

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES

1.1	Clasificación de los números	pag 3
1.2	Operaciones con números naturales y enteros	pag 4
1.3	Los números racionales	pag 5
1.4	Los números reales	pag 7

TEMA 2: POLINOMIOS

2.1	Monomios. Operaciones con monomios	pag 8
2.2	Polinomios. Operaciones con polinomios	pag 9
2.3	Factor común. Igualdades notables	pag 10
2.4	Fracciones algebraicas	pag 11

TEMA 3: ECUACIONES

3.1	Ecuaciones de primer grado	pag 12
3.2	Ecuaciones de segundo grado	pag 13
3.3	Otras ecuaciones	pag 14
3.4	Problemas de ecuaciones	pag 15

TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES

4.1	Sistemas de ecuaciones	pag 19
4.2	Problemas	pag 22

TEMA 5: PROPORCIONALIDAD

5.1	Proporcionalidad directa	pag 23
5.2	Proporcionalidad inversa	pag 25
5.3	Repartos proporcionales	pag 26
5.4	Problemas de porcentajes	

TEMA 6: PROGRESIONES

6.1	Sucesiones	pag 29
6.2	Progresiones aritméticas	pag 29
6.3	Progresiones geométricas	pag 31
6.3	Problemas de progresiones	pag 32

TEMA 7: FUNCIONES

7.1	Características de una función	pag 35
7.2	Funciones lineales y afines	pag 40

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES

1.1 Clasificación de los números:

1. **Completa los espacios con los conjuntos de números que se muestran a continuación y escribe dos números que pertenezcan a cada uno de ellos:** (Recuerda que “ \subset ” significa “estar incluido en”)

Naturales (N) – Racionales (Q) – Enteros (Z) – Irracionales (I) – Reales (R)

$$\begin{array}{c} _ \subset _ \subset _ \\ _ \end{array} \} \subset _$$

2. **Completa la siguiente tabla con las palabras SI o NO según sea el caso:**

	Naturales (N)	Enteros (Z)	Racionales (Q)	Irracionales (I)	Reales (R)
- 1					
$\frac{2}{3}$					
15					
π					
$-\frac{1}{2}$					
$3.3\hat{4}$					
$\frac{4}{2}$					
-1.2					
$\sqrt{3}$					

3. **Escribe, si es posible, un ejemplo para cada uno de los casos siguientes:**

- Un número real:
- Un número entero que no sea natural:
- Un número racional que no sea entero:
- Un número que sea natural, entero, racional y real:
- Un número que sea racional e irracional:
- Un número que sea irracional pero no racional:
- Un número que sea natural pero que no sea entero:
- Un número que no sea real:

4. **Busca dos números, uno racional y otro irracional, comprendidos entre 1 y 2.**

1.2 Operaciones con números naturales y enteros:

5. Realiza las operaciones indicadas, aplicando las reglas de prioridad de operaciones y la regla de los signos:

- a. $2 + 3 - 6 : 3 \cdot 2 - 2 + 4 \cdot 3 : 2 =$ {Sol: 5}
- b. $2 \cdot 6 + 5 - 2(1 - 3 \cdot 4) =$ {Sol: 39}
- c. $(-3) \cdot (-2) + 2[5 - (-12) : -(-2)^2] =$ {Sol: 10}
- d. $12 : 2 \cdot 4 - 3 + 8 =$ {Sol: 29}
- e. $(9 : 3 + 7) : (5 - 3) =$ {Sol: 5}
- f. $20 - 4[(6 - 2) : 2 + 3] =$ {Sol: 0}
- g. $(3 - 4) - 3(2^2 - 12 : 2) =$ {Sol: 5}
- h. $2 \cdot (-5) - (-10) =$ {Sol: 0}
- i. $|2 - 4| =$ {Sol: 2}
- j. $3 - 1 - 2 =$ {Sol: 0}
- k. $(-2)^2 : (-2) + 2 =$ {Sol: 0}
- l. $-6 + (-2) \cdot 5 - (3 - 12) \cdot 2 =$ {Sol: 2}
- m. $56 : 8 - 39 : 13 + 2(24 - 13) =$ {Sol: 26}
- n. $277 - (8 - 9 \cdot 7) =$ {Sol: 332}
- o. $[-12 - 13 \cdot (4 - 7)] : 3 =$ {Sol: 9}

6. Realiza la descomposición factorial de los siguientes números y a continuación escribe debajo de cada pareja de números su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor:

	20 =	40 =	70 =	340 =	5632 =
	12 =	15 =	42 =	210 =	132 =
m.c.m					
m.c.d					

7. En una granja hay 24 gallos y 108 gallinas. Si se desea repartirlos, sin mezclarlos, en el menor número posible de jaulas, ¿cuántos animales pondremos en cada una para que todas tengan la misma cantidad?
{Sol: 12 jaulas en las cuales meteremos dos gallos y nueve gallinas }

8. Dos aviones comerciales han salido hoy desde el mismo aeropuerto ¿cuántos días tardarán en volver a coincidir saliendo del mismo aeropuerto si el primero sale cada 12 días y el segundo, cada 45?
{Sol: 180 días tardarán en volver a coincidir}

1.3 Los números racionales

9. Escribe como una potencia única:

a. $5^3 \cdot 5^{-2} \cdot 5^4 =$

b. $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4 =$

c. $[(4)^{-3}]^2 =$

d. $\frac{3^4}{9^{-2}} =$

10. Calcula:

a. $\frac{9}{5} - \frac{61}{75} - \frac{12}{15} + \frac{13}{21} =$ {Sol: $\frac{141}{175}$ }

b. $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{5}{7} =$ {Sol: $\frac{9}{56}$ }

c. $2 - 2\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) =$ {Sol: $\frac{1}{5}$ }

d. $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 2\right) \cdot \left(2 - \frac{7}{8}\right) =$ {Sol: $\frac{21}{10}$ }

e. $\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{4}{7} - \frac{7}{3} : 5\right) =$ {Sol: $\frac{91}{44}$ }

f. $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{4} : \frac{5}{6} =$ {Sol: $\frac{39}{10}$ }

g. $\frac{\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{14}\right)}{3 - \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2}} =$ {Sol: $\frac{15}{14}$ }

h. $\frac{\frac{8}{3} : \frac{30}{15} \cdot 5}{5 - \frac{1}{3} \cdot 8} =$ {Sol: $\frac{20}{7}$ }

i. $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5}{\left(\frac{9}{49}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4} =$ {Sol: $\frac{7}{3}$ }

j. $2^{-6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ {Sol: $\frac{1}{128}$ }

k. $(-5)^2 + (-5)^{-3} \cdot 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} =$ {Sol: $\frac{499}{25}$ }

l. $\frac{(-4)^2 \cdot (-4)^{-3} \cdot (-4)^2}{2^3 \cdot (-2)^{-3}} =$ {Sol: 4}

11. Un concurso literario tiene una dotación presupuestaria de 3000 € y otorga las dos quintas partes al primer premio; de lo que queda, da tres quintas partes para el segundo premio y hay otros dos terceros premios que se reparten el resto a partes iguales. ¿Qué cantidad recibe cada uno de los cuatro finalistas?

{Sol: 1200€ el primero, 1080€ el segundo y 360€ cada uno de los terceros}

12. He gastado la sexta parte del dinero que tenía en comprar un libro y las cinco séptimas partes de lo que me quedaba en comer. Si ahora me quedan 10 € ¿Cuánto dinero tenía al principio?

{Sol: tenía 42€ }

13. Resuelve las siguientes operaciones. Al finalizar coloca la letra correspondiente con su solución y descubre la palabra escondida:

a. $\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{5}\right]+\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)+2\right]\cdot 2^{-3} = \mathbf{A}$

b. $\frac{1}{3}+\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{9}\right)\right]:\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2 = \mathbf{D}$

c. $\left[\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\right):\frac{2}{6}+\frac{1}{5}\cdot\left(2-\frac{3}{5}\right)\right]:\left(1+\frac{3}{2}\right)^2 = \mathbf{E}$

d. $4+\left[\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{4}+\left(\frac{8}{3}-2\right)\cdot 5\right]\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 = \mathbf{S}$

e. $5^0+\frac{1}{3}\cdot\left[\left(3-\frac{1}{5}\right)\cdot 5^{-2}+2\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)^3\right]:\frac{4}{3} = \mathbf{S}$

f. $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left[4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+5^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]\cdot\frac{1}{4}} = \mathbf{A}$

g. $\frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{5}\right)+2}{2^3+\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)^2} = \mathbf{N}$

h. $\frac{\frac{19}{20}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)^2} = \mathbf{C}$

Ahora coloca la letra correspondiente a cada solución y descubre la palabra escondida:

$\frac{185}{24}$	$\frac{208}{625}$	$\frac{501}{4}$	$\frac{90}{391}$	$\frac{127}{48}$	$\frac{363}{1468}$	$\frac{142}{125}$	$\frac{231}{17}$

1.4 Los números reales

14. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor y después sitúalas en la

recta real: $-\frac{3}{4}$; $\frac{5}{23}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{8}$

15. ¿Cuál de las siguientes series contiene sólo números irracionales?

a. $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$

c. $\sqrt{2}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{4}$

b. $\sqrt{2}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}$

d. $\sqrt{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$

16. Resuelve las siguientes operaciones transformando los números decimales en fracciones y simplifica el resultado:

a. $3.4 + 5.\overline{97} - 0.\overline{28} =$

{Sol: $\frac{1501}{165}$ }

b. $6.3\hat{8} : 3.2\hat{7} =$

{Sol: $\frac{115}{59}$ }

c. $\frac{1 - 0.\hat{3}}{1.\hat{9} + 2.\hat{3}} =$

{Sol: $\frac{2}{13}$ }

17. Ordena de mayor a menor los siguientes números reales y a continuación dibújalos en la recta real: $-7.98 \cdot 10^{-5}$; $(5 \cdot 10^{-2})^2$; $(-0.83 \cdot 10^{-2})^3$; 0.05 ; $(0.75)^2$

18. Halla el valor de las siguientes raíces, expresando el resultado en forma de número entero o de fracción irreducible:

a. $\sqrt{144} =$

e. $\sqrt{361} =$

i. $\sqrt[3]{343} =$

b. $\sqrt{441} =$

f. $\sqrt{961} =$

j. $\sqrt[3]{1331} =$

c. $\sqrt{\frac{25}{81}} =$

g. $\sqrt{\frac{289}{196}} =$

k. $\sqrt[3]{\frac{125}{729}} =$

d. $\sqrt{\frac{49}{64}} =$

h. $\sqrt{\frac{1681}{169}} =$

l. $\sqrt[3]{-\frac{2197}{27}} =$

19. Escribe como una única potencia positiva de 3 y calcula el valor de las siguientes expresiones:

a. $\frac{27^2 \cdot 3^2}{9^2} =$

b. $\left[\left(\frac{9^3 \cdot 27^0 \cdot 243}{729^2} \right)^2 \right]^{-2} =$

c. $\frac{[(3^{-3} \cdot 9)^3]^2}{27^{-2}} =$

{Sol: a) 81; b) 81; c) 1}

TEMA 2: POLINOMIOS

2.1 Monomios. Operaciones con monomios

1. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a. $2x^3 - 3x^3 + 5x^3 =$

b. $2x^3 \cdot 4x^2 =$

c. $4x^5 : 2x^3 =$

d. $12x^2yz^3 : 3xyz^2 =$

2. Asocia a cada frase la expresión algebraica correspondiente:

- | | |
|---|-------------------------|
| a) Elevar un número al cuadrado y añadirle una unidad. | 1) $x \cdot y + z$ |
| b) Hallar el cuadrado de restar a un número dos unidades. | 2) $x^2 + \frac{1}{2}x$ |
| c) Añadir una cantidad al producto de dos números. | 3) $x^2 + 1$ |
| d) Calcular el producto de dos números consecutivos. | 4) $2 \frac{x}{y}$ |
| e) Sumar al cuadrado de un número su mitad. | 5) $(x - 2)^2$ |
| f) Obtener el doble del cociente de dos números. | 6) $x \cdot (x + 1)$ |

3. Indica el grado de los siguientes monomios:

a. $2x \cdot 3x^2$

b. $5x^3 \cdot y^2$

c. $\frac{2x^2y^3z^4}{3xyz^2}$

d. $\frac{xy^2}{x^2z}$

4. Completa la tabla con los valores numéricos de los siguientes monomios para los valores que se indican de sus incógnitas (utiliza solamente el valor de las incógnitas que necesites):

	$2x^3$	$3x^2$	y^4	$5xy$	$4x^2y^3$
$x = 1; y = 2$					
$x = 2; y = 1$					
$x = 3; y = -2$					
$x = -1; y = 3$					
$x = -2; y = -1$					
$x = -2; y = -3$					

2.2 Polinomios. Operaciones con polinomios:

1. Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$:

a. $A(x) = x^2 - 3x$; $\begin{cases} A(-1) = \underline{\hspace{2cm}} \\ A(0) = \underline{\hspace{2cm}} \\ A(1) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

b. $B(x) = x^3 + 2$; $\begin{cases} B(-1) = \underline{\hspace{2cm}} \\ B(0) = \underline{\hspace{2cm}} \\ B(1) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

c. $C(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$; $\begin{cases} C(-1) = \underline{\hspace{2cm}} \\ C(0) = \underline{\hspace{2cm}} \\ C(1) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

d. $D(x) = 2x^4 - 6x^2 - 5x + 1$; $\begin{cases} D(-1) = \underline{\hspace{2cm}} \\ D(0) = \underline{\hspace{2cm}} \\ D(1) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

2. Dados los polinomios $P(x) = x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = 5x - 1$, efectúa las operaciones siguientes:

a. $P(x) + Q(x) =$

b. $P(x) \cdot Q(x) =$

3. Opera y reduce términos semejantes:

a. $2x(3x^2 - 2x + 1) - x^2(2x + 3) =$

b. $-3[(x + 2)(x - 1) - x^2 + 1] + 3(x - 1) =$

c. $3(x - 1)(x + 2)(x - 2) =$

d. $(x^2 - 1)(x + 2) =$

e. $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1) =$

4. Dados los polinomios $P(x) = 12x$; $Q(x) = x^2 + 1$; $R(x) = 2x - 3$ y $S(x) = x^2 - x + 1$, halla:

a. $P(x) + 2Q(x) =$

c. $[Q(x)]^2 - P(x) \cdot R(x) =$

b. $P(x) \cdot R(x) - 5S(x) =$

d. $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) \cdot S(x) =$

5. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a. $3x^2 - 4x - 5 : x - 2 =$

c. $2x^4 - 4x^2 + 3x + 2 : x^2 + x + 2 =$

b. $4x^3 + 6x^2 - 2x + 5 : 2x - 3 =$

d. $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 5x + 12 : x^2 - 1 =$

10. Opera y simplifica la expresión resultante:

- a. $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2 =$
b. $5(x - 3) + 2(y - 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8 =$
c. $15 \cdot \left[\frac{2(x - 3)}{3} - \frac{4(y - x)}{5} + \frac{x + 2}{15} - 7 \right] =$
d. $x + \frac{2x - 3}{9} + \frac{x - 1}{3} - \frac{12x + 4}{9} =$
e. $\frac{3(x + 2)}{4} + \frac{3x + 5}{2} - \frac{5(4x + 1)}{6} + \frac{25}{12} =$
f. $\frac{x}{3} - \frac{x - 1}{2} - \frac{x - 13}{9} =$

2.3 Factor común. Igualdades notables

11. Extrae factor común en cada expresión:

- a. $5x^2 - 15x^3 + 25x^4 =$
b. $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15} =$
c. $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3 =$
d. $2x^2y - 5x^3y(2y - 3) =$
e. $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3) =$
f. $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3 =$
g. $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1) =$

12. Aplicando la igualdad notable correspondiente, desarrolla:

- a. $(x + 4)^2 =$
b. $(2x - 5)^2 =$
c. $(x + 1) \cdot (x - 1) =$
d. $(1 - 6x)^2 =$
e. $(2x + 3) \cdot (2x - 3) =$
f. $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 =$
g. $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) =$
h. $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 =$
i. $(ax + b)^2 =$
j. $(ax + b) \cdot (ax - b) =$

13. Expresa en forma de producto:

- a. $x^2 - 4 =$
b. $x^2 + 16 + 8x =$
c. $x^2 + 1 - 2x =$
d. $4x^2 + 25 - 20x =$
e. $4x^2 - 25 =$
f. $x^2 + 2x + 1 =$
g. $9x^2 + 6x + 1 =$
h. $\frac{x^2}{4} + x + 1 =$

Refuerzo de matemáticas 3ºESO

14. Simplifica las expresiones siguientes:

a. $(x+3) \cdot (x-3) - (x+3)^2 =$

b. $(2x+3)^2 - (2x-3)^2 - 9 =$

c. $3x \cdot (x+1)^2 - (2x+1) \cdot (2x-1) =$

d. $(x^2+2) \cdot (x^2-2) - (x^2-1)^2 =$

2.4 Fracciones algebraicas

15. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\frac{9x}{12x^2} =$

b. $\frac{x(x+1)}{5(x+1)} =$

c. $\frac{x^2(x+2)}{2x^3} =$

d. $\frac{x^2-4x}{x^2} =$

e. $\frac{3x}{x^2+2x} =$

f. $\frac{3x+3}{(x+1)^2} =$

g. $\frac{2x^2+4x}{x^3+2x^2} =$

h. $\frac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2} =$

i. $\frac{5x^3+5x}{x^4+x^2} =$

j. $\frac{x \cdot (3x^3-x^2)}{(3x-1) \cdot x^3} =$

16. Opera y simplifica si es posible:

a. $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2} =$

b. $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x} =$

c. $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1} =$

d. $(x+1) : \frac{x^2-1}{2} =$

e. $\frac{x^2-1}{x} : (x-1) =$

f. $\frac{x^2-2x+1}{x} : \frac{x-1}{x} =$

g. $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{x \cdot (x+1)}{x^2-1} =$

h. $\frac{x+5}{10} \cdot \frac{5}{(x+5)^2} =$

i. $\frac{4x-3}{2x} \cdot \frac{4x^2}{8x-6} =$

j. $\frac{x \cdot (x-2)}{x} : \frac{x^2-4}{x+2} =$

k. $6x^2 \cdot \frac{x-3}{x^3} =$

l. $\frac{2x}{x-1} : \frac{4x^2}{2x-2} =$

m. $\frac{2x^2}{3x} \cdot \frac{6x}{4x^3} =$

n. $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{3x}{18 \cdot (x-1)} =$

17. Opera y simplifica:

a. $\frac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\frac{5x}{2x-3} + \frac{5x}{2x+3} \right) =$

b. $\frac{x^2}{5x^2-25} - \frac{1}{5} - \frac{x^3+x^2}{(x+1) \cdot (5x^2-25)} =$

TEMA 3: ECUACIONES**3.1 Ecuaciones de primer grado****1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:**

a.
$$\frac{3x-1}{20} - \frac{2 \cdot (x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$$

{Sol: x=7}

b.
$$2 \cdot (2-3x) - 3 \cdot (3-2x) = 4 \cdot (x+1) + 3 \cdot (4-5x)$$

c.
$$\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$$

d.
$$\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$$

e.
$$\frac{x}{2} - \frac{2 \cdot (x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$$

f.
$$\frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x-8$$

g.
$$(x-3) \cdot (x+3) = \frac{3 \cdot (x-1)}{2} + x^2$$

h.
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$$

i.
$$3x - \frac{x+3}{4} = 13$$

j.
$$\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$$

k.
$$x + \frac{9 \cdot (5+x)}{5} = 9-x$$

l.
$$\frac{x-7}{4} + \frac{25 \cdot (x-2)}{3} = \frac{5x+35}{4} + \frac{5}{2} \cdot (x-7)$$

m.
$$\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$$

n.
$$4 - \frac{x+2}{4} = x-4$$

o.
$$\frac{(1+x)^2}{5} = \frac{2x+4}{25} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$$

p.
$$\frac{(2x-1) \cdot (2x+1)}{4} = \frac{3 \cdot (4x^2+1)}{12} - x$$

q.
$$\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}$$

2. Resuelve:

a.
$$(4x-3) \cdot (4x+3) - 4 \cdot (3-2x)^2 = 3x$$

b.
$$2x \cdot (x+3) + (3-x)^2 = 3x \cdot (x+1)$$

c.
$$(2x-3)^2 + (x-2)^2 = 3 \cdot (x+1) + 5x \cdot (x-1)$$

d.
$$\frac{x \cdot (x+1)}{2} - \frac{(2x-1)^2}{8} = \frac{3x+1}{4} - \frac{1}{8}$$

3.2 Ecuaciones de segundo grado

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas sin utilizar la fórmula de resolución:

a. $3x^2 - 12x = 0$

b. $2x^2 - 5x = 0$

c. $9x^2 - 25 = 0$

d. $16x^2 = 100$

e. $x - 3x^2 = 0$

f. $2x^2 - 8 = 0$

g. $4x^2 + 100 = 0$

h. $3x^2 - 6 = 0$

4. Resuelve:

a. $x^2 + 4x - 21 = 0$

b. $x^2 + 9x + 20 = 0$

c. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d. $x^2 + x + 3 = 0$

e. $4x^2 + 28x + 49 = 0$

f. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

g. $x^2 - 2x + 3 = 0$

h. $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $(2x + 1) \cdot (x - 3) = (x + 1) \cdot (x - 1) - 8$

b. $(2x - 3) \cdot (2x + 3) - x \cdot (x + 1) - 5 = 0$

c. $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2) \cdot (x - 2)$

d. $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

6. Resuelve:

a.
$$\frac{(5x - 4) \cdot (5x + 4)}{4} = \frac{(3x - 1)^2 - 9}{2}$$

b.
$$\frac{x}{3} \cdot (x - 1) - \frac{x}{4} \cdot (x + 1) + \frac{3x + 4}{12} = 0$$

c.
$$\frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{12} - \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{6} - 1 = \frac{x - 3}{3}$$

d.
$$\frac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x + 1}{5} = 0$$

e.
$$\frac{x + 1}{2} - \frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{x + 2}{3} + \frac{(x - 2)^2}{6} = \frac{1}{6}$$

7. Clasifica las siguientes ecuaciones en compatibles e incompatibles:

a. $4 \cdot (2x + 1) - 3 \cdot (x + 3) = 5 \cdot (x - 2)$

b. $2 \cdot (x - 3) + 1 = 3 \cdot (x - 1) - (2 + x)$

c. $\frac{3x + 1}{2} = 2x - \frac{x - 1}{2}$

d. $x + \frac{2x - 7}{4} = 2x + \frac{1 - x}{2}$

8. Inventa ecuaciones de segundo grado con:

a. Dos soluciones: $x = -2$ y $x = 3$

b. Dos soluciones: $x = 3$ y $x = -\frac{2}{3}$

c. Dos soluciones: $x = 0$ y $x = -5$

d. Una solución: $x = 4$

e. Ninguna solución.

9. Si al resolver una ecuación de primer grado llegamos a $0 \cdot x = 3$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación?. ¿Y si llegamos a $0 \cdot x = 0$?

10. En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:

a. ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b. ¿Y para que sean distintas? ¿Y para que no tenga solución?

11. ¿Cuál debe ser el valor de a para que $x=2$ sea solución de la ecuación $(x-3)^2 - x^3 + a = 0$?. Justifica tu respuesta

3.3 Otras ecuaciones:

12. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

b. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c. $x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

d. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

13. Resuelve:

a. $\frac{1}{x} - 3x = \frac{x-3}{2x}$

b. $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 0$

c. $\frac{15}{x} = \frac{-72 - 6x^2}{2x^2} + 2$

d. $\frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

a. $\sqrt{x^2 + 7} + 2 = 2x$

b. $x+1 - \sqrt{5x-1} = 0$

c. $\sqrt{x+7} = x+1$

d. $1 + \sqrt{2x-3} = x$

3.4 Problemas de ecuaciones

15. Calcula el número cuya mitad es 63 unidades menor que su doble.
{Sol: $n^{\circ}=42$ }
16. Calcula un número sabiendo que sus tres cuartos superan en 22 unidades a su mitad.
{Sol: $n^{\circ}=88$ }
17. Un número impar, su siguiente y su anterior suman 213. Calcúlalos
{Sol: $n^{\circ}=70, 71$ y 72 }
18. La construcción de una carretera entre dos pueblos se inicia a la vez por ambos extremos. Al cabo de un mes, lo construido por un extremo es $\frac{3}{4}$ de lo construido por el otro, y faltan por construir 4200 m. que es el doble de lo que se ha hecho. ¿Qué longitud va a tener la carretera?
{Sol: la carretera mide 6300 m}
19. Un depósito está lleno de agua. En una primera extracciones saca un quinto de su contenido, en una segunda extracción se sacan 60 litros y, por último, se sacan $\frac{5}{6}$ del agua restante, quedando aún 50 litros. Calcula la capacidad del depósito.
{Sol: La capacidad del depósito son 450 litros}
20. Antonio tiene 15 años y su madre 42 ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del hijo sea la mitad de la de la madre? {Sol: dentro de 12 años}
21. A una reunión asisten hombres, mujeres y niños. Los hombres son el doble que las mujeres y los niños juntos, los niños son la tercera parte de las mujeres. Entre todos llenen las butacas de las salas que son 144. ¿Cuántos niños hay? ¿Y hombres? {Sol: hay 12 niños y 96 hombres}
22. En una familia trabajan la madre, el padre y el hijo mayor, ganando conjuntamente 2160 € al mes. La ganancia de la madre es igual a los $\frac{2}{3}$ de la del padre y la del hijo es $\frac{1}{2}$ de la de su madre. ¿Cuánto gana cada uno?
{Sol: $n^{\circ}=42$ }
23. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es el doble del otro. ¿cuántos grados mide cada ángulo? {Sol: $30^{\circ}, 60^{\circ}$ y 90° }
24. La nota media de tres evaluaciones de Carmen en el área de Matemáticas se obtiene sumando las tres notas y dividiendo entre tres. Si ha sacado un 5 y un 7 en las dos primeras evaluaciones, ¿qué nota ha de sacar en la tercera para alcanzar una nota media de 6'5? {Sol: nota=7'5}
25. La tercera parte del cuadrado de un número entero, sumado a la quinta parte del mismo número, da como resultado 78. Halla dicho número.
{Sol: $n^{\circ}=15$ }
26. La superficie de un rectángulo es 494 cm^2 . Halla sus dimensiones sabiendo que una es 7 cm más larga que la otra.
{Sol: 19 cm x 26 cm }

27. Juan pone un cero en la pantalla de su calculadora. Al mismo tiempo, Ana pone 100 en la suya. Si Juan suma un 2 cada vez que Ana resta un 3. ¿Cuántas veces han de operar hasta que los valores que aparezcan en las pantallas de sus calculadoras lleguen a ser iguales? ¿Cuál será el valor? Plantea una ecuación para resolver este problema. {Sol: habrá que repetirla 20 veces y aparecerá el nº 40}
28. El área de un rectángulo es 18 m^2 ¿Cuáles son sus dimensiones, sabiendo que una es doble de la otra? {Sol: 3 cm x 6 cm}
29. Una caja mide 5 cm de altura y de ancho mide 5 cm más que de largo. Su volumen es 1500 cm^3 Calcula su longitud y su anchura. {Sol: 5x15x20 cm}
30. Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm. {Sol: 8x6 cm}
31. Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos. {Sol: 5 cm}
32. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo ¿Cuántos años tiene ahora cada uno? {Sol: 6 y 36 años}
33. La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años ¿qué edad tiene cada uno? {Sol: 44 años el padre, 38 la madre y 11 cada uno de los gemelos}.
34. La base de un rectángulo es 2m mayor que la altura. Si a la base se le aumenta 1 m y a la altura 2m, resulta otro rectángulo cuya área es 24 m^2 mayor que el primero. Calcula las dimensiones de éste. {Sol: 8x6 cm}
35. La edad de una madre es el triple de la de su hijo. Dentro de 10 años su edad será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?
36. Si sumamos 5 unidades al doble de un número el resultado es el mismo que si le sumáramos 7 unidades. ¿Cuál es el número?
37. Queremos repartir un dinero entre varias personas. Si damos 100€ a cada uno sobran 15€ , mientras que si les damos 125€ faltan 35€. ¿Cuántas personas hay y cuánto dinero tenemos?
38. La suma de tres números naturales consecutivos es 84. Halla dichos números.
39. En un rectángulo de base 70m y altura 301m se disminuyen 10m de la base. ¿Cuánto debe aumentar la altura para que resulte la misma superficie?
40. El tronco del gato Lolo mide $\frac{1}{2}$ de su longitud total y la cabeza mide igual que la cola, 6cm. ¿Cuánto mide el gato de Lolo?

41. La valla del patio rectangular del instituto mide 3600m. Si su largo es el doble que su ancho, ¿Cuáles son las dimensiones del patio?
42. En una fiestecilla hay triple número de mujeres que de hombres y doble número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántas mujeres, hombres y niños hay si asistieron 60 personas?
43. Un poste de teléfonos tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud y la parte exterior mide 8m. ¿Cuánto mide el poste?
44. Clara se ha gastado 375€ al comprar una cazadora para Marcos y otra para Sara. La de Marcos costó 35€ más que la de Sara. ¿Cuánto costó cada una?
45. Descomponer el nº 1000 en dos números de forma que al dividir el mayor entre el menor el cociente sea 2 y el resto 220.
46. En un colegio de Jaca hay 237 estudiantes menos de primaria que de secundaria. Sabiendo que el número total es de 1279 alumnos, de los que 200 son de educación infantil, calcular los alumnos de primaria y secundaria.
47. La familia de Rogelia tiene periquitos y perros como mascotas. Averiguar cuántos perros y periquitos tienen, sabiendo que hay 6 bichos y 16 patas.
48. En un rectángulo de perímetro 152, la base mide 9 unidades más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
49. El perímetro de un rectángulo es 24 cm y su área es 20 cm^2 . Hallar sus dimensiones.
50. Halla tres números enteros consecutivos cuyo producto sea igual a su suma. ¿Cuál sería la solución si se pidieran números naturales?
51. Si disminuimos 3m cada lado de un cuadrado se obtiene otro cuadrado cuya área es 63 m^2 más pequeña que la del cuadrado primitivo. Hallar las dimensiones del primer cuadrado.
52. Al añadir a un número 3 unidades y multiplicar por sí mismo el valor resultante, se obtiene 100. Calcular dicho número.
53. La diferencia de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 117. Halla dichos números.
54. La suma de dos números es 15 y su producto es 26. Hallarlos.
55. En un triángulo, el lado mediano mide 6 cm más que el lado pequeño, y el lado mayor mide 3cm más que el lado mediano. El perímetro mide 63 cm. Hallar la medida de los lados.

56. Un programa de televisión ha tenido la misma audiencia tres días seguidos. El cuarto día ha tenido el doble de audiencia y el quinto día lo han visto 2400 000 espectadores. En total, en los cinco días, 15 800000 personas han visto el programa. Calcular la audiencia de cada día.
57. La biblioteca del instituto está dividida en 5 secciones. En la primera y en la segunda hay el mismo número de libros. Tanto en la tercera como en la cuarta hay la mitad de libros que en la primera o segunda. En la quinta hay el doble que en la primera o en la segunda. Si en la biblioteca hay 8000 volúmenes, calcular los que hay en cada sección.
58. En una tienda de ropa han vendido $\frac{1}{3}$ de los artículos almacenados. Al mes siguiente han vendido $\frac{2}{5}$ de la cantidad inicial y al tercer mes han vendido 800 artículos. Si todavía les quedan 400 artículos, calcular cuántos artículos había en el almacén.
59. Si se aumenta el lado de un cuadrado en 5 cm, el área aumenta en 75 cm^2 . Calcular el área del cuadrado.
60. El cuadrado de un número menos su triple es igual a 40. ¿Qué número es?

TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES**4.1 Sistemas de ecuaciones**

1. Dada la ecuación $4x-3y=12$.
 - a. ¿Cuántas soluciones tiene?
 - b. Si dichas soluciones las dibujáramos sobre el plano ¿qué obtendríamos?. Realiza dicha representación.
 - c. Comprueba cuales de los pares de valores siguientes son soluciones de dicha ecuación:
 $\square x = 6, y = 4$ $\square x = 6, y = 12$ $\square x = 0, y = -4$
 - d. ¿Podrías proporcionar otro par de valores que también sean solución?
2. Representa las rectas de ecuaciones: $2x - y = 2$, $x + y = 0$. ¿Cuál es la solución común a ambas?
3. Fijándote en sus ecuaciones , di cual de estos sistemas es compatible determinado (una única solución), cual es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y cual indeterminado (ninguna solución).

a. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$	c. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$	d. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

4. Halla 3 soluciones distintas de la ecuación: $12u - 5v = 3$.
 {Sol por ejemplo: $u = 0, v = -3/5$; $u = 1/4, v = 0$; $u = -1, v = -3$ }
5. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ \frac{2(x-3)}{5} - \frac{y}{3} = -1 \end{cases}$$
 {Sol: $x = 8/31$ e $y = -9/31$ }
6. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

{Sol: $x = 0$ e $y = 1$ }

7. Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 5y = 3 \end{cases}$$

{Sol: $x = 17/4$ e $y = 1/4$ }

8. Completa la siguiente tabla:

Sistema	Compatible	Incompatible
$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$		
$\begin{cases} 2(x + y) = y \\ 2(x + y) = x \end{cases}$		
$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = \frac{1}{5} \\ 5x + 15y = 3 \end{cases}$		

9. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método que consideres más adecuado:

a.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x - y = -2 \end{cases} \quad \{\text{Sol: } x=1, y=3\}$$

d.
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{3y+1}{2} = 5 \\ x - \frac{1-5y}{2} = 3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \quad \{\text{Sol: } x=34/11, y=7/11\}$$

{Sol: $x=-23/2, y=6$ }

c.
$$\begin{cases} 2m + 2p = 6 \\ -m + 2p = 9 \end{cases} \quad \{\text{Sol: } m=-1, p=4\}$$

e.
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-5}{3} = 5 \\ \frac{x-2}{3} - \frac{y+3}{4} = 3 \end{cases} \quad \{\text{Sol: } x=49/3, y=37/9\}$$

10. Completa la siguiente tabla:

Sistema	Compatible	Incompatible
$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$		
$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$		
$\begin{cases} 7x + 7y = 14 \\ x + y = 2 \end{cases}$		

11. Halla a en el sistema
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = a \end{cases}$$
 para que:

- a) Tenga infinitas soluciones.
- b) No tenga solución.

{Sol: a) $a=9$; b) $a \neq 9$ }

12. Al poner en una balanza 2 botes de mermelada y 1 de miel, éstos pesaban 900 g. Plantea la ecuación correspondiente y completa la tabla:

Mermelada	Miel
	500
300	
250	
	600

13. Resuelve el siguiente sistema por el método indicado:

a) Por	b) Por	c) Por
igualación:	sustitución:	reducción:
$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - y = 23 \\ -9x + 5y = 13 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$

14. Resuelve los siguiente sistemas por el método que creas conveniente:

a. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 7 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$	b. $\begin{cases} 2 \cdot (x + 1) - 3y = -9 \\ 3 \cdot (x + 5 - y) + 3x = 12 \end{cases}$
--	---

15. Halla la solución (si la tienen) de los siguientes sistemas:

$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$ Solución: $(x, y) = \left(-\frac{13}{17}, \frac{23}{17}\right)$	$\begin{cases} -\frac{4x}{3} + 5y = -\frac{1}{2} \\ \frac{2x - 3y}{4} = 6 \end{cases}$ Solución: $(x, y) = \left(\frac{237}{16}, \frac{15}{8}\right)$
--	--

$\begin{cases} -5x + 2y = -3 \\ \frac{3x - y}{2} = 1 \end{cases}$ Solución: $(x, y) = (1, 1)$	$\begin{cases} 2x + 7y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$ Soluciones: $(x, y) = \left(-\frac{1}{13}, \frac{4}{13}\right)$
--	--

$$\begin{cases} 4x - 2y - z = -3 \\ -x + y + 2z = 7 \\ 2x - 5y + z = -5 \end{cases}$$

Las soluciones tienen que ser
 $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

16. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado o superior:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 290 \\ x + y = 24 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 8 = 0 \\ y^2 = 6x \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$	g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ xy = 30 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -9x - 14 \\ y^2 = 16 + 4x \end{cases}$	h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy + 12 = 0 \end{cases}$

4.2 Problemas

18. La suma de las edades de dos personas es 14 y la diferencia de dichas edades es 4. Calcúlalas. *{Sol: 5 y 9 años}*
19. En una tienda hay 15 lámparas de 1 y 3 bombillas. Si las encendemos todas a la vez, la tienda queda iluminada por 29 bombillas. ¿Cuántas lámparas de cada tipo hay? *{Sol: 7 lámparas de 3 bombillas y 8 de 1 bombilla.}*
20. ¿Cuánto miden los lados de un triángulo isósceles si sabemos que su perímetro es 25 y el lado desigual mide la cuarta parte de lo que miden los otros juntos? *{Sol: Los lados iguales miden 10 y el desigual 5}*
21. Mi padre tiene un huerto con forma rectangular, de tal modo que necesitó 80 m de tela metálica para vallarlo. Mi padre piensa agrandar el huerto aumentando en 5 m su anchura, con lo que piensa que aumentará la superficie del huerto en unos 125 m². ¿Qué medidas tiene el huerto en estos momentos? ¿Qué medidas tendrá tras la ampliación? *{Sol: En estos momentos mide 15 m x 25 m; tras la ampliación medirá 20 m x 25 m}*
22. ¿Pueden existir dos números cuya suma sea 24 y cuya diferencia sea 12? Plantea el sistema y estudia su compatibilidad. *{Sol: Sí, 6 y 18}*
23. Por 2 cafés y 2 bollos me cobraron 3 €; y por 2 cafés y 1 bollo 2,25 €. Calcula el precio del café y del bollo. *{Sol: Ambos cuestan 0,75 €}*
24. Mezclando dos tipos distintos de café, de Colombia y Angola, de precios 5 €/kg y 9 €/kg respectivamente, queremos obtener otro café cuyo precio sea de 7 €/kg. ¿Qué cantidad tenemos que mezclar de cada tipo de café para obtener 20 kg de café a 7 €/kg? *{Sol: 10 kg de cada tipo de café}*
25. Halla un número menor que 100 tal que sea igual a 7 veces la suma de sus cifras, y tal que la diferencia entre él y el número obtenido al intercambiar sus cifras sea 27. *{Sol: 63}*
26. En un bar venden bocadillos de jamón a 4€ y bocadillos de queso a 2.5€. En una mañana ha vendido 25 bocadillos y la recaudación final ha sido de 85€. ¿Cuántos bocadillos de cada clase ha vendido?
27. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mide 80 m y la altura es 2/3 de la base.
28. La diferencia de edad entre mi padre y mi hermano es igual a 20 años. Sabiendo que la mitad de la edad de mi padre hace 5 años es igual a la edad que mi hermano tiene hoy ¿qué edad tiene cada uno? *{Sol: 35 y 15 años}*
29. La diferencia de los lados de dos cuadrados es de 3 cm. ¿Cuánto miden los lados del cuadrado pequeño, si el área del grande son 64 cm²? *{Sol: 5cm}*
30. La diferencia de dos números es 28. Si a la mitad del mayor le quito el triple del menor el resultado es 9. ¿De qué números se trata? *{Sol: 2 y 30}*

TEMA 5: PROPORCIONALIDAD**5.1 Proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa**

1. Una vaca tarda una hora en comer ella sola la hierba de un prado. Una segunda tarda tres horas y una tercera 6 horas. Si pastan las tres simultáneamente ¿cuánto tiempo tardarán en comerla?
2. Realizamos un trabajo en 2 meses y somos 12 personas. Necesitamos hacerlo en solo 18 días. ¿Cuántas personas debemos contratar?
3. Una ganadera tiene pienso para alimentar 320 vacas durante 45 días. Pero debe darles de comer 60 días. Vende las que no puede alimentar. ¿Cuántas vacas vende?
4. Un grifo abierto 9 horas durante 8 días ha arrojado 5400 litros ¿Cuántos litros arrojará durante 18 días a 8 horas diarias?
5. Una persona leyendo 4 horas diarias a razón de 15 páginas por hora, tarda en leer un libro 10 días. Si leyendo a razón de 10 páginas por hora tardase 20 días, ¿cuántas horas diarias leería?
6. Dos poblaciones que distan 10 km están, en un mapa, a una distancia de 4 cm ¿cuál será la distancia real entre dos ciudades que, en ese mismo mapa, están separadas 21 cm? ¿cuál es la escala del mapa?
7. Un jefe gratifica con unas vacaciones a sus empleados que no faltaron nunca al trabajo. A los demás les gratifica con cantidades de dinero inversamente proporcionales al número de días que faltaron. Si Javier, que faltó 21 veces le han correspondido 100€ ¿cuánto le corresponderá a Miguel que faltó solo tres días?
8. Dos obreros que trabajan al mismo ritmo pueden terminar una obra en 14 horas de trabajo conjunto. ¿Cuánto tardarán en terminarla si uno de ellos pone manos a la obra 2 horas y media antes que el otro?
9. Un hombre pinta el sólo una fachada en 8 horas y otro pinta la misma fachada en 12 horas. ¿cuánto tiempo emplearían los dos trabajando juntos?
10. Un ganadero tiene forraje para alimentar a 40 vacas durante 120 días. Si compra 20 vacas más, ¿Cuántos días podrá alimentarlas con las mismas provisiones?
11. Dos bolígrafos cuestan 80 céntimos. ¿Cuánto costarán tres bolígrafos?
12. Seis obreros hacen un trabajo en 4 horas ¿cuánto tardarán 3 obreros?
13. Una moto recorre 67'5 km en tres cuartos de hora ¿cuánto recorrerá en dos horas y media?
14. La moto del problema anterior, marchando a 90 Km/h tarda dos horas en recorrer 180 km ¿Cuánto tardará en recorrer los 180km si su velocidad fuese 100km/h?
15. Cinco obreros tardan 7 días en construir 12 m de muro ¿En cuántos días lo construirían 5 obreros?
16. Una población de 2000 habitantes tiene agua para tres años, sin que llueva nada. ¿Para cuántos años tendría agua si fuesen 2500 habitantes?
17. Con 15 kg de alimentos se alimentan 5 personas durante 7 días ¿Durante cuántos días se alimentarán 6 personas con los mismos alimentos?
18. Seis personas efectúan un trabajo en 10 días ¿Cuánto tardarán 8 personas en hacer el mismo trabajo?
19. He recorrido 720 km en 9 horas, a una velocidad media de 80 km/h ¿Cuánto habría tardado si la velocidad hubiese sido de 60 km/h?

20. Con 15 kg de alimentos se alimentan 5 personas durante 7 días ¿Durante cuántos días se alimentarán 6 personas con 20 kg de alimentos?
21. Seis personas hacen 20 m de muro en 10 días ¿Cuánto tardarán 8 personas en hacer 32 m de muro?
22. Una máquina embotelladora ha llenado 135 botellas en 15 minutos ¿Cuántas llenará en hora y media?
23. Un ganadero tiene 20 vacas y dispone de pienso para alimentarlas durante 60 días. Si tuviera 70 vacas ¿para cuántos días tendría pienso?
24. Una población ha consumido 20 dam³ de agua en 5 meses ¿Cuántos dam³ consumirá en un año?
25. Una tubería aporta un caudal de 45 litros por minuto y llena un depósito en 90 minutos. ¿En cuánto tiempo lo llenaría si aumentase el caudal a 60 litros por minuto?
26. Un corredor ha dado 8 vueltas a la pista en 12 minutos ¿Cuántas vueltas dará, si mantiene el mismo ritmo, en 18 minutos?
27. Un coche tarda 3 horas en recorrer un trayecto yendo a una velocidad de 90 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto a 120 km/h?
28. En un pabellón hay piscina de adultos, cuya cabida es de 169 m³, y piscina infantil, con una cabida de 28 m³. Para llenarlas se dispone de 4 bombas que llenan la piscina de adultos en 12 horas. Se estropean dos bombas. ¿Cuánto tardan en llenar la piscina infantil con las bombas disponibles?
29. Una instalación de alumbrado de 16 focos funcionando 12 horas diarias durante 15 días consume 4'2 kw/h. ¿Cuánto consumirán 28 focos funcionando 14 horas diarias durante tres semanas?
30. Diez excavadoras hacen un túnel de 5m de ancho por 4 m de alto en 7 días ¿Cuántos metros podrán hacer 7 excavadoras, si el túnel tiene 6 m de ancho y 5 m de alto en 7 días?
31. Diez hombres han llevado a cabo un trabajo en 6 horas. Si sólo trabajaran 4 personas ¿cuántas horas tendrían que trabajar para terminarlo?
32. Seis náufragos calculan que tienen víveres para 20 días. Si sólo fuesen cuatro los náufragos, ¿para cuántos días tendrían víveres?
33. Seis obreros tardan 12 días en hacer 72 m de muro y consumen 36 kg de víveres ¿Cuántos metros de muro harían 8 obreros en 16 días consumiendo 32 kg de víveres?
34. Un automóvil recorre 100 km y consume 9 litros de gasolina ¿Cuánto gastará si recorre 400 km a la misma velocidad?
a) 36 l. b) 2'25 l. c) 40 l. d) 30 l.
35. Un automóvil recorre 100 km y consume 9 litros de gasolina. ¿Cuánto recorrerá con 54 l.? a) 550km b) 17 km c) 650 km d) 600 km
36. Un alfarero realiza 21 botijos en tres días. ¿Cuántos botijos realizará en 2 días?
a) 15 b) 14 c) 16 d) 20
37. Si seis obreros ponen baldosas en una plaza en 8 días ¿cuántos obreros serán necesarios para terminar en tres días?
a) 20 b) 3 c) 17 d) 16
38. Un metro de tela cuesta 6 € ¿cuánto podré comprar con 72 €?
a) 3 b) 6 c) 12 d) Ninguno
39. Un ganadero tiene pienso suficiente para alimentar a 220 cerdos durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de pienso a 450 cerdos? a) 90 b) 44 c) 20 d) 22

5.1 Repartos proporcionales

40. Una madre reparte un premio de 6890€ entre sus tres hijas de forma directamente proporcional a sus edades. La pequeña tiene 5 años menos que la mediana, y la mayor tiene el doble de edad que la pequeña. Si la menor tiene 12 años ¿cuánto le corresponderá a cada una?
41. Cuatro socios invierten en un negocio 20000€, 30000€, 45000€ y 25000€, respectivamente. Al cabo de un año han obtenido unos beneficios de 15120€. ¿Cuánto se llevará cada uno?
42. Un equipo formado por tres personas, Victoria, Mercedes y Carlos, ha realizado cierto trabajo. Victoria ha invertido 15 horas; Mercedes 12 horas, y Carlos, 8 horas. Si les pagan por el trabajo 441€, ¿cuánto le corresponde a cada uno?
43. Hemos comprado tres merluzas que pesaban 1'72 kg, 1'58 kg y 2'46 kg, respectivamente. En total hemos tenido que pagar 89'28€ ¿Cuánto ha costado cada una?
44. Se reparte cierta cantidad de dinero entre tres personas en partes directamente proporcionales a 4, $7/2$ y $5/4$, respectivamente. Si a la tercera persona le han correspondido 4130€ ¿Cuánto le corresponde a las otras dos? ¿cuál ha sido el total repartido?
45. Tres socios invierten en un negocio 25000€, 18000€ y 32000€, respectivamente. Al cabo de un año, obtienen unos beneficios de 375000€. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?
46. Reparte 4475 proporcionalmente a 5, 7 y 13.
47. Reparte 7875 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 6.
48. Dos ganaderos alquilan un terreno para pasto de sus dos manadas por 3500€. La manada del primero la componen 40 vacas y la del segundo 300 ovejas. ¿cuánto ha de pagar cada uno si una vaca come como 10 ovejas?
49. Entre tres pintores han pintado una casa y han cobrado 4160€. El primero ha trabajado 15 días, el segundo 12 días y el tercero 25 días. ¿Cuánto dinero tiene que recibir cada uno?
50. Se reparte un número N en parte inversamente proporcionales a 4, 5 y 9. La parte correspondiente a 4 es 900 ¿qué le corresponde a los otros dos números y que número es N?
51. Tres amigos, Raquel, Mariví y Julián, han recibido 500€ por cuidar varios días a un niño. Raquel ha estado 4 días, Mariví 6 y Julián 10 días ¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?
52. Tres socios invierten sus ahorros en un negocio. El primero aporta $1/3$ del capital, el segundo $2/5$ y el tercero el resto. Al cabo de tres meses, reparten unos beneficios de 150000€ ¿Cuánto corresponde a cada uno?
53. Un padre reparte 75€ entre sus hijos de modo proporcional a sus edades, que son 9 y 6 años respectivamente. ¿Cuánto recibirá cada uno?
a) 40 y 35€ b) 50 y 25€ c) 45 y 30€ d) 55 y 20€
54. Un grupo de tres amigos recibe por un trabajo 720€, ¿cómo se los repartirán si trabajan 5, 6 y 7 horas respectivamente?
a) 210,230 y 280€ b)200,240 y 280 c)190,240 y 290 d)100, 340 y 280

5.4 Problemas de porcentajes

55. Calcula:

- a. El 7% de 5 420 =
b. El 150% de 3 500 =
c. El 28% de 375 =
d. El 130% de 75% =
e. El 3% de 13'5 =

56. ¿Qué nº decimal corresponde a cada uno de estos porcentajes?

- a) 33% b) 7% c) 5'4% d) 145% e) 75% f) 130% g) 2% h) 5'3%

57. Expresa en forma de fracción irreducible los siguientes porcentajes:

- a) 70% b) 35% c) 10% d) 150%

58. Calcula el porcentaje correspondiente a las fracciones: $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{20}$ y $\frac{3}{5}$

59. Halla el porcentaje que corresponde a cada uno de estos números decimales
a) 0'78 b) 1'45 c) 0'03 d) 0'235

60. Un producto inicialmente cuesta 8800€ y sufre una subida del 10% y un año después otra subida del 15%. ¿Qué tanto por ciento ha subido en total este producto?

61. Tu amigo se ha comprado un pantalón vaquero y le han hecho un 20% de descuento. Al pagar le cobran un 16% en concepto de IVA. Al preguntarle por el precio del pantalón contesta que ha pagado 3'75€ menos que el precio inicial. ¿Cuánto costaba el pantalón inicialmente?

62. El número de préstamos mensuales en la biblioteca de una localidad aumentó el mes pasado en un 8%, y este mes, ha aumentado en un 5%. Si hace dos meses se prestaron 2000 ejemplares. ¿Cuántos se han prestado este mes?

63. El 45% de los habitantes de un lugar hacen la compra una vez por semana. De estos, el 35% la hacen en un determinado supermercado. Si el total de habitantes del lugar es de 30000 personas, ¿cuántos son los que compran en ese supermercado una vez por semana?

64. La recaudación en una tienda durante la primera quincena de julio fue de 1200€; en la segunda quincena recaudaron un 18% más que en la primera, y en la primera de agosto la recaudación descendió en un 5%. ¿Cuánto dinero recaudaron en la primera quincena de agosto?

65. El precio de un ordenador con IVA, era de 1202€.

- a. Si lo rebajan en un 18% ¿cuál es su precio actual?
b. ¿Cuál era su precio sin IVA antes de la rebaja, sabiendo que el IVA es del 16%?

66. Resuelve:

- a. Un producto costaba, sin IVA, 34'52€, y lo han rebajado un 15%. Sabiendo que el IVA es del 7%, ¿cuál será su precio final con IVA?
b. El precio de un medicamento, sin IVA, es de 18'75€. Sabiendo que el IVA es el 4%, ¿cuál será su precio con IVA?
c. Si otro medicamento cuesta 23'4€ con IVA, ¿Cuál será su precio sin IVA?
d. Una calculadora costaba 15€, y la rebajan un 35%. ¿Cuál será su precio rebajado?
e. Otro artículo que estaba rebajado un 15%, nos costó 19'55€. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

- f. Había ahorrado el dinero suficiente para comprarme un abrigo que costaba 90€. Cuando llegué a la tienda tenía una rebaja del 20%. ¿Cuánto tuve que pagar por él?
 - g. En la misma tienda me compré una bufanda, que tenía un descuento del 35%, pagando por ella 9'75€. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?
 - h. Un comerciante ha vendido una mercancía que le costó 150€, obteniendo un beneficio del 40%. ¿Cuál ha sido el precio total de venta de dicha mercancía?
 - i. Si en un producto por el que cobró 28'35€ obtuvo un beneficio del 35%, ¿cuánto le costó a él dicho producto?
 - j. Una persona pagaba el año pasado por el alquiler de su vivienda 420€ mensuales. Este año le han subido el precio un 2%. ¿Qué mensualidad tendrá que pagar ahora?
 - k. Si su vecino paga este año un alquiler de 459€ al mes, ¿cuánto pagaba el año pasado? (la subida fue también del 2% en este caso).
67. Un artículo costaba, sin IVA, 12€. Con una recta médica sólo debemos pagar el 40% de su precio total. Sabiendo que el IVA es del 4%, ¿cuánto tendremos que pagar por él, si llevamos la receta?
68. El número de habitantes de una determinada localidad, hace dos años, era de 6500. El año pasado, este número aumentó en un 5%, y este año, ha aumentado en un 7%. ¿Cuántos habitantes hay actualmente?
69. En el mes de enero rebajaron en un 10% un artículo que costaba 52€. En febrero lo rebajaron otro 15%, y en marzo, un 15% más ¿Cuál fue su precio después de estas tres rebajas?
70. El número de turistas que visitaron cierta ciudad durante el mes de junio fue de 2500. En el mes de julio hubo un 45% más de visitantes, y en agosto, un 20% más que en julio. ¿Cuántos turistas visitaron la ciudad en agosto?
71. A una excursión organizada en un instituto, han ido 210 alumnos y alumnas, lo que representa un 84% del total del alumnado del centro. ¿Cuántos estudiantes hay en dicho instituto?
72. Eusebio ha pagado 30'6€ por un jersey que estaba rebajado un 15%. ¿Cuánto costaba el jersey antes de la rebaja?
73. He comprado una impresora que cuesta 359€, pero como tienes que pagar el IVA, al final pagas 416'44€ ¿Qué tanto por ciento de IVA has pagado?
74. Calcular el 12% de 844 y el 35% de 2 580.
75. Mi hijo recibía hasta ahora 5€ semanales, pero le hemos subido la asignación a 6€. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?
76. Un ganadero tiene en su almacén 15000 kg de trigo después de la cosecha. Si a los 5 meses ha gastado 10200 kg. ¿Qué % de trigo ha gastado? ¿Qué % le queda?
77. Si un banco paga un interés de un 5% anual. ¿Qué dinero me dará al final del año, si al inicio tenía 4500€?
78. Un pantano tiene una capacidad de 1200 Hm³. Si ahora tiene 144 Hm³ ¿Qué porcentaje de su capacidad ha gastado?
79. Un cafetero compra café verde a 2'5€ el kilo. Al tostarlo luego, la mercancía pierde el 20% de su peso ¿a cuánto debe venderse el kilo de café tostado para ganar un 25% sobre el precio de la compra?
80. Una aleación contiene 1/5 de oro, un 35% de plata y el resto de cobre. ¿Qué tanto por ciento contiene de cobre?

81. Una determinada motocicleta vale 1800€. Un concesionario oferta dos tipos de pago:

- Opción A: tres descuentos sucesivos del 25, 15 y 10%
- Opción B: tres descuentos sucesivos del 35, 10 y 5%

Si tu quisieras comprarla ¿qué opción elegirías?

82. Las naranjas pierden $\frac{2}{7}$ de su peso al pelarlas. Después se exprimen y se obtiene zumo, representando éste las $\frac{3}{5}$ partes del peso de las naranjas peladas. ¿A cómo debe venderse el kg de zumo, si queremos ganar un 20% y hemos pagado a 0,70€ el kg?

83. En una clase de 30 alumnos hoy han faltado 6. ¿Cuál es el % de ausencias?

84. Quiero comprar un balón que cuesta 20€, ¿cuánto debo pagar si está rebajado un 30%?

- a) 22€ b) 6€ c) 14€ d) 15€

85. Un ordenador cuesta 600€ sin IVA, ¿cuánto pagaré si el IVA es del 16%?

- a) 504€ b) 96€ c) 696€ d) Ninguna de las anteriores

TEMA 6: PROGRESIONES

6.1 Sucesiones

1. Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término general es:

a) $a_n = \frac{2}{n}$ b) $b_n = \frac{5-n}{2}$ c) $c_n = \frac{n-4}{n-1}$ d) $d_n = 3 - (-1)^n \cdot n$

2. Calcular el término general de las sucesiones:

a) {1, 4, 9, 16,...} d) {2, 6, 18, 54,...}
 b) {3, 6, 9, 12,...} e) {0, 3, 8, 15, 24,...}
 c) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$ f) $\left\{ 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$

6.2 Progresiones aritméticas

3. Hallar los términos que se indican de las siguientes progresiones aritméticas:

- a) El término 20 en: 1, 6, 11, 16...
- b) El término 6 en: 3, 7, 11, 15...
- c) El 12 en: -4, 0, 4, 8...
- d) El término 10 en: 2, 5, 8, 11...

{Sol: a) 96; b) 23; c) 40; d) 29}

4. Halla los términos a_4 , a_7 , a_2 , a_{10} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n-2$ b) $a_n = n^2-1$ c) $a_n = 4n-3$ d) $a_n = 2n+3$

Sol: a) $a_4=10, a_7=19, a_2=4; a_{10}=28$; b) $a_4=15, a_7=48, a_2=3; a_{10}=99$; c) $a_4=13, a_7=25, a_2=5; a_{10}=23$; d) $a_4=11, a_7=17, a_2=7; a_{10}=23$

5. Hallar el término a_{10} en una progresión aritmética en la que $a_1 = 5$ y la diferencia es $d = -3$.

{Sol: -22}

6. Calcula el término general de las siguientes sucesiones:

- a) -1,1,3,5,7,9...
- b) 3,6,9,12,15,18...
- c) 5,6,7,8,9...
- d) -2,0,2,4,6...

{Sol: a) $2n-3$; b) $3n$; c) $n+4$; d) $2n-4$ }

7. Completa la siguiente tabla:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n
1	3	5				
4				16	19	
			10	13	16	

{Sol: 7,9,11,2n-1; 7,10,13,...,3n+1; 1,4,7,...,3n-2}

8. Calcula el primer término de una progresión aritmética que consta de 10 términos, si se sabe que el último es 34 y la diferencia es 3.

{Sol: 7}

9. En una progresión aritmética $a_{12} = -7$ y $d = -2$. Hallar a_1

{Sol: 15}

10. En una progresión aritmética $a_{20} = -33$ y $a_{12} = -28$, hallar a_1 y d .

{Sol: $a_1 = 5; d = -3$ }

11. En una progresión aritmética $d = 5$ y $a_{25} = 110$, hallar a_{20} .

{Sol: $a_{20} = 85$ }

12. ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y el último 36, si se sabe que la diferencia es 2.

{Sol: 15}

13. Interpola los términos que se indican en cada apartado:

- a) cuatro entre 7 y 17
- b) cinco entre 32 y 14
- c) Seis entre -18 y 17

{Sol: a) 9, 11, 13, 15; b) 29, 26, 23, 20, 17; c) -13, -8, -3, 2, 7, 12}

14. Interpolan los términos que se indican, de modo que resulte una progresión aritmética:
 a) Cuatro términos entre 15 y 30 b) Cuatro términos entre 15 y 5
 c) Seis términos entre 3 y 38 d) Cinco términos entre 1 y 25
 Sol: a) $d = 3$; b) $d = -2$; c) $d = 5$; d) $d = 4$
15. Si entre los números 8 y 16 hay tres medios aritméticos. ¿Cuál es la diferencia? {Sol: 2}
16. Calcula la diferencia de la progresión aritmética, sabiendo que entre 12 y 52 hay tres medios aritméticos. {Sol: 10}
17. Calcula el término a_{15} de una progresión aritmética donde el primer término es 3 y la diferencia 5. {Sol: $a_{15} = 73$ }
18. Halla la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:
 a) De los 10 primeros términos de: 1, 6, 11...
 b) de los 20 primeros términos de: 22, 23, 24...
 c) De los 30 primeros términos de: $1/2, 3/4, 1...$
 Sol: a) $a_{10}=46, S=235$; b) $a_{20}=41, S=630$; c) $a_{30}=31/4, S=495/4$
19. Halla la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_3 = 7$ y $a_{10} = 21$. {Sol: $S = 168$.}
20. Halla la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = 7$ y $a_{10} = 52$. {Sol: $S = 295$.}
21. Halla la suma de los 100 primeros números naturales {Sol: 5050}
22. Halla la suma de los números pares menores o iguales que 100. {Sol: 2525}
23. Halla la expresión del n -ésimo número par y la suma de los n primeros números pares: {Sol: a) $2n$; b) $(1+n)n$ }
24. Halla la expresión del n -ésimo número impar y la suma de los n primeros números impares. {Sol: a) $2n-1$; b) n^2 .}
25. Halla la expresión del n -ésimo múltiplo de 3 y la suma de los n primeros números. {Sol: a) $3n$; b) $[(3+3n)n]/2$ }
26. Halla la suma de todos los números impares de dos cifras. {Sol: 2475}
27. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 4, 8, 12,... para obtener como resultado 220. {Sol: 10}
28. La suma de los términos de una progresión aritmética limitada es 169 y su término central vale 13. Hallar el número de términos de la progresión. {Sol: $n = 13$ }
29. La suma de x números naturales consecutivos tomados a partir de 35 es 1820. Calcular x . {Sol: $x = 35$ }
30. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 es preciso tomar para que su suma sea igual a 1482?. {Sol: 39}
31. Calcula la suma de los 50 primeros números pares. {Sol: $S = 2550$ }
32. Si consideramos 9 términos consecutivos de una progresión aritmética $a_5 = 27$, y $a_7 = 39$. Halla la suma de los 9 términos. {Sol: 243}
33. Se consideran 12 términos consecutivos de una progresión aritmética. La diferencia de los dos extremos es 55, y la suma del cuarto y octavo 56. Halla los extremos. {Sol: $a_1 = 3, a_{16} = 58$ }
34. Se consideran 10 términos consecutivos de una progresión aritmética. Los dos extremos suman 22 y el producto del tercero y el cuarto es 48. Halla los términos de la progresión. {Sol: $d = 2$, sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
35. La suma de tres números en progresión aritmética es 24 y su producto 440. Halla estos números. {Sol: 5, 8, 11}

6.3 Progresiones geométricas

36. Prueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no. Y de las que sean calcula su razón.
 a) 5, 5/3, 5/9, 5/27,...
 b) 3, 12, 60, ...
 c) 54, 36, 24, 16, ...
 {Sol: a) Si $r=1/3$; b) No; c) Si $r=2/3$ }
37. Hallar el término décimo de la progresión: 2, 4, 8, ... {Sol: $a_{10} = 210$ }
38. Hallar el décimo término de la progresión: 1/64, 1/32, 1/16, ... {Sol: $r = 2, a_{10} = 8$ }
39. Determinar los seis primeros términos de una progresión geométrica si los dos primeros valen 5 y 3, respectivamente. {Sol: 5, 3, 9/5, 27/25, 81/125, 243/625}
40. El término a_5 de una progresión geométrica vale 324 y la razón vale 3. Hallar el primer término. {Sol: 4}
41. En una progresión geométrica se sabe que $a_5 = 48$ y $a_{10} = 1536$. Hallar el primer término y la razón. {Sol: $a_1 = 3, r = 2$ }
42. En una progresión geométrica $a_{10} = 64$ y la razón es 1/2. Hallar el término octavo. {Sol: $a_8 = 256$ }
43. Indica la razón de las siguientes progresiones:
 a) 1, 4, 16, 64...
 b) 3, -9, 27, -81...
 c) -2, 10, -50, 250...
 d) 27, 9, 3, 1...
 e) 2, 1/2, 1/8, 1/32...
 f) 24, -8, 8/3, -8/9...
 {Sol: a) 4; b) -3; c) -5; d) 1/3; e) 1/4; f) -1/3}
44. Calcula el octavo término de la progresión geométrica: 3, 6, 12, 24... {Sol: 384}
45. En una progresión geométrica $a_1 = 10$ y $a_{10} = 5120$. Hallar el término a_5 . {Sol: 160}
46. Demostrar que en toda progresión geométrica cada término es igual a la raíz cuadrada del producto del que le precede por el que le sigue.
47. Dos términos consecutivos de una progresión geométrica son 54 y 81, respectivamente. Hallar el lugar que ocupan en la progresión, si el primer término vale 24. {Sol: puestos 3 y 4}
48. En una progresión geométrica $a_5 = 2$ y $a_7 = 8$. Hallar la razón y los primeros 5 términos. {Sol: a) $r = 2$; b) 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2}
49. Calcula el decimosegundo término de la progresión: 1/3, 1, 3, 9, 27... {Sol: 59049}
50. Halla el primer término de una progresión geométrica sabiendo que la razón es 1/2 y el octavo término es 17/64. {Sol: 34}
51. Calcula la razón de una progresión geométrica donde el primer término es 5 y el quinto es 405. {Sol: 3}
52. En una progresión geométrica $a_1 = 3$ y la razón 2, hallar el lugar que ocupa el término que vale 1536. {Sol: $n = 10$ }
53. En una progresión geométrica $a_2 = 5$ y la razón 3, hallar el lugar que ocupa el término que vale 2187. {Sol: $n = 9$ }
54. Intercalar 4 términos entre 4 y 972 de modo que formen una progresión geométrica. {Sol: $r = 3; 12, 36, 108, 324$ }
55. Halla el primer término de una progresión geométrica de razón 3 y cuyo sexto término es 27. {Sol: 1/9}
56. Interpolarse 6 términos entre 64 y 1/2 de modo que formen progresión geométrica. {Sol: $r = 1/2; 32, 16, 8, 4, 2, 1$ }
57. Intercalar 3 términos entre 5 y 405 de modo que formen progresión geométrica. {Sol: $r = 3; 15, 45, 135$ }
58. En una progresión geométrica $a_1 = 2$ y la razón $r = 3$, hallar el término a_5 y el producto de los cinco primeros términos. {Sol: $a_5 = 162; P = 1889568$ }

59. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 31 y su producto 125. {Sol: 1, 5, 25 (r=5)}
60. Hallar el producto de los 7 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el central vale 5. {Sol: 78125}
61. Halla la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica: 3, 6, 12, 24... {Sol: 93}
62. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica: 768, 384, 192... {Sol: 3069/2}
63. En una progresión geométrica el primer término vale 8 y la razón 1/2. Hallar el producto de los 6 primeros términos. {Sol: 8}
64. Hallar tres números en progresión geométrica, sabiendo que su suma vale 12 y su producto -216. {Sol: 3, -6, 12.}
65. Tres números en progresión geométrica suman 155 y su producto vale 15625. Calcular dichos números. {Sol: 5, 25, 125}
66. Determinar cuatro números en progresión geométrica tal que los dos primeros sumen 95 y los dos últimos 36. {Sol: 3, 6, 12, 24}
67. Halla la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica: 1/4, 1/8, 1/16... {Sol: 63/128}
68. Halla la suma de los términos de las siguientes progresiones decrecientes e ilimitadas:
- | | |
|----------------------------|---------------------|
| a) 6, 3, 3/2, 3/4... | c) 18, 6, 2, 2/3... |
| b) 1/2, 1/6, 1/18, 1/54... | d) 27, 9, 3, 1, ... |
- {Sol: a) 12; b) 3/4; c) 27; d) 81/2}
69. Sabiendo que $a_1 = 5$ y $r = 2$, hallar la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica. {Sol: S = 1275}
70. Hallar la suma de los 4 primeros términos de la progresión geométrica: 8/5, 4/5, 2/5, ... {Sol: r = 1/2, S = 3}
71. Calcula el término a_{12} de la sucesión: $a_n = 2n+5$ {Sol: 29}
72. ¿Cuál es la diferencia en la sucesión: 5, 2, -1, ...? {Sol: -3}
73. ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos de la sucesión: 2, 10, 50...? {Sol: 4882812}
74. ¿Cuánto es la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4...? {Sol: 12}

6.4 Problemas de progresiones

75. En una progresión aritmética, la suma de los términos tercero y quinto es 28 y la de los términos segundo y décimo-segundo es 40. Calcular la suma de los veinte primeros términos.
76. En una P.A., el sexto término es igual al cuadrado del primero y el tercero vale 13. Calcular la suma de los tres primeros términos.
77. Calcular la suma de los 40 primeros múltiplos de 8 y la suma de los 50 múltiplos que siguen a 60.
78. Calcular la suma de todos los números impares de cuatro cifras.
79. ¿Cuántos números pares consecutivos es preciso tomar a partir del número 2 para que su suma sea 423.150?
80. La suma de los infinitos términos de una P.G. decreciente es 16, y la diferencia entre el primero y segundo términos es 1. Determinar la progresión.
81. Demostrar que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{4}{3}$

82. En un cierto país, el partido reformista y el transformador han dado sendos mítines, de los que han surgido las siguientes promesas:
- Los reformistas ofrecen convertir el secano en regadío con arreglo al siguiente plan: el primer año la octava parte del total y cada año la cuarta parte de la cantidad del año anterior.
 - Los transformadores se comprometen con este otro: el primer año la novena parte del total y cada año siguiente la tercera parte de la cantidad del año anterior.
 - a) ¿Cuál es la mejor propuesta para un periodo de seis años? ¿y para 15 años?
 - b) ¿Cuál es la mejor propuesta a la larga?
83. Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero que se hallan en P.G. sabiendo que el último es 9 veces el segundo.
84. Una familia tiene 3 hijos. Sus edades están en P.A. cuya suma es 36. Si a la edad del segundo le añadimos 2 y a la del mayor 11, los tres números forman una P.G. Hallar la edad de los tres hijos.
85. Interpolar 4 medios geométricos entre $\frac{1}{3}$ y 81.
86. Hallar tres números en P.G. cuya suma sea 26 y su producto 216.
87. Interpolar 3 medios aritméticos entre 7 y 37.
88. El alquiler de una bicicleta cuesta 1,5€ la primera hora y 0,3€ más cada nueva hora. ¿Cuál es el precio total del alquiler de 2, 3, 4, ..., n horas? ¿Cuántas horas ha tenido alquilada una bici Andrés si ha pagado 4,5 €?
89. Un padre de familia, al acabar el primer día de vacaciones, hace las siguientes cuentas: nos quedan 4.400€ y cada día de vacaciones gastamos 290€. ¿Cuánto dinero le va quedando según pasan 2, 3, ..., n días de vacaciones? ¿Para cuántos días de vacaciones tienen dinero?
90. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 15 m. Calcular sus otros lados sabiendo que los tres forman una P.A.
91. Un nadador, durante los seis primeros días de la temporada, se somete al siguiente entrenamiento: 11 largos de piscina el primer día y cada día siguiente aumenta en tres largos su dosis de entrenamiento diario. ¿Cuántos largos hizo en los seis días? ¿Cuántos habría hecho de seguir así durante 40 días?
92. Se quiere construir un tejado de forma que en la primera fila haya 10 tejas, en la segunda 11, y así sucesivamente, hasta un total de 20 filas de tejas. ¿Cuántas tejas se necesitan?
93. ¿Cuánto dinero llevaba a sus vacaciones una persona si el primer día gastó 210€, fue disminuyendo gastos en 10€ por día y el dinero le duró 20 días?
94. En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 metros de la pantalla y la séptima fila está a 16 metros. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 metros?
95. A Isabel y Andrés les han confiado, a las nueve de la mañana, un secreto. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado a tres amigos. Estos a otros tres, ..., etc. ¿Cuánta gente lo sabrá a la hora de comer (2 de la tarde)?
96. Una máquina de café costó inicialmente 1500€. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad y así sucesivamente.
 - a) Formar la progresión que nos da los precios sucesivos de la máquina.
 - b) ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?
 - c) Si este proceso continuara indefinidamente, ¿cuál será la suma total pagada por esa máquina?

97. El Ministerio de Fomento, después de la construcción del último tramo de una carretera, entre los puntos kilométricos 238 y 562, dispone de presupuesto para la instalación de 5 gasolineras que deberán situarse a igual distancia una de otra. Si en el kilómetro 238 ya había una y se quiere situar otra al final, determinar dónde deben emplazarse las restantes.
98. Un padre decide elevar gradualmente la asignación semanal de su hijo de 20€ a 41€ en 15 semanas. Para ello le aumenta cada semana una cantidad fija. Hallarla.
99. Todos los números naturales que divididos entre 7 dan resto 3 forman una progresión. Hallar la suma de los 100 primeros.
100. En cierta enfermedad, el organismo es atacado por unas bacterias, que se reproducen partiéndose en dos cada 24 horas. Si inicialmente se han introducido 10.000 bacterias, ¿cuántas habrá al quinto día? ¿Y al décimo?
101. Dibuja un cuadrado de 8 cm. de lado. Uniendo los puntos medios se obtiene otro cuadrado inscrito en el anterior. Repitiendo este proceso se obtiene una sucesión de infinitos cuadrados. Comprobar que los valores de las áreas de los infinitos cuadrados forman una progresión geométrica y calcular la suma de todas las áreas.
102. Calcular las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en P.A., que suman 24 m. y que el volumen del ortoedro es 384 m^3 .
103. Entre 5 personas se repartieron 100 medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además las dos primeras obtuvieron 7 veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una? (Problema extraído del Papiro de Rhind).

TEMA 7: FUNCIONES

7.1 Características e interpretación de una función

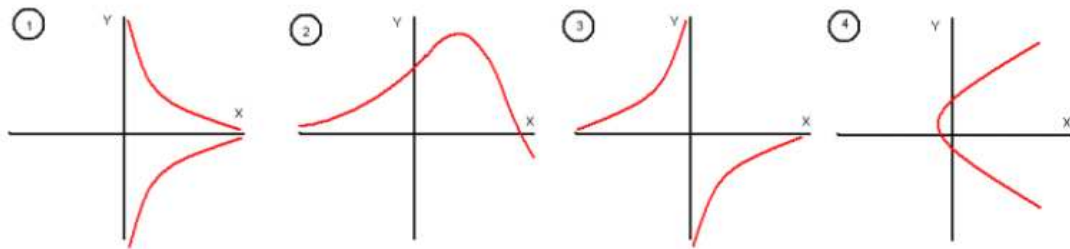
1. Un ciclista decide salir de ruta y durante un tiempo pedalea por un camino hasta que llega a una zona de descanso en donde se detiene para comer. A continuación, sigue avanzando durante otro rato más, momento en que decide volver a casa por el mismo camino que había elegido para la ida.



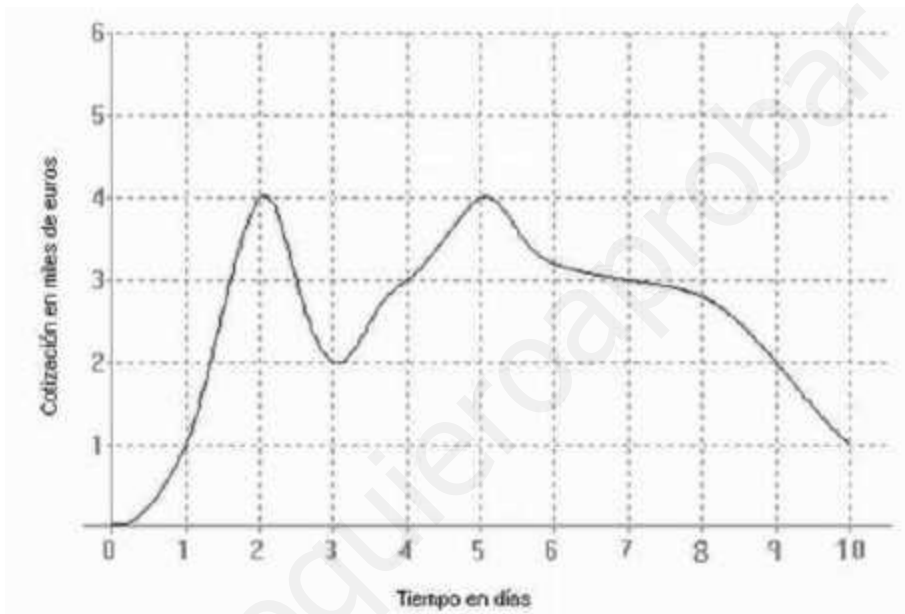
Observando la gráfica anterior, responder:

- a. ¿A cuántos kilómetros de su casa decide parar a comer?
 - b. ¿Qué tiempo había transcurrido cuando decide esa parada?
 - c. ¿Cuánto tiempo ha estado comiendo?
 - d. ¿Cuánto tarda en volver a casa desde que decide regresar?
 - e. ¿En qué momento de la ida tenía el camino una pendiente más pronunciada?
 - f. ¿Durante qué franja de tiempo pedaleó a más velocidad el ciclista?
 - g. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función?
 - h. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido entre la ida y la vuelta?
2. Decide razonadamente si las siguientes correspondencias son funciones o no. En las que sí lo sean, indica cuál representa la variable independiente y cuál la dependiente y escribe su expresión analítica.
 - a. A todo número natural se le hace corresponder su número natural siguiente.
 - b. A todo número natural se le asocian sus divisores.
 - c. A cada día del año se le asocia la cotización del euro frente al dólar.
 - d. A todo número fraccionario se le asocia su inverso.
 - e. A todo número se le asocia su raíz cuadrada.
 - f. A cada fase de la luna le asociamos la fecha en la que se da dicha fase.
 - g. A todo número se le asocia su doble más siete.

3. ¿Cuáles de éstas gráficas no corresponden a una función? ¿Por qué?



4. La cotización en bolsa de un determinado producto en los primeros 10 días en que se sacó a bolsa es la función representada en la imagen:



- a. ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido?
- b. ¿Cuánto cotizaba este producto al cabo de 1 día? ¿Y al cabo de 9 días?
- c. ¿Cuándo suben las acciones? ¿Cuándo bajan?
- d. ¿Cuándo alcanzan su máximo? ¿Y su mínimo?

5. Observa los siguientes datos que se dan en una tabla:

x (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (miles)	3	6	12	24	48	96	192	384	768

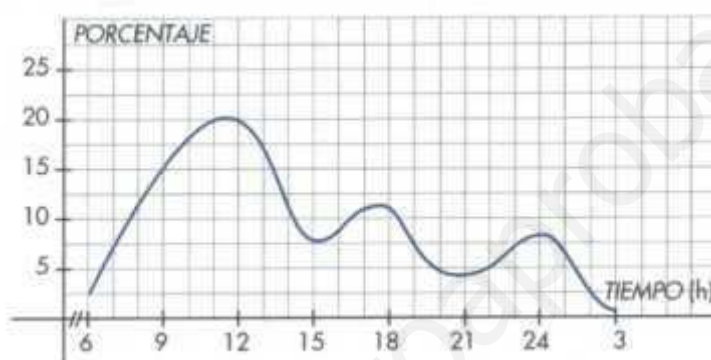
Corresponden al número aproximado de bacterias, en miles, de una colonia a lo largo del tiempo medido en horas.

- a. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
- b. Hacer un esbozo de la gráfica de esta función.

6. Un padre que estuvo observando desde el balcón a su hijo Alberto como iba al colegio: De casa salió a las 8.30 y fue seguidito hasta casa de su amigo Tomás. Lo esperó un rato sentado en el banco y luego se fueron juntos, muy despacio, hacia el colegio. Cuando ya estaban llegando, mi hijo se dio cuenta de que se había dejado la cartera en el banco; volvió corriendo, la recogió y llegó a la escuela a las 9 en punto.

Esbozar una gráfica que represente la función que describe la distancia a la que se encuentra Alberto según el instante entre las 8.30 y las 9.00 de la mañana.

7. Esta gráfica muestra la evolución de la audiencia de radio en España en un día promedio del año 1993. El porcentaje se refiere a toda la población española de 14 años o más.



- ¿Entre qué horas se realiza la medida?
 - ¿En qué horas del día aumenta el porcentaje de personas que escuchan la radio? ¿Cuándo disminuye?
 - ¿En qué momento de la mañana es máximo el porcentaje de oyentes?
 - ¿Cuál es el máximo de la tarde? ¿Y de la noche?
 - ¿Cuál es el porcentaje de oyentes a las 8 de la mañana? ¿Y a las 9 de la noche?
8. La siguiente tabla muestra los datos recogidos respecto a la longitud del feto durante el embarazo según las semanas de gestación:

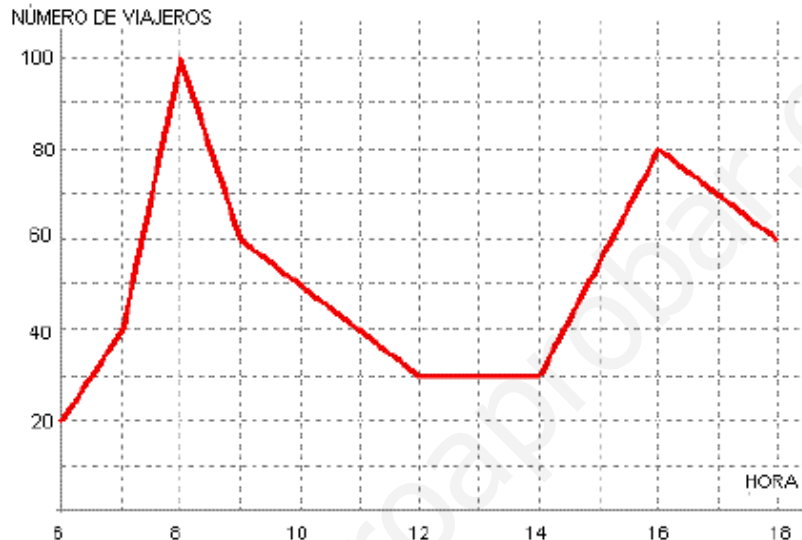
X	5	10	15	20	25	30	35	40
Y	1	7	15	25	35	42	48	52

- Usando la tabla de valores, representar gráficamente la función.
- Señalar cuál es la variable independiente y cuál la dependiente y en qué se mide cada una.
- Durante las primeras dos o tres semanas de gestación el feto es casi microscópico. ¿Cuánto medirá cuando la gestación sea de 12 semanas y media.
- ¿Cuál es la longitud que suele tener un niño al nacer?
- Si la expresión $P = 0,025 \cdot l^3$ nos da de forma aproximada el peso del feto en gramos según su longitud l en centímetros. Construir la correspondiente tabla y dibujar la gráfica de la función que representa el peso en gramos del feto según la semana de gestación.

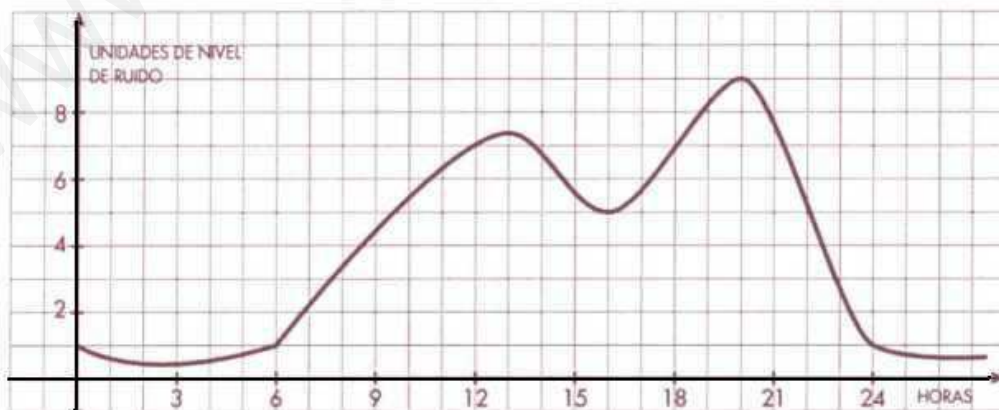
9. Un remonte de una pista de montaña funciona de 9 de la mañana a 4 de la tarde y su recorrido es el siguiente: Desde la salida hasta la pista, que está a 1200 m, tarda 15 minutos. Se para en la pista 15 min. Baja hasta la base en 10 minutos. Está parado 20 min, y empieza de nuevo el recorrido.

- Dibujar la gráfica que representa el recorrido del remonte.
- ¿Cuál es su posición a las 12h 30min? ¿Y a las 12h 20min?
- ¿Observas alguna característica especial en la gráfica?. Comentarla.

10. Observar en esta gráfica que el número de viajeros en una línea de autobuses ha ido en aumento entre las 6y las 8 de la mañana.

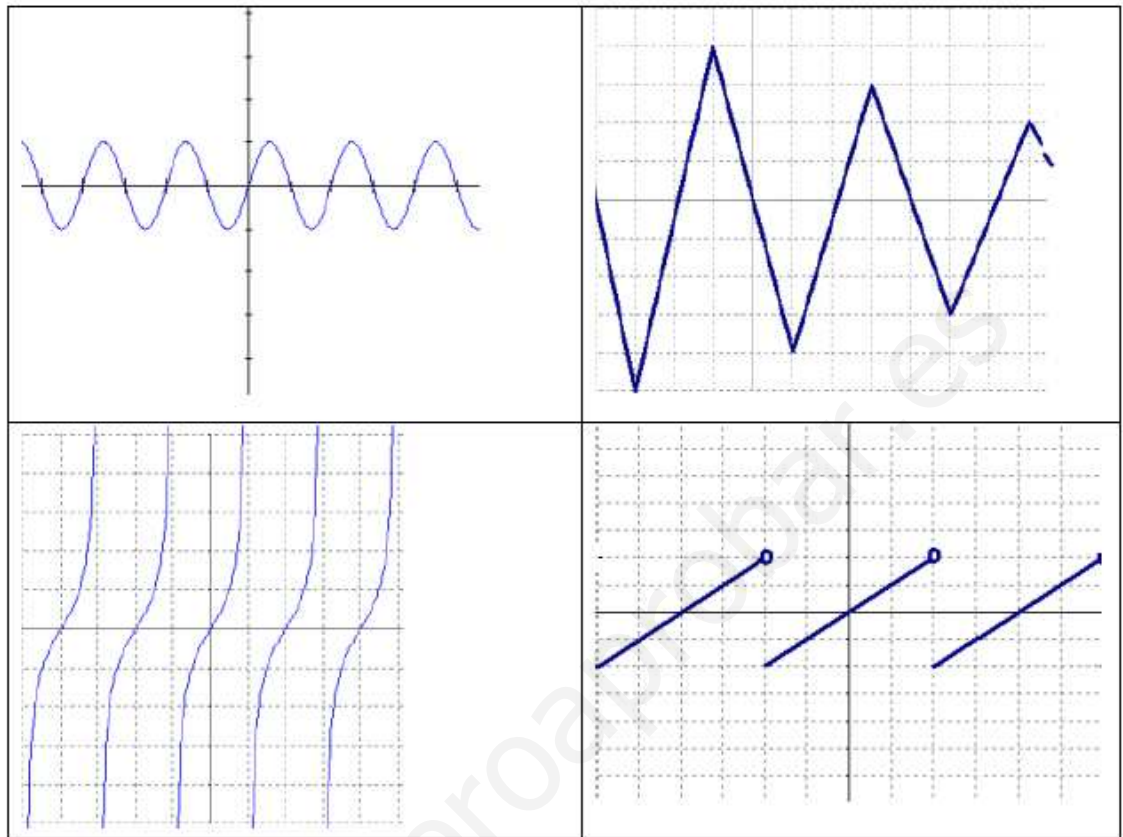


- ¿El crecimiento de la función es igual entre las 6 y las 7 que entre las 7 y las 8?
 - Indica los tramos en los que la función es decreciente y los tramos en los que es creciente.
 - ¿En qué tramo no hay variación en el número de viajeros? ¿Cómo dirías que es la función en ese tramo?
 - ¿En qué momento hubo un número máximo de viajeros?
11. La siguiente gráfica nos muestra el nivel de ruido que se produce en un cruce de grandes avenidas de una ciudad:

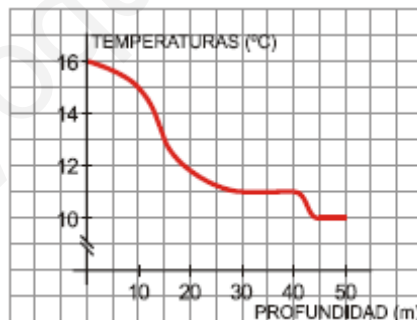


- ¿Cuándo crece el nivel de ruido? ¿Cuándo decrece?
- Indicar los instantes de tiempo en los cuales la intensidad del ruido es máxima o mínima.

12. De las siguientes funciones indicar cuál es periódica y cuál no. En la que sí lo sea intentar hallar el período:

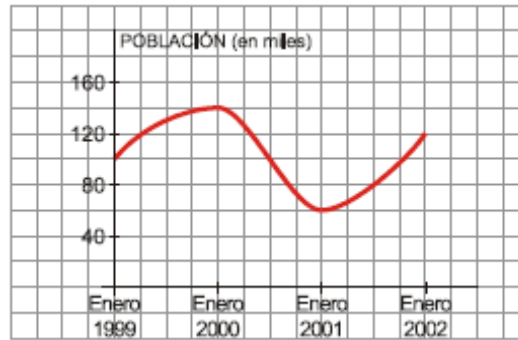


13. La siguiente gráfica muestra la temperatura del agua en un cierto lugar a diferentes profundidades:



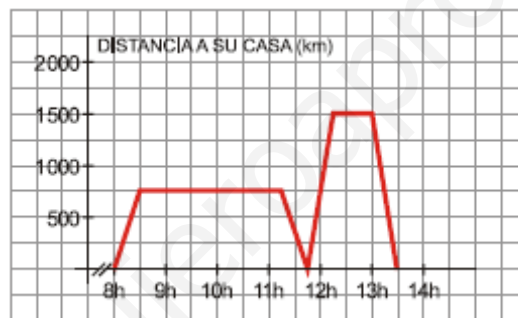
- ¿Cuál es la temperatura en la superficie?
- Indica la temperatura a 10m, a 15m, a 30m y a 50m de profundidad
- ¿Hay algún tramo en el que se mantenga estable la temperatura?. En caso afirmativo indica cuál es el tramo y la temperatura.
- Indica los tramos en los que la función es creciente y decreciente así como la temperatura máxima y mínima y la profundidad a la que se alcanzan.

14. La siguiente gráfica muestra la evolución de la población en un cierto lugar:



- ¿Cuál es el dominio de definición que hemos considerado?
- ¿Qué población había en enero de 1999?
- ¿En qué momento la población fue máxima? ¿Cuál fue ese máximo?
- ¿En qué momento la población fue mínima? ¿Cuál fue ese mínimo?
- Describe la evolución de la población en el periodo de tiempo considerado.

15. Pablo sale de casa a las 8 de la mañana para ir andando al instituto. En el recreo ha de volver a casa para ir al médico con su madre. La siguiente gráfica nos muestra la situación:



- ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora comienza el recreo?
- ¿A qué distancia de la casa de Pablo está el instituto? ¿y el consultorio médico?
- ¿Cuánto tiempo ha estado Pablo en clase? ¿y en el consultorio médico?
- Interpreta la gráfica

7.2 Funciones lineales y afines

16. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a. $y = \frac{2}{3}x + 2$

b. $-6x + 3y = 12$

17. Escribe la expresión analítica de las siguientes rectas:

a. Es paralela a $y = 5x$ y pasa por el punto $P(2,8)$

b. Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-2, 7)$

18. Un depósito contenía inicialmente 20 litros de agua y un grifo capaz de vaciar 10 litros por minuto. :

a. Calcula la ecuación de la recta que calcula la cantidad de agua que queda en el depósito en función del tiempo que está el grifo abierto.

b. Representala gráficamente.

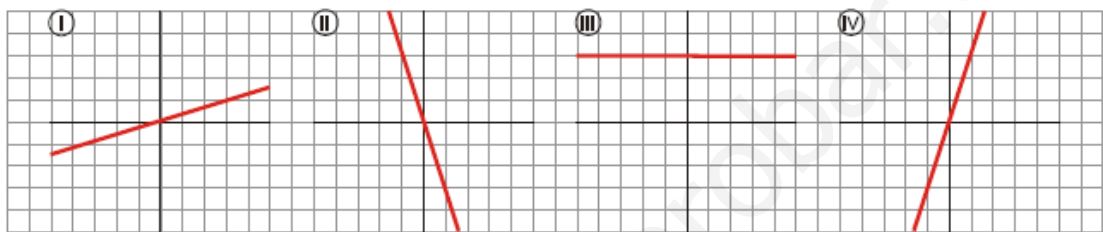
c. Calcula la cantidad de agua que queda si dejamos el grifo abierto durante 6 minutos. ¿y si lo dejamos 5 minutos? ¿y 10?

19. Construye una gráfica que corresponda a la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que:

A las 0 horas había, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores. Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana. A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1,5 millones de espectadores. La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores. Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6,5 millones de espectadores. A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores.

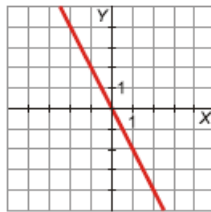
20. Asocia cada una de las siguientes gráficas con su expresión analítica:

- a) $y = 3x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y = 3$ d) $y = -3x$

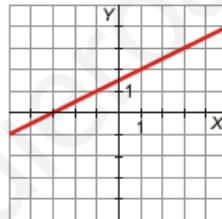


21. Averigua cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas:

a)



b)



c)

$$y = \frac{2x - 3}{5}$$

22. Representa las siguientes rectas:

a. $y = -3x$

b. $y = \frac{2}{3}x + 2$

c. $y = 4$