

# Poliedros regulares

## Cuerpos de revolución

### Poliedro.

Un poliedro es un cuerpo limitado por caras poligonales.

### Ángulo diedro. Ángulo poliedro

Se llama ángulo diedro de un poliedro el que está formado por dos caras que tienen una arista común.

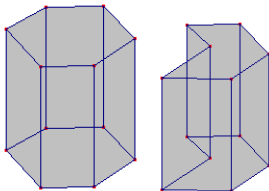
Se llama ángulo poliedro aquel en el cual concurren tres o más caras.

### Orden de un vértice.

Se llama orden de un vértice al número de caras que concurren en el vértice.

### Poliedro convexo, poliedro cóncavo

Un poliedro es convexo si cualquier sección plana del poliedro es convexa. El contrario se llama polígono cóncavo.



poliedro convexo    poliedro cóncavo

### Teorema de Euler.

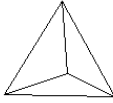

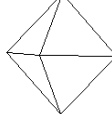
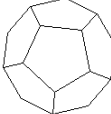
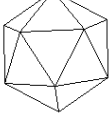
En un poliedro convexo se cumple que el número de caras más el de vértices es igual al número de aristas más dos.

$$C+V=A+2$$

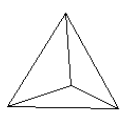
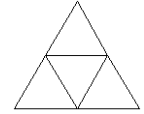

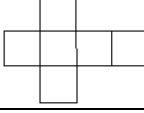
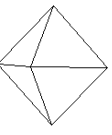
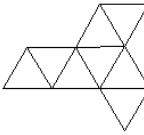

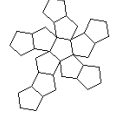
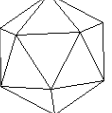
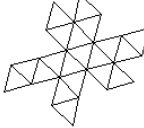
### Poliedro regular

Poliedro regular es aquel que tiene todas las caras polígonos regulares iguales y todos los vértices son del mismo orden.

Poliedros regulares sólo hay 5.

|   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|--|
|  |  |  |  |  |
| Tetraedro   | Cubo o hexaedro   | Octaedro  | Dodecaedro  | Icosaedro  |

## Desarrollo del poliedros regular. Áreas y volúmenes.

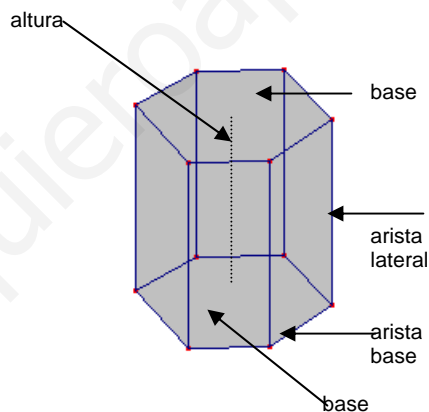
| Nombre     |   | Desarrollo  | área                              | Volumen                              |
|------------|---|---|-----------------------------------|--------------------------------------|
| Tetraedro  |  |  | $A = a^2 \sqrt{3}$                | $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$        |
| Cubo       |  |  | $A = 6a^2$                        | $V = a^3$                            |
| Octaedro   |  |  | $A = 2a^2 \sqrt{3}$               | $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$         |
| Dodecaedro |  |  | $A = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ | $V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$ |
| Icosaedro  |  |  | $A = 5a^2 \sqrt{3}$               | $V = \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5})$ |

## Otros poliedros: Prismas y pirámides.

### Prisma.

Los prismas son los poliedros que tienen dos caras (polígonos) iguales y paralelas llamadas bases y las otras caras laterales son paralelogramos.

Según sean los polígonos base los prismas es clasifican en: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.



Llamamos altura de un prisma a la distancia entre las dos bases.

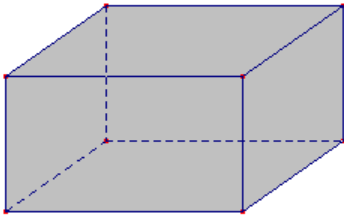
### Prisma regular.

Se llama prisma regular al prisma recto que las bases son polígonos regulares.

### Paralelepípedo.

Un paralelepípedo es un prisma que las bases son paralelogramos, es decir, tiene 6 caras paralelas dos a dos.

Los paralelepípedos rectos se llaman ortoedros.



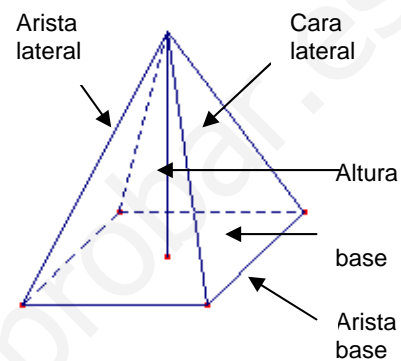
Ortoedro o paralelepípedo recto

El ortoedro tal que todas las caras son cuadrados iguales se llama cubo o hexaedro.

### Pirámide.

Las pirámides son los poliedros que una de las caras (llamada base) es un polígono y las otras caras (llamadas laterales) son triángulos que tienen un vértice común.

Según sean los polígonos base las pirámides se clasifican en: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.



Llamamos altura de una pirámide a la distancia entre el vértice y la base.

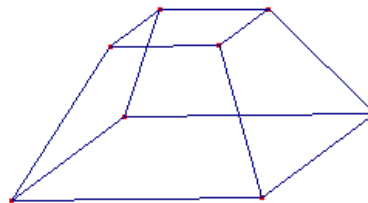
### Pirámides regulares.

Las pirámides regulares son las que tienen por base un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Se llama apotema de una pirámide regular a la altura de cualquier triángulo de la cara lateral.

### Tronco de pirámide

Tronco de pirámide es la parte de pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a la base.



### Áreas de prismas y pirámides.

#### Prisma recto:

$$S = 2S_b + S_L$$

$S_b$  área del polígono base

$S_L$  área lateral,  $S_L = P \cdot h$ ,

donde P es el perímetro de la base y h es la altura

**Pirámide regular:**

$$S = S_b + S_L$$

$S_b$  área del polígono regular base

$S_L$  área lateral,  $S_L = \frac{P \cdot ap}{2}$ , donde P es el perímetro de la base y ap es la altura de la cara lateral (apotema)

**Tronco de pirámide regular:**

$$S = S_B + S_b + S_L$$

$S_B$  área del polígono regular base mayor.  $S_b$  área del polígono regular base menor.  $S_L$  área lateral que son trapecios.

**Volúmenes de prismas y pirámides.****Prisma:**

$$V = S_b \cdot h$$

$S_b$  área del polígono base, h es la altura.

**Pirámide:**

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

$S_b$  área del polígono base, h es la altura.

**Tronco de pirámide:**

$$V = \frac{1}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b})h$$

donde  $S_B$  área del polígono regular base mayor.  $S_b$  área del polígono regular base menor. h es la altura del tronco de pirámide.

Ejercicios de autoaprendizaje:

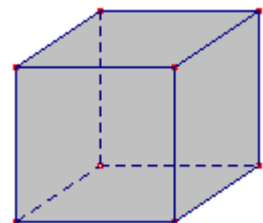
a) Observa el cubo y prueba que cumple el teorema de Euler:

El cubo o hexaedro tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas.

Entonces:  $C+V=A+2$

$$6 + 8 = 12 + 2$$

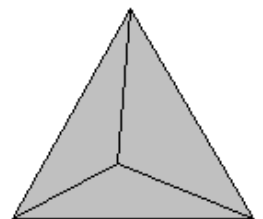
Para comprobar el teorema de Euler de los poliedros es conveniente construirlos.



b) Calcula la arista y el volumen de un tetraedro de superficie  $100\text{cm}^2$ .

El área o superficie de un tetraedro es  $A = a^2\sqrt{3}$  donde a es la arista.

Entonces  $100 = a^2\sqrt{3}$ , de donde  $a^2 = \frac{100}{\sqrt{3}}$



Por tanto, la arista mide  $a = \sqrt{\frac{100}{\sqrt{3}}} \approx 7'598\text{cm}$

El volumen de un tetraedro es  $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

Entonces el volumen es  $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \approx \frac{7'598^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \approx 51'693\text{cm}^3$

c) Calcula el área y el volumen de un prisma regular de base cuadrangular que tiene por arista de la base 3cm y altura 6cm.

La superficie del prisma es  $S = 2S_b + S_L$

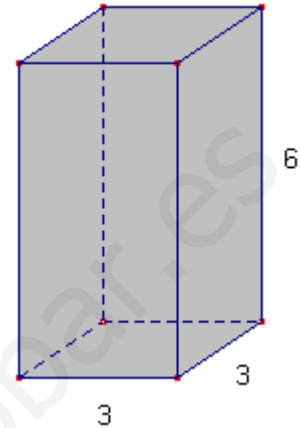
La base es un cuadrado de lado 3 y la superficie lateral está formada por 4 rectángulos de lados 3cm y 6cm.

Entonces,

$$S = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot (3 \cdot 6) = 90\text{cm}^2$$

El volumen de un prisma es  $V = S_b \cdot h$

$$\text{Entonces, } V = 3^2 \cdot 6 = 54\text{cm}^3$$



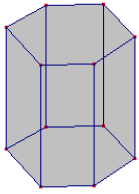
Problemas Propuestos:

1. Observa los poliedros regulares (platónicos) prueba que cumplen el teorema de Euler. Completa la tabla:

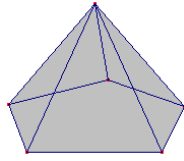
| Nombre     |  | Caras | Vértices | Aristas |
|------------|--|-------|----------|---------|
| Tetraedro  |  |       |          |         |
| Cubo       |  | 6     | 8        | 12      |
| Octaedro   |  |       |          |         |
| Dodecaedro |  |       |          |         |
| Icosaedro  |  |       |          |         |

2 Observa el prisma hexagonal y prueba que cumple el teorema de Euler.

3 Observa la pirámide pentagonal y prueba que cumple el teorema de Euler.

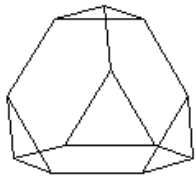


Prisma hexagonal

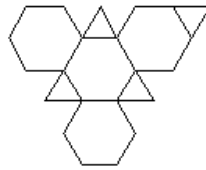


pirámide pentagonal

4 Observa el tetraedro truncado y prueba que cumple el teorema de Euler.



tetraedro truncado

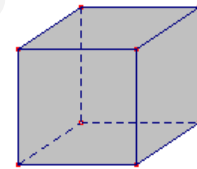


desarrollo del tetraedro truncado

5 Calcula el área y el volumen de un cubo de arista 10cm

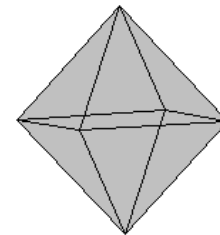
6 Calcula el volumen y la arista de un cubo de superficie  $96\text{cm}^2$

7 Calcula el área y la arista de un cubo de volumen  $800\text{cm}^3$ .



8 Calcula el área y el volumen de un octaedro de arista 20cm.

9 Calcula el área, el volumen y la arista de un octaedro de área  $400\text{cm}^2$



10 Calcula el área y el volumen de un prisma regular hexagonal que tiene arista de la base 3cm y altura 5cm.

11 Calcula el área y el volumen de un prisma regular triangular que tiene arista de la base 20cm y altura 10cm.

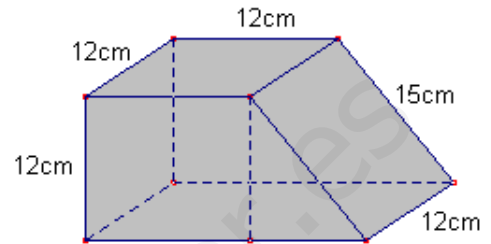
12 Calcula el área y el volumen de una pirámide regular de base cuadrangular que tiene arista de la base 30cm y altura 40cm.

13 Calcula el área y el volumen de una pirámide de base cuadrangular que tiene arista de la base 20cm y apotema 30cm.

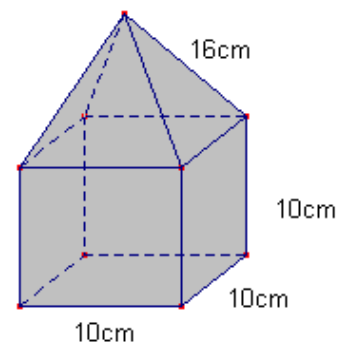
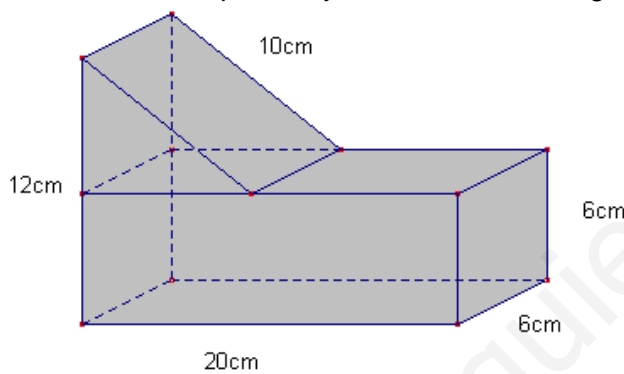
14 Calcula el área y el volumen de un ortoedro de aristas 6cm, 8cm, 10cm.

15 Calcula el volumen de un prisma cuadrangular de arista de la base 4 y altura h.  
Calcula el volumen de una pirámide de base cuadrangular de base 4 y altura h.  
Calcula la proporción de los dos volúmenes.

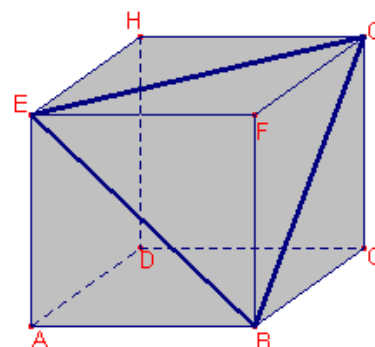
16 Calcula la superficie y el volumen de la siguiente figura:



17 Calcula la superficie y el volumen de la siguiente figura:



18 Calcula el área y el volumen de la siguiente figura.



19 Consideremos el cubo ABCDEFGH de arista 10cm.  
Dentro del cubo construimos la pirámide BGEF.  
Calcula el área y el volumen de la pirámide BGEF.  
En que proporción están el volumen del cubo y el de la pirámide.

# CUERPOS DE REVOLUCIÓN

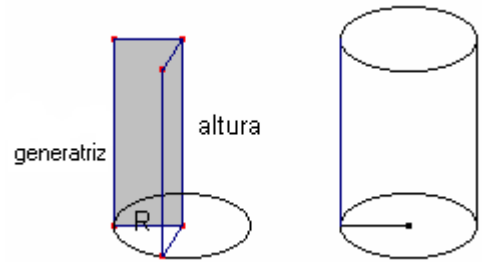
## Cilindro recto

El cilindro recto es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de un lado.

El lado del rectángulo que permanece fijo se llama altura.

Al lado opuesto se llama generatriz.

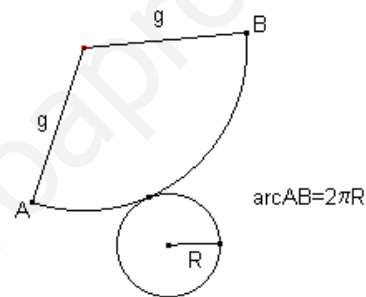
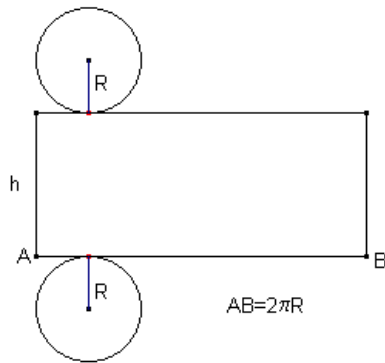
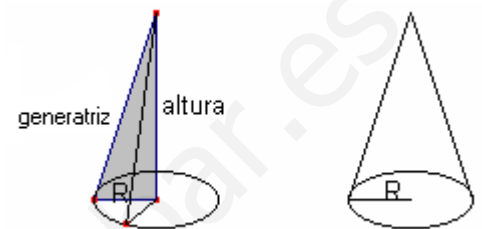
Los otros dos lados son los radios de los círculos que forman la base.



## Cono recto

El cono recto es el cuerpo geométrico que se obtiene cuando un triángulo rectángulo gira sobre uno de los catetos.

El lado que actúa como eje se llama altura, el otro cateto se llama radio y a la hipotenusa se llama generatriz.

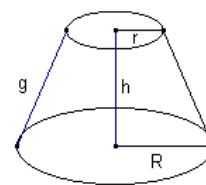


Desarrollo del cilindro recto

Desarrollo del cono recto

## Tronco de cono recto

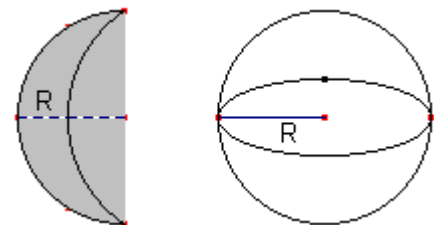
En cortar un cono recto por una sección paralela a la base se obtiene un cono y un tronco de cono que es la parte comprendida entre las dos bases.



## La esfera

La esfera es el cuerpo geométrico que se obtiene por la revolución de un semicírculo al girar sobre el diámetro.

El radio del semicírculo se llama radio de la esfera.





## Áreas de cuerpos redondos.

| Cilindro recto:  | Cono recto:  | Tronco de cono recto:  | Esfera:                     |
|--|--|--|-----------------------------|
| $S = 2 \cdot S_b + S_L$<br>$S_b = \pi \cdot R^2$<br>$S_L = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$<br>$S = 2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ | $S = S_b + S_L$<br>$S_b = \pi \cdot R^2$<br>$S_L = \pi \cdot R \cdot g$<br>$S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g$ | $S = S_B + S_b + S_L$<br>$S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 + \pi(R+r)g$ | $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ |

$S_b$  área base,  $S_L$  área lateral

## Volúmenes de cuerpos redondos.

| Cilindro:                                 | Cono:   | Tronco de cono:                              | Esfera:                               |
|---|---|--|---------------------------------------|
| $V = S_b \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$ | $V = \frac{S_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$ | $V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$ | $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ |

Ejercicios de autoaprendizaje

a) Calcula el área y el volumen de un cono recto de radio 30cm y altura 40cm.

Solución:

$$S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g \quad V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

Recordemos que este cono se obtiene por revolución de un triángulo rectángulo de altura 40cm y radio de la base 30cm

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$g^2 = R^2 + h^2$$

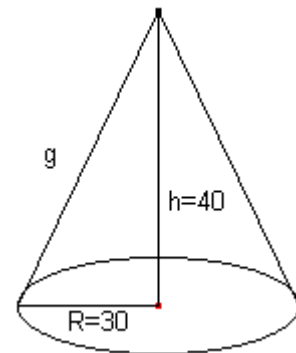
$$g^2 = 30^2 + 40^2, \quad g^2 = 2500$$

Por tanto, la generatriz mide  $g = 50\text{cm}$

Entonces:

$$S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot 30^2 + \pi \cdot 30 \cdot 50 = 2400\pi \approx 7539'82\text{cm}^2$$

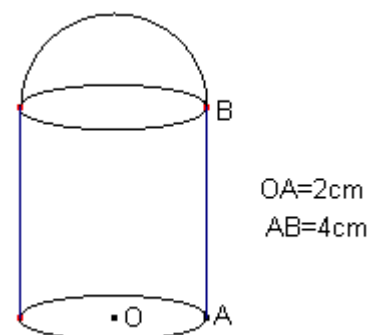
$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 40}{3} = 12000\pi \approx 37699'11\text{cm}^3$$



b) Calcula la superficie y el volumen de la siguiente figura:

Solución:

La figura está formada por un cilindro recto de radio  $R=2\text{cm}$  y altura  $h=4\text{cm}$  y una semiesfera de radio  $R=2$



La superficie está formada por la del cilindro sin una base y media esfera.

$$S = \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{2}$$

$$S = \pi \cdot 2^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 28\pi \approx 87'96\text{cm}^2$$

El volumen es la suma del volumen del cilindro y la semiesfera.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{80}{3}\pi \approx 83'78\text{cm}^3$$

Problemas Propuestos:

- 1 Calcula la superficie y el volumen de una esfera de radio  $R=10\text{cm}$
- 2 Calcula la superficie y el volumen de un cilindro de radio  $R=10\text{cm}$  y altura  $h=20\text{cm}$
- 3 Calcula la superficie y el volumen de un cono recto de radio  $R=20\text{cm}$  y generatriz  $g=30\text{cm}$
- 4 Calcula el radio y el volumen de una esfera de superficie  $S = 100\text{cm}^2$

5 Calcula el radio y la superficie de una esfera de volumen  $V = 500\text{cm}^3$

6 Calcula el peso de una esfera maciza de hierro de radio  $R=10\text{cm}$ .

La densidad del hierro es  $7873 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

7 Calcula el radio de una esfera maciza de hierro que pesa  $50\text{kg}$ .

8 Calcula el peso de un cable cilíndrico de hierro macizo de radio  $R=1\text{cm}$  y  $20\text{m}$  de largo.

9 Calcula la superficie y el volumen de un cono truncado de radio mayor  $R=10\text{cm}$ , radio menor  $r=4\text{cm}$  y altura  $h=8\text{cm}$

10 ¿Cuántos litros de agua caben en un cilindro de radio  $2\text{m}$  y altura  $4\text{m}$ ?

11 Calcula la superficie y el volumen de las siguientes figuras:

