Ejercicio nº 1.- Representa la siguiente función:

$$y=(x+2)^2-3$$

a) Halla las coordenadas del vértice, e indica si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Calcula los puntos de corte con el eje X, expresando el resultado en forma de radical simplificado y, también, de forma aproximada.

c) Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[-2,0]$.

d) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si se trata de una función cóncava o convexa.

2,5 puntos

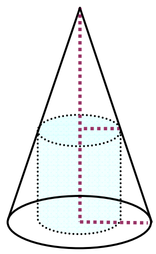
Ejercicio nº 2.- Haz una tabla de valores para representar la función $y=\dfrac{3}{x-2}+1$, indicando previamente el nombre de su gráfica, su dominio de definición y las ecuaciones de sus asíntotas. Indica, también, el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x-2}+1\right) \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x-2}+1\right) \qquad \lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}+1\right) \qquad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{3}{x-2}+1\right)$$

2 puntos

Ejercicio nº 3.- Se tiene un cilindro inscrito en un cono como se indica en la figura. Sabiendo que la altura del cono es $H=24$ cm, el radio del cono es $R=10$ cm; y que el radio del cilindro mide $r=4$ cm, halla el volumen del cilindro y la superficie lateral del cono.

2 puntos



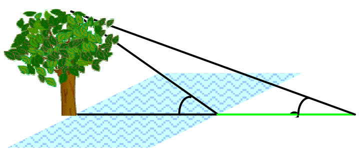
Ejercicio nº 4.- Una finca tiene forma triangular. Sus dimensiones son 700 m, 701 m y 702 m. Calcula los metros cuadrados de terreno que tiene.

1,5 puntos

Ejercicio nº 5.- Sabiendo que β es un ángulo del primer cuadrante cuya tangente vale 1/4, calcula $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$ utilizando las relaciones fundamentales de trigonometría.

1,5 puntos

Ejercicio nº 6.- Se quiere medir la anchura de un río, para ello se observa un árbol que está justo al borde de la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la copa del árbol y se obtienen 53°. Alejándose 30 m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 35°. Calcula la anchura del río.



2 puntos

Nota importante: *Elegid un ejercicio entre el 4 y el 5. El resto son obligatorios.*

SOLUCIONES

E.1. Representa la siguiente función $y=(x+2)^2-3$

a) Halla las coordenadas del vértice, e indica si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) Calcula los puntos de corte con el eje X, expresando el resultado en forma de radical simplificado y, también, de forma aproximada.

c) Calcula la tasa de variación media en el intervalo $\left[-2,0\right]$.

d) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si se trata de una función cóncava o convexa.

$y=(x+2)^2-3 \Rightarrow y=x^2+4x+4-3 \Rightarrow \boxed{y=x^2+4x+1}$

a) Vértice

Aplicamos la fórmula para la primera coordenada: $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$, y sustituimos en la función para conseguir su segunda coordenada: $y_0=(-2)^2+4\cdot(-2)+1=-3$. Ya tenemos el vértice: $V(-2,-3)$.

Como $a=1>0$, la parábola tiene las ramas hacia arriba $\Rightarrow$ se trata de un mínimo.

(0,5 puntos)

b) Puntos de corte con el eje X

Son las soluciones de la ecuación $x^2+4x+1=0$. Resolvámosla:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}\approx\begin{cases}-0{,}268\\-3{,}732\end{cases}.$$

(0,5 puntos)

c) Tasa de variación media

$$T.V.M.[-2,0]=\frac{y(0)-y(-2)}{0-(-2)}=\frac{1-(-3)}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

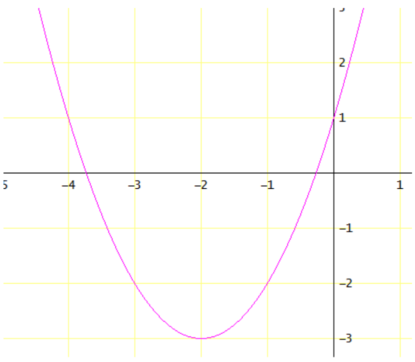
(0,5 puntos)

d) Procedemos a representarla:

Tabla

x	y	
-2	-3	Mínimo
-1	-2	
-3	-2	
0	1	
-4	1	

Gráfica



(0,5 puntos)

$y=(x+2)^2-3$

Ahora resulta sencillo decidir:

- La función es decreciente cuando $x\in(-\infty,-2)$.
- La función es creciente cuando $x\in(-2,+\infty)$.
- La función es cóncava pues tiene las ramas hacia arriba. (0,5 puntos)

E.2. Haz una tabla de valores para representar la función $y=\dfrac{3}{x-2}+1$, indicando previamente el nombre de su gráfica, su dominio de definición y las ecuaciones de sus asíntotas. Indica, también, el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x-2}+1\right), \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x-2}+1\right), \qquad \lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}+1\right), \qquad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{3}{x-2}+1\right)$$

Se trata de una función de proporcionalidad inversa por lo que su gráfica es una hipérbola. (0,25 puntos)

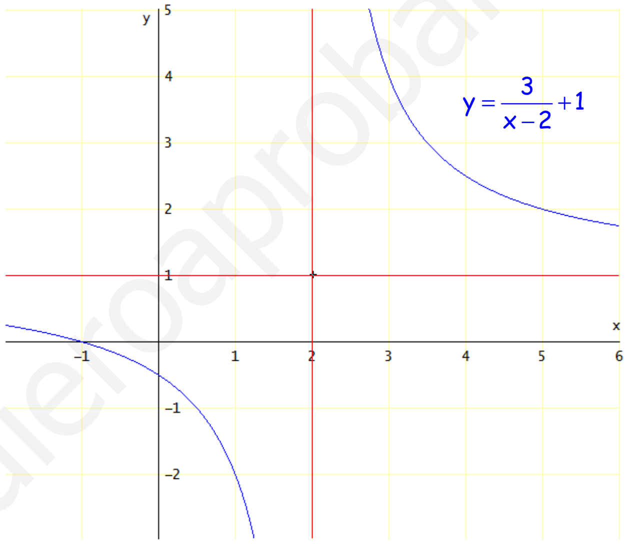
Su dominio de definición es $\text{Dom } f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-2\neq0\}=\mathbb{R}-\{2\}$. (0,25 puntos)

Tiene una asíntota vertical de ecuación $A.V.\to x=2$ y una asíntota horizontal cuya ecuación es $A.H.\to y=1$. (0,25 puntos)

Tabla de valores

x	y
1	-
0	-1/2
-1	0
3	4
4	5/2
5	2

Gráfica



(0,75 puntos)

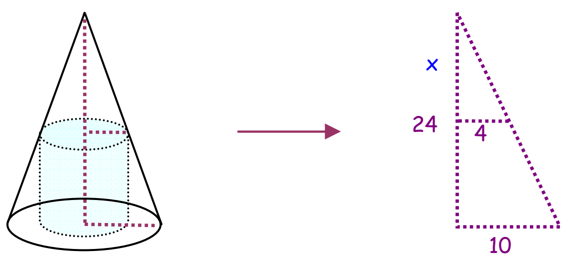
Ya sólo queda analizar la tendencia de la función en sus extremos y su comportamiento alrededor de $x=2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x-2}+1\right)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x-2}+1\right)=1 \qquad \lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}+1\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{3}{x-2}+1\right)=+\infty$$

(0,5 puntos)

E.3. Se tiene un cilindro inscrito en un cono como se indica en la figura. Sabiendo que la altura del cono es $H=24$ cm, el radio del cono es $R=10$ cm; y que el radio del cilindro mide $r=4$ cm, halla el volumen del cilindro y la superficie lateral del cono.

En la figura se aprecian dos triángulos rectángulos semejantes por tener un ángulo común y los lados opuestos paralelos.



Establecemos una proporción entre sus lados para conseguir la altura del cilindro, h:

$$\frac{x}{24}=\frac{4}{10}\Rightarrow x=\frac{24\cdot4}{10}=9{,}6\text{ cm}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow h=24-9{,}6=14{,}4\text{ cm}.$$

Ahora podemos calcular su volumen:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 14{,}4 = 230{,}4 \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 723{,}82 \text{ cm}^3$$

(1 punto)

Para calcular el área lateral del cono necesitamos calcular la generatriz, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo grande. Aplicando el T$^{\underline{ma}}$ de Pitágoras se obtiene:

$$g^2 = 24^2 + 10^2 \Rightarrow g = \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = 26 \text{ cm} \Rightarrow$$

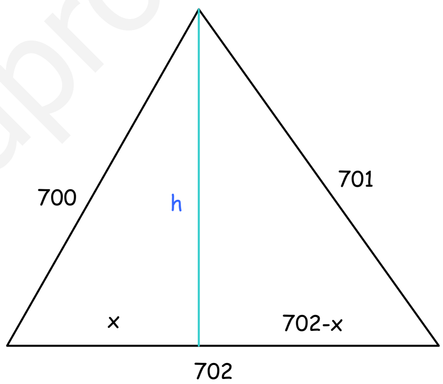
$$\Rightarrow S_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 816{,}81 \text{ cm}^2.$$

(1 punto)

E.4. Una finca tiene forma triangular. Sus dimensiones son 700 m, 701 m y 702 m. Calcula los metros cuadrados de terreno que tiene.

Para conseguir su superficie necesitamos conocer la altura sobre uno de sus lados. Al trazarla conseguimos dos triángulos rectángulos sobre los que aplicamos el T$^{\underline{ma}}$ de Pitágoras:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 700^2 \\ h^2 + (702-x)^2 = 701^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = 700^2 - x^2 \quad ^{(*)} \\ h^2 = 701^2 - (702-x)^2 \end{cases}$$



Igualando h^2 se obtiene:

$$490000 - x^2 = 491401 - 492804 + 1404x - x^2 \Rightarrow$$

$$1404x = 491403 \Rightarrow x = \frac{491403}{1404} \approx 350.$$

Sustituimos en $^{(*)}$:

$$h^2 = 700^2 - 350^2 \Rightarrow h = \sqrt{367500} \approx 606{,}22.$$

Determinamos la superficie de la finca:

$$S = \frac{702 \cdot 606{,}22}{2} = 212783{,}22 \text{ m}^2.$$ (1,5 puntos)

E.5. Sabiendo que β es un ángulo del primer cuadrante cuya tangente vale 1/4, calcula $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$ utilizando las relaciones fundamentales de trigonometría.

Con las dos relaciones fundamentales de trigonometría planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

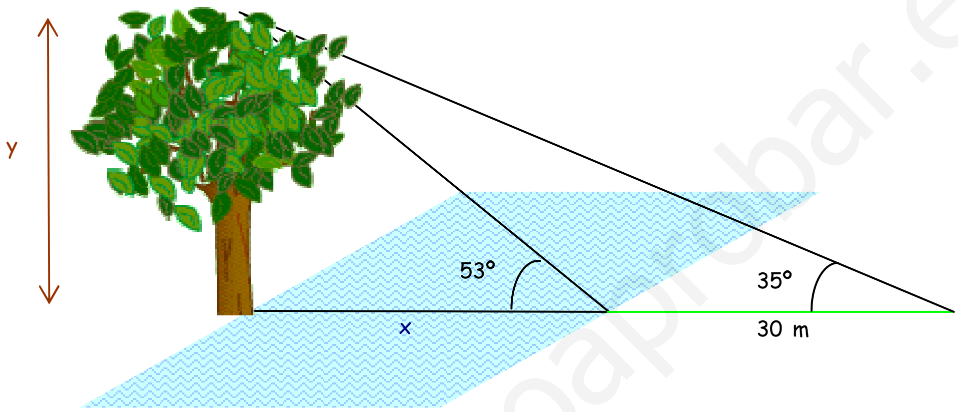
Despejamos $\cos\beta$ en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\boxed{\cos\beta = 4 \cdot \operatorname{sen}\beta}^{(*)} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\beta + (4 \cdot \operatorname{sen}\beta)^2 = 1 \Rightarrow 17 \cdot \operatorname{sen}^2\beta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Sustituimos este valor en (*) y obtenemos $\cos\beta = \dfrac{4\cdot\sqrt{17}}{17}$. (1,5 puntos)

E.6. Se quiere medir la anchura de un río, para ello se observa un árbol que está justo al borde de la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la copa del árbol y se obtienen 53°. Alejándose 30 m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 35°. Calcula la anchura del río.

Llamamos **x** a la anchura del río, e **y** a la altura del árbol, y planteamos un sistemas de ecuaciones utilizando la definición de tangente de un ángulo:



$$\begin{cases} \text{tg } 53° = \dfrac{y}{x} \\ \text{tg } 35° = \dfrac{y}{x+30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x\cdot \text{tg } 53° \\ y = (x+30)\cdot \text{tg } 35° \end{cases} \overset{\text{Igualación}}{\Rightarrow} x\cdot \text{tg } 53° = (x+30)\cdot \text{tg } 35° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot \text{tg } 53° - x\cdot \text{tg } 35° = 30\cdot \text{tg } 35° \Rightarrow x\cdot(\text{tg } 53° - \text{tg } 35°) = 30\cdot \text{tg } 35° \Rightarrow$$

$$x = \dfrac{30\cdot \text{tg } 35°}{\text{tg } 53° - \text{tg } 35°} \approx 33{,}51 \text{ m}.$$ (2 puntos)