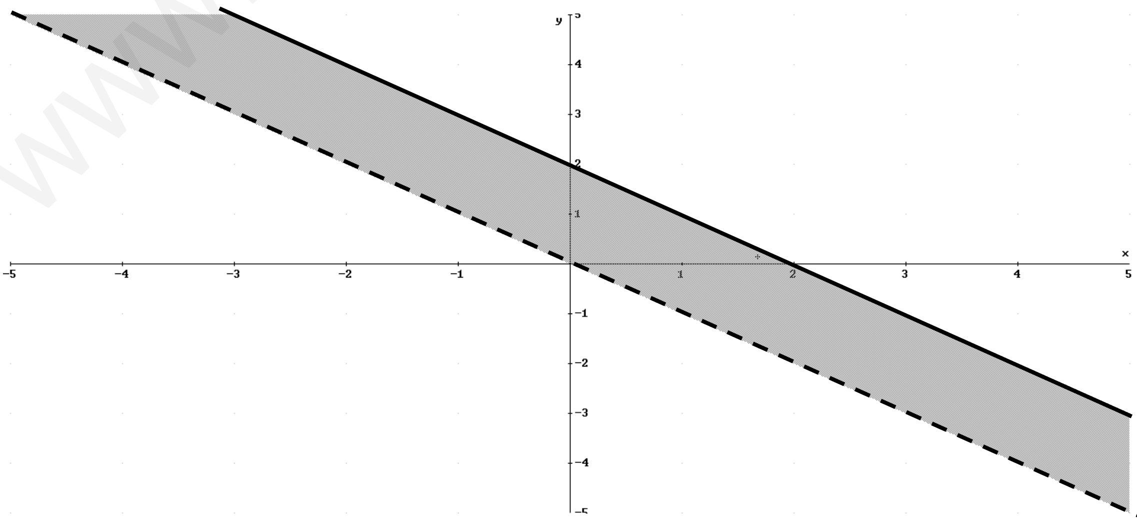
1) $\left.\begin{array}{l}(1) \quad 3x+5y<0 \\ (2)\ -2x+3y\geq 6\end{array}\right\}$



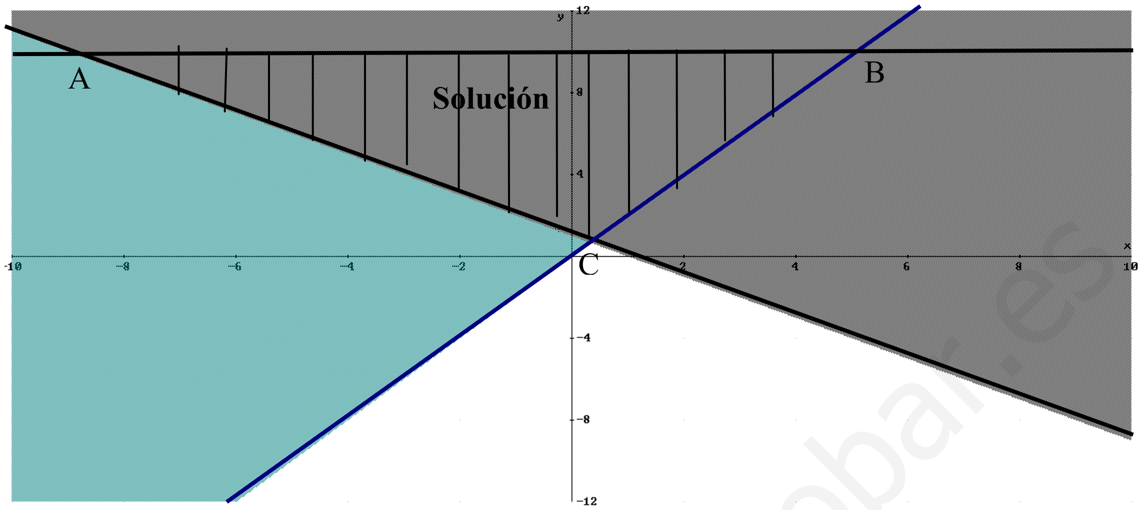
Puntos de corte es la solución del sistema $\left.\begin{array}{l}(1) \quad 3x+5y=0 \\ (2)\ -2x+3y=6\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=$\frac{-30}{19}$, y=$\frac{18}{19}$

2) $\left.\begin{array}{l}(1) \quad x+y>0 \\ (2)\ -3x-3y\geq -6\end{array}\right\}$

Son rectas paralelas y la solución es el espacio comprendido entre ambas rectas.
Veamos el dibujo



3) $\left.\begin{array}{l}(1)\,2x-y\le 0\\(2)\,x+y\ge 1\\(3)\,y\le 10\end{array}\right\}$



Calculemos A, B y C.

Cálculo de A: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\x+y=1\end{array}\right\}$ → (-9,10)

Cálculo de B: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\2x-y=0\end{array}\right\}$ → (5,10)

Cálculo de C: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\2x-y=0\end{array}\right\}$ → (1/3, 2/3)

Problemas finales.

Ejercicio 16. En una tienda venden un equipo de música y un ordenador. Mi hermana compro ambos el mes pasado y pago 2500 € por los dos. Ahora la tienda rebaja un 10% el equipo de música y un 15% el ordenador, siendo el precio total de ambos de 2157.5 €. ¿Cuál era el precio del equipo de música y del ordenador antes de las rebajas?

x= precio equipo de música

y= precio del ordenador

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2500 \\ 0.9x+0.85y=2157{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Resolviendo el sistema } x=650€,\ y=1850€$$

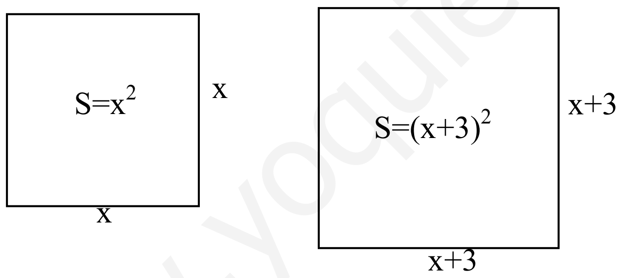
Ejercicio 17. En un examen tipo test hay 20 preguntas. Por cada pregunta acertada puntuamos 2 puntos y por cada pregunta fallada puntuamos -0.5 puntos; el aprobado esta en 20 puntos. Si respondemos a todas las preguntas ¿Cuántas preguntas hay que acertar para aprobar?

x= preguntas acertadas

(20-x)= preguntas erróneas

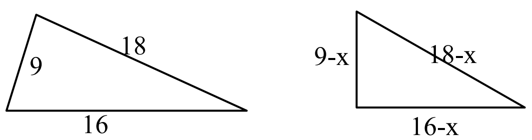
$$\left.\begin{array}{r} 2x-0{,}5\cdot(20-x)\geq 20 \\ x\leq 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 12 \\ x\leq 20 \end{array}\right\} \rightarrow x\in\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Ejercicio 18. Sea un cuadrado que cumple que al aumentar en 3m el lado su área aumenta en 75m². Calcular el lado del cuadrado original.



$x^2+75=(x+3)^2 \rightarrow x^2+75=x^2+6x+9 \rightarrow 6x=66 \rightarrow$ **x=11m**

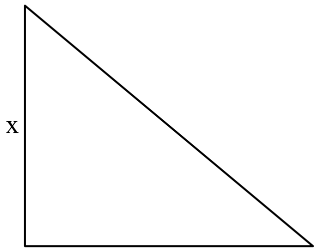
Ejercicio 19. Puede un triangulo de lados de 9cm, 16cm y 18cm. Comprueba que no es rectángulo. Puede convertirse en un triangulo rectángulo al quitarle la misma cantidad a sus tres lados. ¿Cuánto valen sus nuevos lados?



Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulos $\rightarrow (18-x)^2=(16-x)^2+(9-x)^2 \rightarrow$

$$x^2-14x+13=0 \rightarrow x=\begin{cases} 13 & no\ \ solución\ \ 9-13<0 \\ 1 & lados=8cm, 17cm, 15cm \end{cases}$$

Ejercicio 20. Calcular las dimensiones de un triangulo rectángulo isósceles de perímetro 24 cm.



hip=$\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$

perímetro=2x+$\sqrt{2}x$=24 cm

→

x

x=$\dfrac{24}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{24(2-\sqrt{2})}{2}=(24-12\sqrt{2})cm$

Ejercicio 21. Calcular el tiempo que se tarda en llenar un cubo por dos grifos si se sabe que el segundo tarda el doble en llenarlo que el primero, y que cuando están los dos llenándolo tarda 3 minutos.

t=tiempo llenar un cubo 1er grifo.
2t= tiempo llenar un cubo 2º grifo.
Capacidad cubo=c
Velocidad 1ergrifo=c/t
Velocidad 2ºgrifo=c/2t
Velocidad dos grifos= c/t+c/2t=3c/2t

Capacidad del cubo $c=v_{dos\ grifos}\cdot 3\min \rightarrow c=\dfrac{3c}{2t}\cdot 3\rightarrow 1=\dfrac{9}{2t}\rightarrow t=9/2=4{,}5\min$

Tiempo llenar un cubo 1er grifo→4,5min
Tiempo llenar un cubo 2º grifo→9min

Ejercicio 22. Calcular la velocidad media de un coche que en la ida de un viaje entre las ciudades A y B va a una velocidad media de 60km/h y a la vuelta de 40km/h.

Coche de A→B v=60km/h → $t_{A\rightarrow B}$=d/v=d/60
Coche de B→A v=40km/h → $t_{B\rightarrow A}$=d/v=d/40

t_{total}=(d/60+d/40) → $v_{media}=\dfrac{2d}{\frac{d}{60}+\frac{d}{40}}=\dfrac{2}{\frac{100}{240}}=48km/h$