# Tema 11. Geometría en el espacio

## Contenido

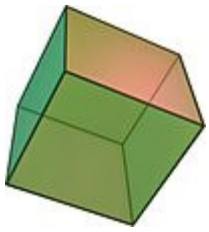
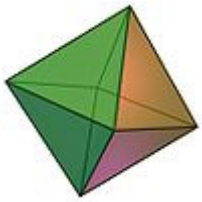

1. **Poliedros Regulares o sólidos Platónicos** ..... 2
2. **Teorema de Euler** ..... 3
3. **Prismas** ..... 3
4. **Pirámides** ..... 5
5. **Cilindro** ..... 7
6. **Cono** ..... 8
7. **Esfera** ..... 9
8. **Coordenadas esféricas, latitud longitud** ..... 11

## 1. Poliedros Regulares o sólidos Platónicos

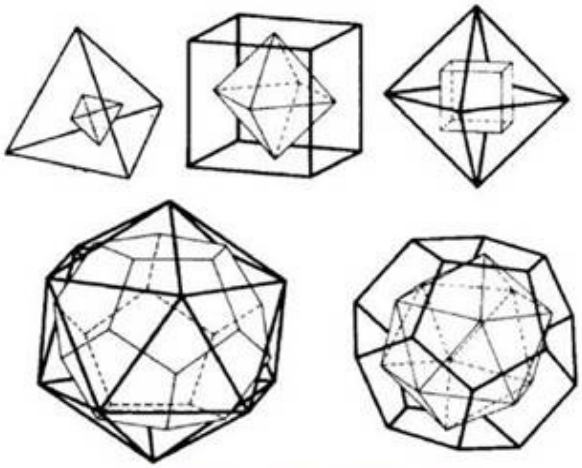
Antes de definir los poliedros regulares veamos la definición de poliedro.

***Poliedro***: son cuerpos geométricos cerrados formados por polígonos (caras del poliedro) y que se unen formando las aristas. Los puntos donde se unen las aristas son los vértices

***Los poliedros regulares*** son aquellos formado por caras iguales que además son polígonos regulares. Sólo hay 5, y se llaman Platónicos porque fue este al que se considera que fue el primero en estudiarlo. Los 5 poliedros platónicos son (tabla de wikipedia):

| **Sólidoos Platónicos** | Tetraedro | Hexaedro, Cubo | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro |
|---|---|---|---|---|---|
| | |  |  | | |
| Número de caras | 4 | 6 | 8 | 12 | 20 |
| Polígonos en las caras | Triángulos Equiláteros | Cuadrados | Triángulos Equiláteros | Pentágonos Regulares | Triángulos Equiláteros |
| Número de aristas | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |
| Número de vértices | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |

***Nota***: podemos ver que los vértices del cubo y las caras del octaedro están permutadas y lo mismo con el dodecaedro y el icosaedro, se dice que estos poliedros son conjugados, pues si ponemos los vértice en la mitad de las caras de uno obtenemos el otro y al revés. El tetraedro en cambio es conjugado consigo mismo:



La dualidad de los sólidos platónicos

## 2. Teorema de Euler

El teorema de Euler relaciona el número de caras (C), vértices (V) y aristas (A) de todo poliedro convexo (sin orificios, ni entrantes), cumpliéndose:

**C+V=A+2**

Veamos el teorema aplicado a los poliedros regulares descritos anteriormente

Tetraedro (C=4, V=4,A=6): 4+4=6+2

Cubo: (C=6, V=8, A=12): 6+8=12+2

Octaedro (C=8, V=6, A=12): 8+6=12+2

Dodecaedro (C=12, V=20, A=30): 12+20=30+2

Icosaedro (C=20, V=12, A=30): 20+12=30+2

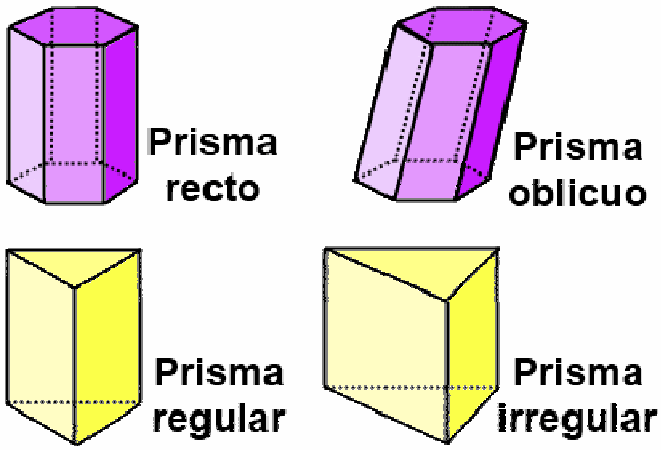
## 3. Prismas

Los ***prismas*** son poliedros formado por dos caras (bases) iguales y por tantos paralelogramos que forman el área lateral como lados tengan las bases.

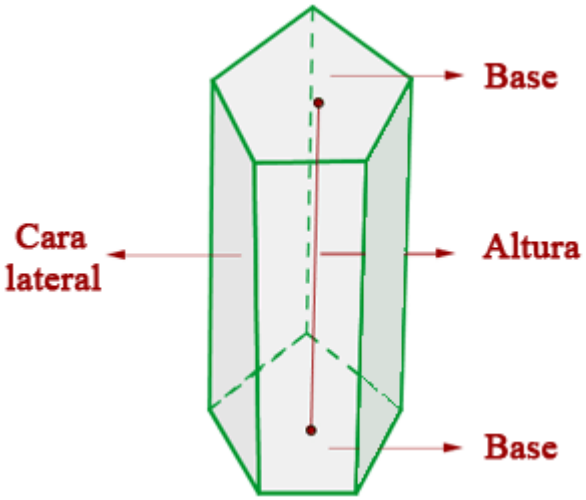
Clasificación de prismas:

- ***Prismas rectos:*** Son aquellos cuyas caras laterales son rectángulos o cuadrados. Sus aristas laterales son perpendiculares a las bases y coinciden con la altura del prisma. Sus bases encima una de la otra
- ***Prismas oblicuos***: Son aquellos cuyas caras laterales son paralelogramos que no son rectángulos ni cuadrados. Sus aristas laterales no son perpendiculares a las bases y son mayores que la altura de prisma. Sus bases no están una encima de la otra.

Los prismas rectos pueden ser además ***primas regulares*** si sus bases es un polígono regular.



***Partes de un prisma:***



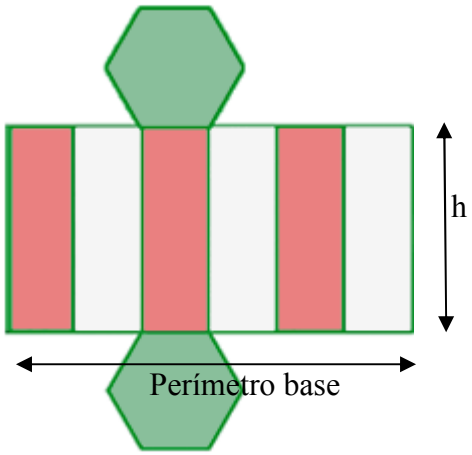

***Volumen de un prisma:*** el volumen de un prisma es igual al área de la base por su altura. Se cumple por tanto que dos prismas con misma base y altura pero uno recto y otro oblicuo tienen mismo volumen.

$$V=A_{base}\cdot h$$

***Área de un prisma:*** es igual a la suma del área lateral más dos veces el área de la base. Si el prisma además es recto se puede calcular el área lateral desarrollando los rectángulos laterales para dar lugar a un rectángulo de dimensiones la altura del prisma y el perímetro de la base:

$$A=A_{lateral}+2\cdot A_{base}$$

$$A_{lateral}=perimetro_{base}\cdot h \text{ (sólo en prismas rectos)}$$



**Ejercicio1:** Calcular el área y el volumen de los siguientes poliedros

a) Poliedro recto de base rectangular de lados 4cm, 5cm y altura 6cm.
b) Poliedro regular de base triangular de lado 8m y altura 10m
c) Poliedro regular de base hexagonal de lado 6 dm y altura 4dm.

**Ejercicio 2.** Calcular la diagonal del poliedro del apartado a)

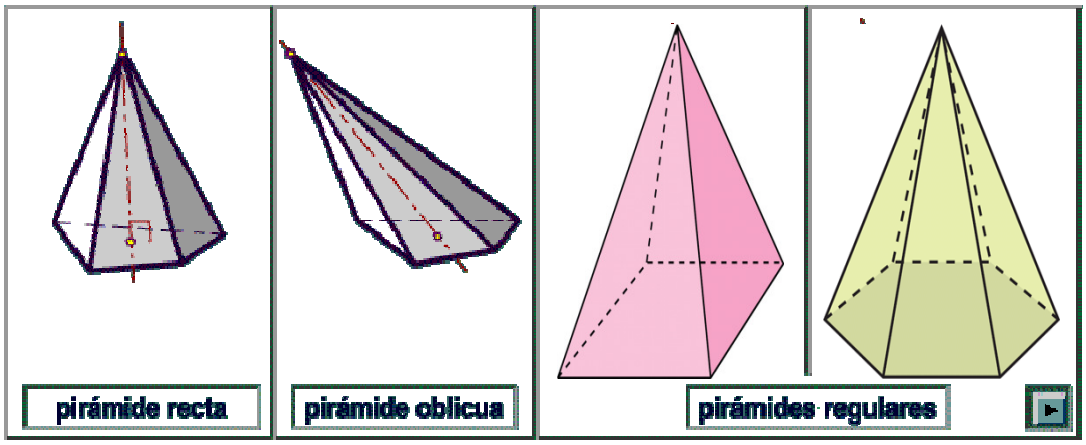
## 4. Pirámides

Una pirámide es un poliedro limitado por una base, que es un polígono con una cara; y por caras, que son triángulos coincidentes en un punto denominado vértice o cúspide.

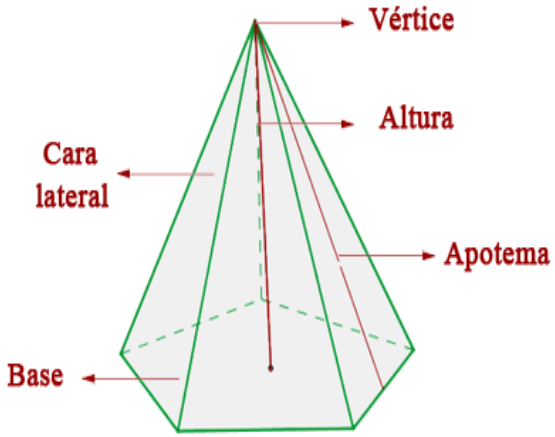
Clasificación de pirámides:

- ***Pirámides rectas:*** Son aquellas cuyas caras laterales son triángulos isósceles o equiláteros. Su cúspide justo encima del centro de la base.
- ***Pirámides oblicuas***: Son aquellas cuyas caras laterales son triángulos escalenos. Su cúspide no está encima de la base.

Las pirámides rectas pueden ser además ***pirámides regulares*** si su base es un polígono regular.




***Partes de una pirámide***




***Volumen de una pirámide:*** es igual a un tercio del área de la base por su altura. Se cumple por tanto que dos pirámides con misma base y altura pero una recta y otra oblicua tienen mismo volumen. Una curiosidad es que el volumen de una pirámide con misma base y altura que un prisma es una tercera parte de este, por tanto si queremos llenar de líquido un prisma con una pirámide de mismas dimensiones necesitamos usar tres veces la pirámide.

$$V=\frac{Abase \cdot h}{3}$$

***Área de una pirámide:*** es igual a la suma del área lateral más el área de la base. Si la pirámide además es recta se cumple que el área lateral es igual al perímetro de la base por la apotema de la pirámide partido por dos

$$A=A_{lateral}+A_{base}$$

$$A_{lateral}= perim_{base} \cdot apotema \text{ (sólo en rectas)}$$

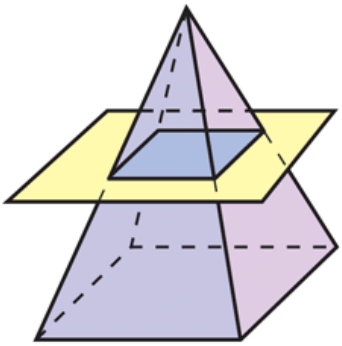
**Ejercicio 3:** Calcular el área y el volumen de las siguientes pirámides

a) Pirámide recta de base cuadrada de lado 4cm y altura 10cm.
b) Pirámide regular de base cuadrada de apotema 10m y altura 20m
c) Pirámide regular de base cuadrada de apotema 16 dm y lado 6 dm.

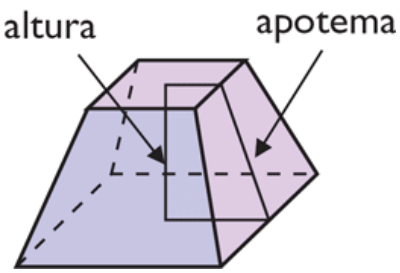
***Tronco de pirámide:*** El tronco de pirámide es un poliedro comprendido entre la base de la pirámide y un plano que corta a todas las aristas laterales. Sus caras laterales son trapecios.

$$V=V_{piramide\ Grande}-V_{piramide\ pequeña}$$

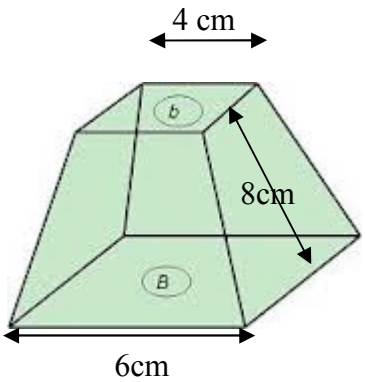
$$A=A_{base1}+A_{base2}+A_{lateral} \qquad A_{lateral}=A_{trapecipo} \cdot n^{o}_{lados\ la\ base}$$



*Nota:* los volúmenes de las dos pirámides se pueden relacionar por semejanza, de forma que si la pirámide grande es k veces las pequeña su volumen es $k^3$. De esta forma no es necesario calcular los dos volúmenes.



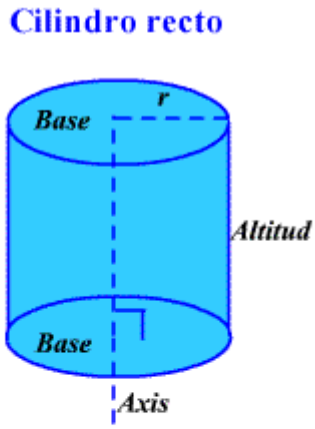

**Ejercicio 4:** calcular el área y el volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas de lados 6 y 4 cm y de apotema 8dm.




## 5. Cilindro

El cilindro es un sólido con dos bases circulares y una parte lateral curva entre ambas

***Clasificación***: igual que los anteriores



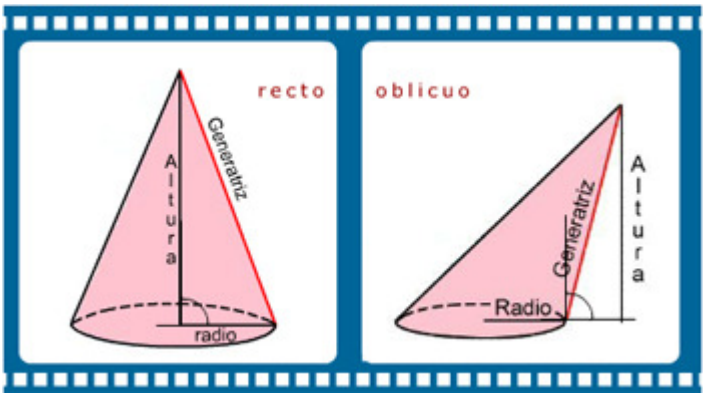
**Volumen= $V=A_{base}\cdot h$**

**$A=A_{lateral}+2\cdot A_{base}$** **$A_{lateral}=perimetro_{base}\cdot h=2\pi r\cdot h$**

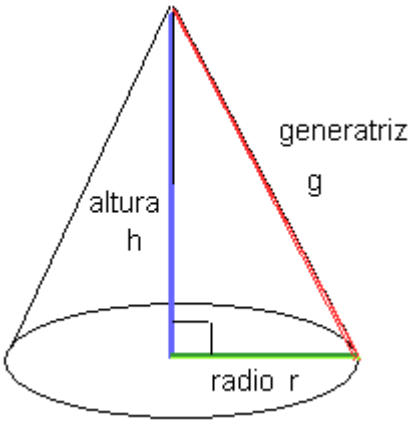
## 6. Cono

En geometría, un cono recto es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Clasificación: igual que los anteriores, pero ahora ni tiene sentido el concepto de cono regular pues la base es un círculo.




Partes de un cono




***Volumen cono:*** igual que la pirámide $V=\frac{Abase\cdot h}{3}$

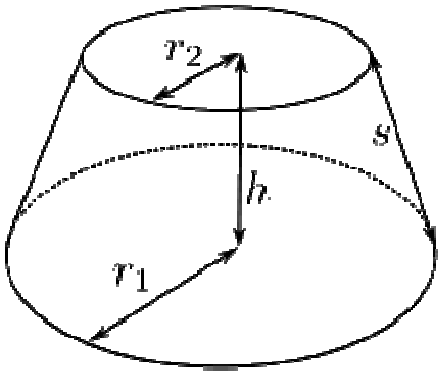
***Área de un cono:*** es igual a la suma del área lateral más el área de la base. El área lateral es un sector circular de radio la generatriz del cono (g), cuyo área es

$A=A_{lateral}+A_{base}$ $A_{lateral}=\pi\cdot r\cdot g$ (sólo en rectas)

***Tronco de cono:*** El tronco de cono es una figura comprendido entre la base del cono y un plano que corta a todas las aristas laterales.

$V=V_{\text{cono Grande}}-V_{\text{como pequeño}}$

$A=A_{base1}+A_{base2}+A_{lateral}$ $\quad A_{lateral}= A_{\text{cono Grande}}-A_{\text{como pequeño}}$




*Nota:* los volúmenes de los dos conos se pueden relacionar por semejanza, de forma que si el cono grande es k veces el pequeño su volumen es $k^3$. De esta forma no es necesario calcular los dos volúmenes.

**Ejercicio 5:** calcular el área y el volumen de un de cono de base con radio de 10m y altura de 12m.

**Ejercicio 6:** calcular el área y el volumen de un tronco de cono de bases con radios de 2cm y 8cm y de altura de 5cm

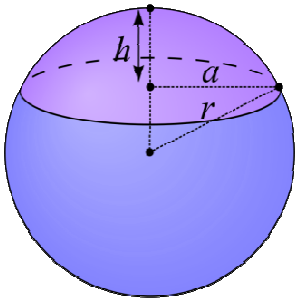
## 7. Esfera

***Superficie esférica*** es un lugar geométrico o el conjunto de los puntos del espacio cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro. Los puntos cuya distancia es menor que la longitud del radio forman el interior de la superficie esférica. La unión del interior y la superficie esférica se llama ***esfera***. La esfera, como sólido de revolución, se genera haciendo girar una superficie semicircular alrededor de su diámetro

**V=——**

**$A=4\pi r^2$**

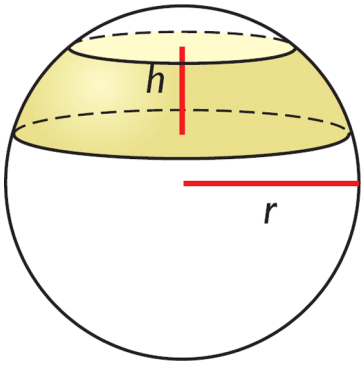
***Un casquete esférico,*** en geometría, es la parte de una esfera cortada por un plano. Si dicho plano pasa por el centro de la esfera, lógicamente, la altura del casquete es igual al radio de la esfera, y el casquete esférico será un hemisferio (***semiesfera***).




**V=————**

**$A=\pi\cdot(a^2+h^2)$**

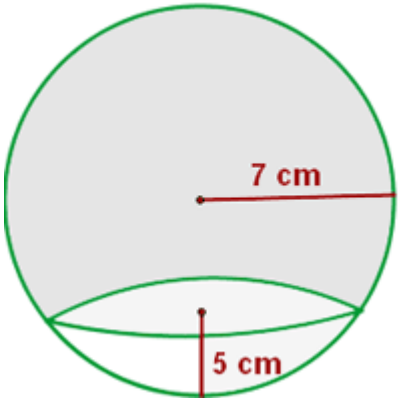
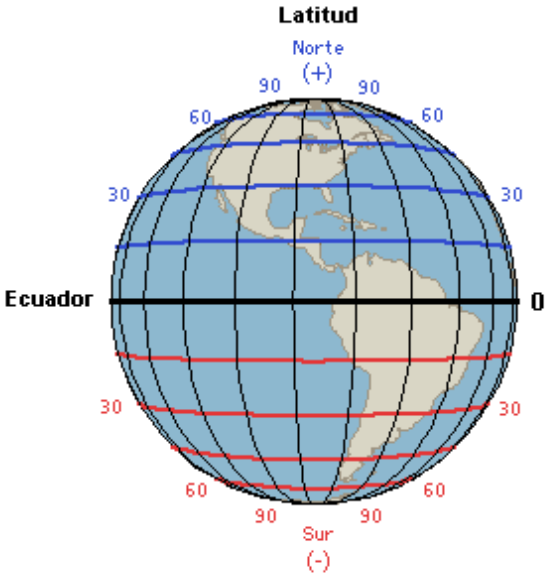
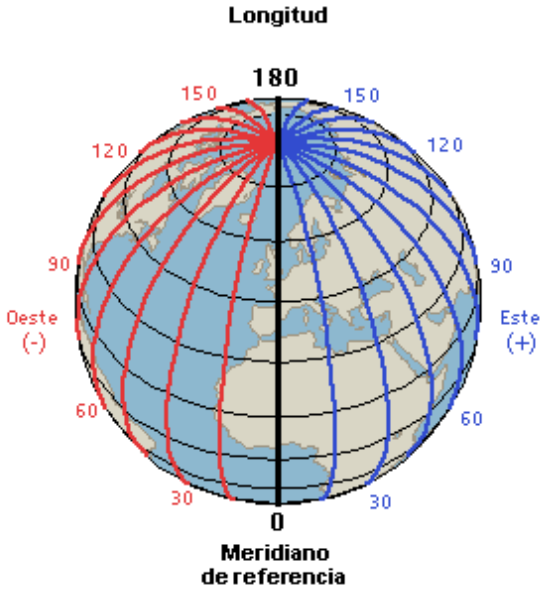
***Zona esférica*** a la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos entre si y que cortan a dicha esfera




**$V=V_{casquete\ grande}-V_{casquete\ pequeño}$**

**$A=A_{casquete\ grande}-A_{casquete\ pequeño}$**

**Ejercicio 7:** Calcular el volumen y la superficie de un casquete esférico de las siguientes dimensiones:



## 8. Coordenadas esféricas, latitud longitud