Página 145

Resuelve

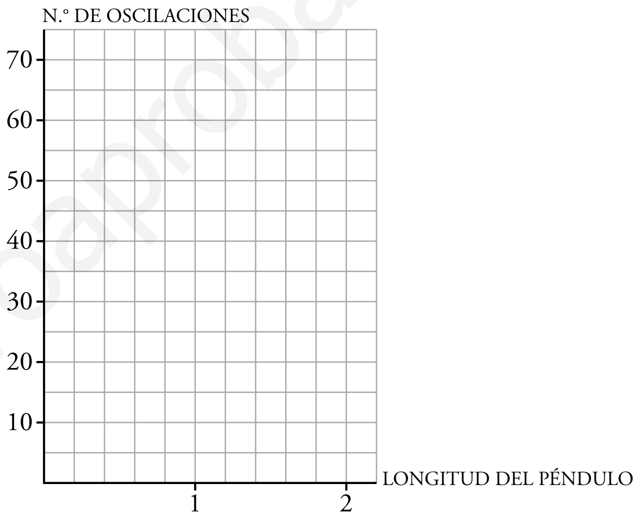
1. Busca información: ¿Qué matemático introdujo la notación $f(x)$ para las funciones?

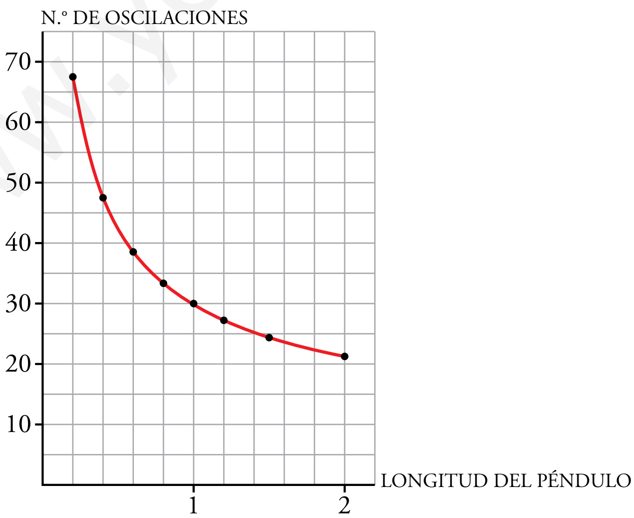
Leonhard Euler.

2. Supón que realizamos un experimento similar al del joven Galileo, con el péndulo, y obtenemos los siguientes resultados (siendo "l" la longitud del péndulo y "n" el número de oscilaciones por minuto):

l	2	1,50	1,20	1	0,80	0,60	0,40	0,20
n	21	24,5	27,5	30	33,5	38,5	47,5	67

Representa estos datos en tu cuaderno elaborando un sistema de referencia como el que te presentamos a continuación. Observa que los valores de la tabla responden bastante bien a la relación: $n = \dfrac{30}{\sqrt{l}}$





Con calculadora: 30 ÷ √ 2 = 21.21320343 ≈ 21

30 ÷ √ 1,5 = 24.49489742 ≈ 24,5

Etcétera.

1 Las funciones y sus gráficas

Página 146

1. Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Qué altura lleva cuando va del embalse al incendio?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja para coger agua? ¿Y para apagar el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 320 m de altura?

a) Lleva una altura de 280 m.

b) A los 20 min estaba a 60 m del suelo.

Baja casi a altura 0 para coger el agua.

El helicóptero apaga el fuego a los 20 minutos de salir de la base, a 60 m del suelo.

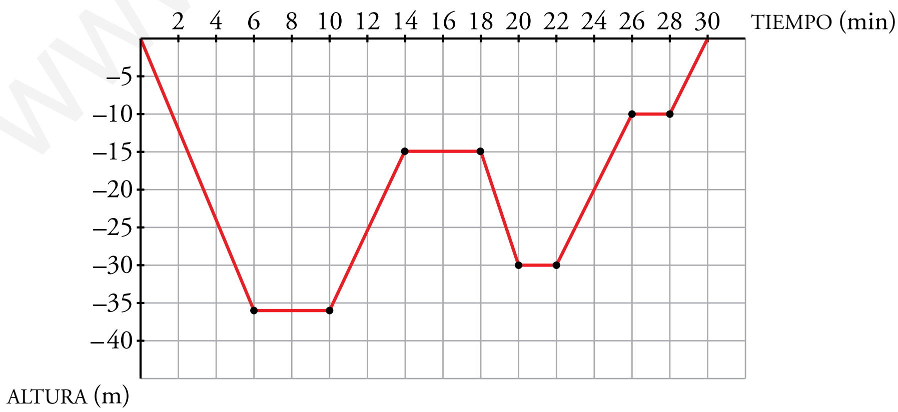
c) Para llenar el depósito de agua necesita 2 minutos.

Para apagar el fuego necesita 1 minuto.

d) Sube a una velocidad media de $v = \dfrac{320}{3} = 106{,}7$ m/min.

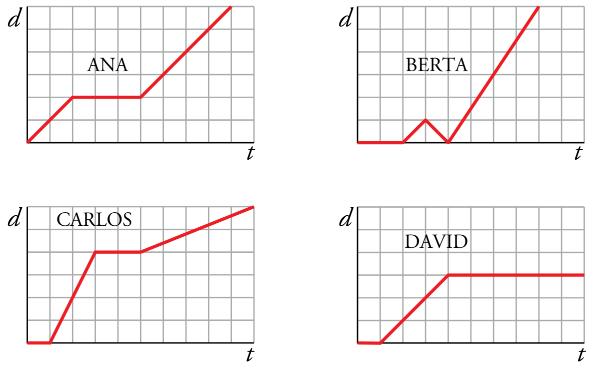
2. Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.



Página 147

3. Cuatro hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (*d*) - tiempo (*t*) de cada uno:



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos de ellos han ido a buscar a sus amigos para ir juntos a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál de ellos se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo parado?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

2 Crecimiento y decrecimiento de una función

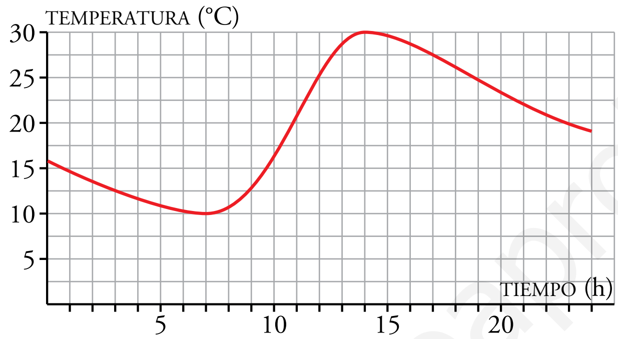
Página 148

1. La gráfica de abajo da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

Página 149

2. **La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:**

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

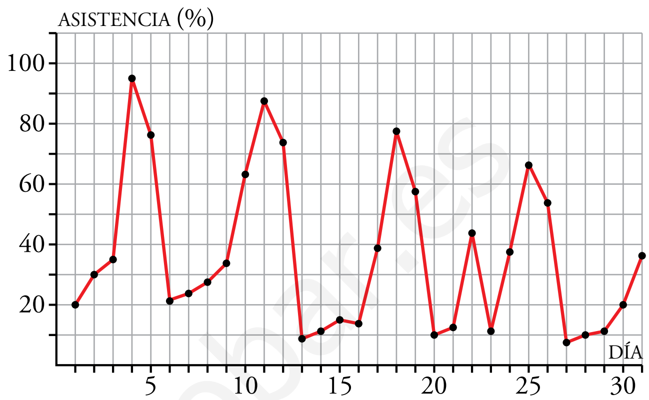
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

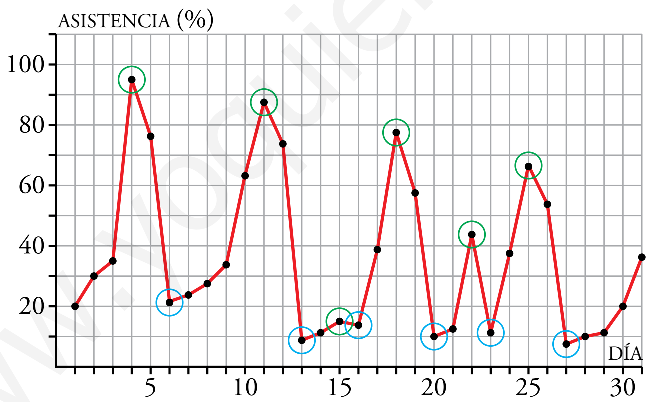
f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?



a) Son fines de semana los días 4, 5, 11, 12, 18, 19, 25 y 26. Deducimos que son esos días porque son los días en los que más espectadores van al cine.

b) El día 4 hubo más espectadores y el 27 hubo menos espectadores. Estos días son sábado y lunes, respectivamente.

c) La gráfica tiene 6 máximos (en verde) y 6 mínimos (en azul).



d) El miércoles 22. Es el día entre semana con mayor asistencia.

e) La asistencia es mayor durante los fines de semana, en particular en el primero. A lo largo del mes se puede observar que va disminuyendo con respecto a la primera semana. Desde el lunes al sábado la gráfica es creciente, es decir, el porcentaje de asistencia va aumentando, mientras que del sábado al lunes decrece. Los días de mayor porcentaje de asistencia son los sábados, en general. Sin embargo, en los días 15 y 22 podemos ver dos máximos. El día 22 fue día festivo, y podemos apreciar un considerable aumento de asistencia con respecto a los días anterior y posterior.

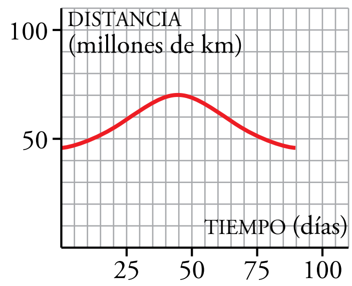
f) El día 3. Es el viernes con la asistencia más baja.

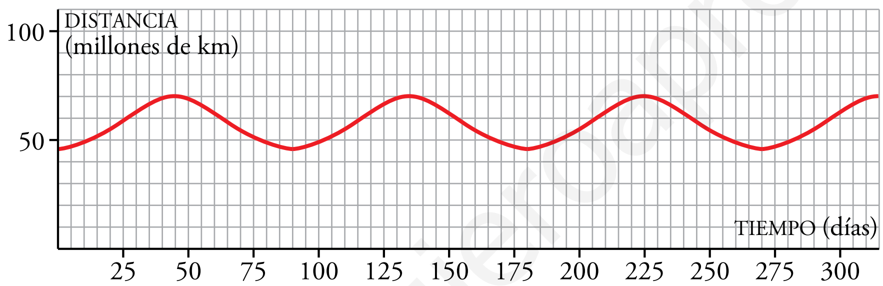
3 Tendencias de una función

Página 150

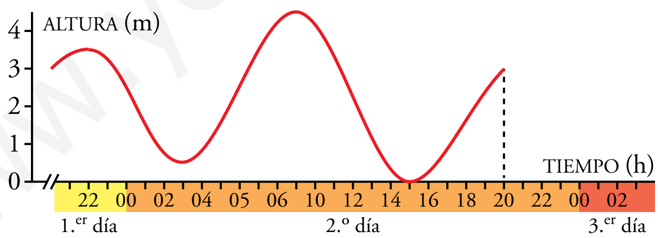
1. Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.

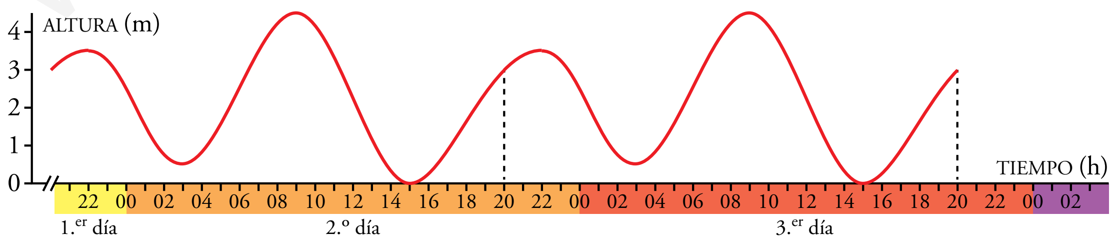
Copia y completa en tu cuaderno la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.





2. La siguiente gráfica muestra la elevación de la marea en un determinado lugar a lo largo de 24 horas. Cópiala en tu cuaderno y complétala para 48 horas suponiendo que es una función periódica:





4 Discontinuidades. Continuidad

Página 151

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

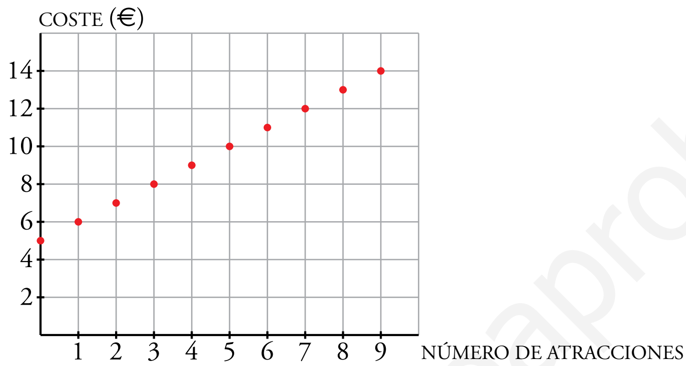
a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta → coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

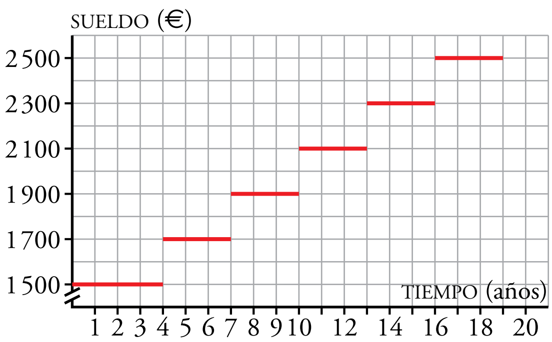
Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

2. La gráfica de abajo muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, el trabajador lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

5 Expresión analítica de una función

Página 152

1. Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

La fórmula que deben cumplir para que sean como el ejemplo anterior es $A = x(40 - x)$.

a) $1 \cdot 39 = 39 = A \rightarrow$ Sí es igual.

b) $5 \cdot 35 = 175 \neq 35 \rightarrow$ No es igual.

c) $22 \cdot 18 = 396 = A \rightarrow$ Sí es igual.

d) El área no puede ser negativa.

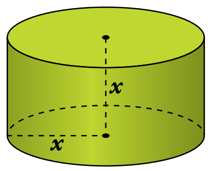
Página 153

2. Imagina un cilindro cuya altura, x, sea igual al radio de su base.

a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen?

Recuerda que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

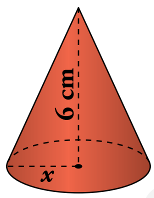
b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro.



a) $V = \pi x^2 \cdot x \to V = \pi x^3$

b) $A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \to A = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \to A = 4\pi x^2$

3. Indica cuál es la expresión analítica del volumen de un cono sabiendo que su altura son 6 cm y el radio de su base es variable.



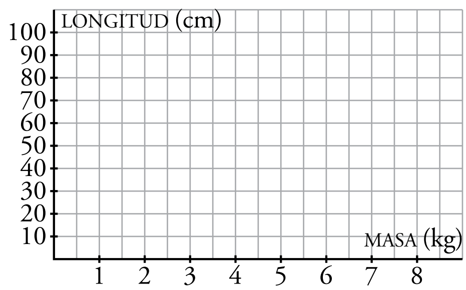
Recuerda que el volumen de un cono es 1/3 del área de la base por la altura.

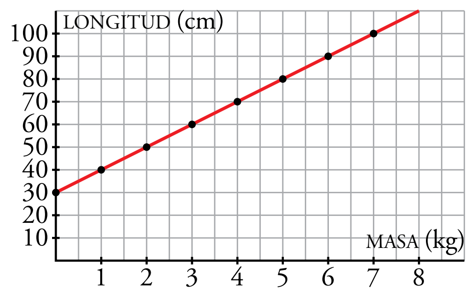
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 6 \to V = 2\pi x^2$

4. Un muelle mide 30 cm y se alarga otros 10 cm por cada kilogramo que se cuelga de él. Pero no se pueden colgar más de 7,5 kg.

La función que relaciona la longitud, L, del muelle con la masa, m, que soporta es: $L = 30 + 10m$.

Represéntala en tu cuaderno en unos ejes cartesianos como estos:





Página 154

Hazlo tú

Comprueba que A (III) pasa por (2, 3) y (4, 1); B (IV) pasa por (1, 3), (2, 4), (3, 3) y (4, 0); C (I) pasa por (1, 2), (2, 1), (3, 2) y (4, 5) y D (II) pasa por (6, 5). Además, en esta última, cuando x se hace grande, la variable y se va acercando a 6. Para verlo, calcula, por ejemplo, el valor de y para $x = 100$ y para $x = 1\,000$.

- $y = 5 - x$

  Si $x = 2 \to y = 5 - 2 = 3$

  Si $x = 4 \to y = 5 - 4 = 1$

- $y = 4x - x^2$

  Si $x = 1 \to y = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$

  Si $x = 2 \to y = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$

  Si $x = 3 \to y = 4 \cdot 3 - 3^2 = 3$

  Si $x = 4 \to y = 4 \cdot 4 - 4^2 = 0$

- $y = x^2 - 4x + 5$

  Si $x = 1 \to y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 2$

  Si $x = 2 \to y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$

  Si $x = 3 \to y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 2$

  Si $x = 4 \to y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 5$

- $y = 6 - \dfrac{6}{x}$

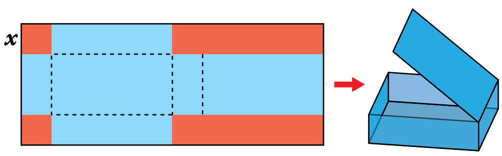
  Si $x = 6 \to y = 6 - \dfrac{6}{6} = 5$

  Si $x = 100 \to y = 6 - \dfrac{6}{100} = 5{,}94$

  Si $x = 1\,000 \to y = 6 - \dfrac{6}{1\,000} = 5{,}994$

Hazlo tú

Con una cartulina de 30 cm × 12 cm deseamos construir una caja con tapa, recortando y plegando como en la figura. Halla la expresión analítica del área de la base y del volumen de la caja en función de x. Calcula el área y el volumen cuando $x = 3$ cm.



$A = (15 - x)(12 - 2x)$

$V = (15 - x)(12 - 2x)\,x$

Si $x = 3 \to \begin{cases} A = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2 \\ V = 12 \cdot 6 \cdot 3 = 216 \text{ cm}^3 \end{cases}$

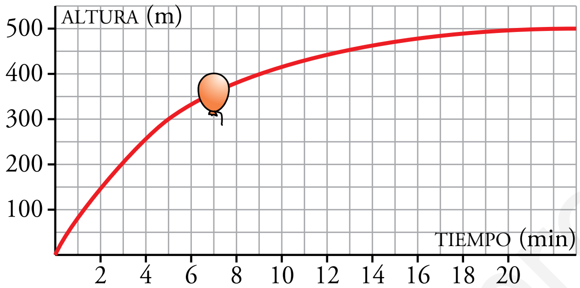
Ejercicios y problemas

Página 155

Practica

Interpretación de gráficas

1. **Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:**



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

a) Las variables que intervienen son el tiempo y la altura.

Para la variable tiempo, cada cuadradito representa un minuto y, para la altura, cada cuadradito representa 50 metros.

El intervalo 0-26 es su dominio de definición.

b) Entre el minuto 0 y el 5, el globo gana 300 metros de altura.

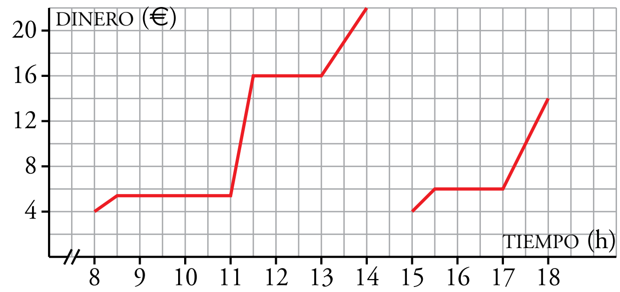
Entre el 5 y el 9, gana 50 metros de altura.

$\frac{300}{5} = 60 > 25 = \frac{50}{2} \rightarrow$ Crece más rápido entre los minutos 0 y 5.

c) El globo tiende a estabilizarse a 500 metros.

d) Al comenzar la observación, el globo está a altura 0, en la tierra. Tras soltarlo, al principio, gana altura con bastante rapidez pero según pasa el tiempo parece que se estabiliza a 500 metros de altura.

2. **En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:**



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

a) Las clases de la mañana empiezan a las ocho y media.

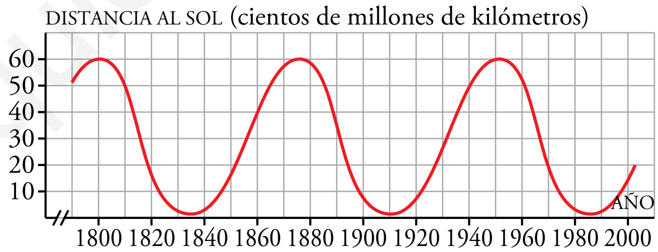
b) El recreo es a las 11 y dura media hora.

c) Por la mañana, los ingresos fueron de 22 €.

d) Por la tarde, las clases empiezan a las tres y media y terminan a las cinco.

e) Es una función discontinua.

3. **La siguiente gráfica describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los dos últimos siglos. Cada 76 años se puede ver desde la Tierra cuando más cerca está del Sol.**



a) ¿Es una función periódica? ¿Qué periodo tiene?

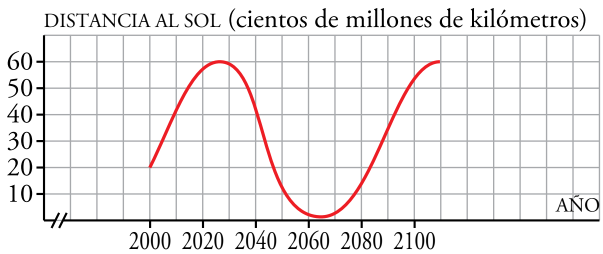
b) ¿Cuándo, aproximadamente, fue la última vez que se dejó ver desde la Tierra? ¿En qué año se volverá a ver?

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los años 2000 a 2100. ¿A qué distancia del Sol, aproximadamente, estará en el 2016?

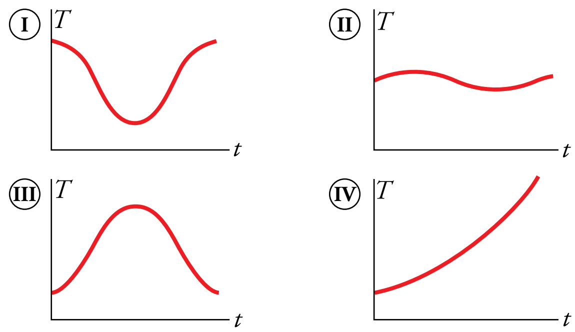
a) Es una función periódica, con periodo de 76 años.

b) La última vez que se vio fue en 1986 y la próxima vez que se verá será en 2062.

c)



4. **Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:**



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de I y II, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

a) En la ciudad b.

b) Las gráficas a y c, porque cuando en una la temperatura es alta en la otra es baja y al revés.

c) La grafica d es absurda, porque la temperatura solo crece.

d) Para la variable tiempo, podemos hacer corresponder cada cuadradito con un mes.

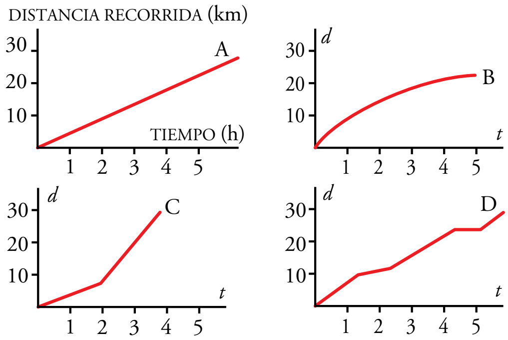
Para la variable temperatura, cada cuadradito pueden ser 2 ó 5 grados centígrados.

e) El dominio es el intervalo 1-12 (o de Enero a Diciembre).

Son ciudades que no tienen inviernos muy fríos, ya que en ningún caso se alcanzan temperaturas bajo cero. La ciudad a tiene más variación entre sus temperaturas. En la ciudad b, la temperatura no varía demasiado a lo largo de los meses.

Página 156

5. Las siguientes gráficas nos muestran la marcha de cuatro montañeros:



a) Describe el ritmo de cada uno.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Inventa una gráfica de un montañero que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

a) El montañero A lleva un ritmo constante.

El montañero B va decreciendo el ritmo según avanza el tiempo.

El montañero C comienza a un ritmo y a las dos horas acelera hasta que se para a las cuatro horas.

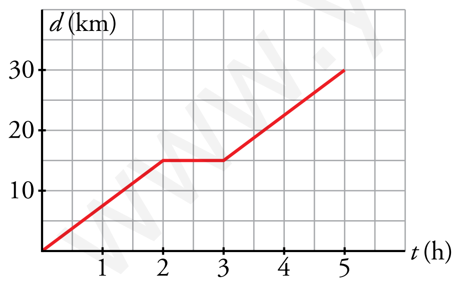
El montañero D va alternando un ritmo rápido con un ritmo más lento.

b) El montañero B recorre menos camino, recorre 20 km aproximadamente.

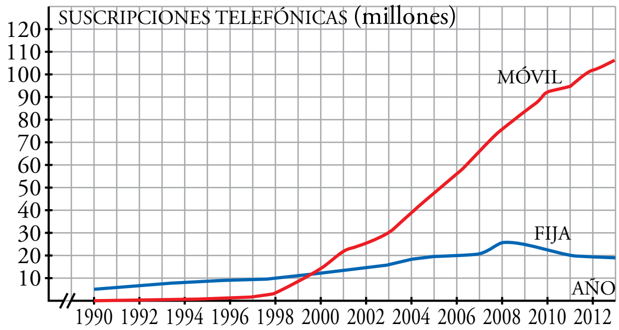
c) El montañero C camina durante menos tiempo, camina casi cuatro horas.

d) Alcanza más velocidad el montañero C.

e)



6. **El uso de teléfonos móviles ha aumentado mucho en los últimos años. Sin embargo, la telefonía fija no ha sufrido grandes variaciones. En esta gráfica vemos la evolución que ha tenido lugar de 1990 a 2013:**



a) ¿Cuántas líneas de telefonía fija y móvil había activadas, aproximadamente, a principios de 2000? ¿Y de 2010? ¿Y de 2013?

b) ¿Aproximadamente, cuándo había igual número de líneas de teléfonos fijos y móviles?

c) ¿Cuál ha sido el aumento de líneas de telefonía fija de 1990 a 2013? ¿Y de telefonía móvil?

d) Según la gráfica, ¿a qué cantidad de usuarios tienden los teléfonos fijos?

e) ¿Cuándo hubo el mayor número de usuarios de telefonía fija?

a) A principios de 2000 había activadas, aproximadamente, 12 millones de líneas de telefonía fija y 15 millones de telefonía móvil. En 2010 había unos 22 millones de telefonía fija y 90 millones de telefonía móvil. En 2013, alrededor de 20 millones de líneas fijas y 113 millones de telefonía móvil.

b) A mediados de 1999 había el mismo número de líneas fijas que de líneas móviles.

c) El aumento de líneas de telefonía fija de 1990 a 2013 ha sido de 15 millones, y el de líneas móviles, de 113 millones.

d) Los teléfonos fijos tienden a los 20 millones de usuarios.

e) El mayor número de usuarios de telefonía fija se registró en 2008.

Relaciones gráficas y expresiones analíticas

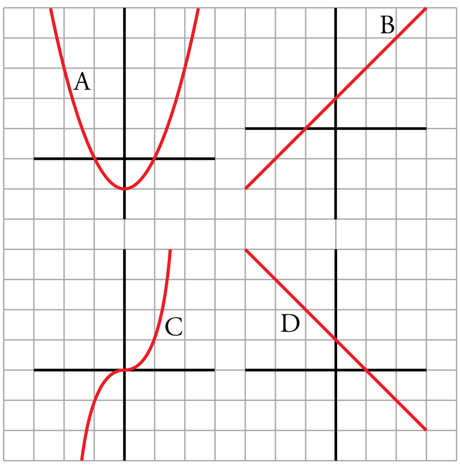
7. **Relaciona cada gráfica con una de las expresiones analíticas siguientes:**

i) $y = x + 1$

ii) $y = x^3$

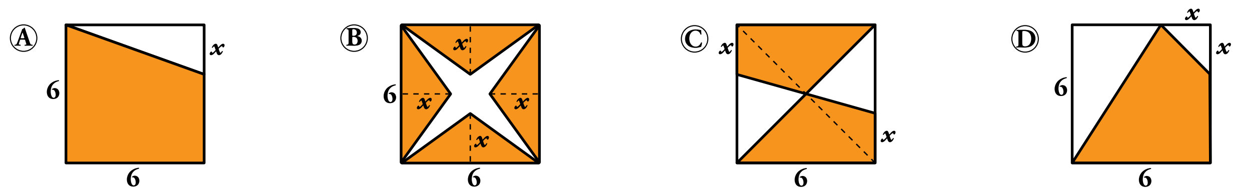
iii) $y = x^2 - 1$

iv) $y = -x + 1$



i) → B   ii) → C   iii) → A   iv) → D

8. **El área de la parte coloreada de las siguientes figuras se puede escribir en función de x:**



¿Cuál de estas expresiones analíticas corresponde al área de cada una de las figuras?

a) $36 - x$ **b)** $3x$ **c)** $18 + 3x$

d) $(6 + x) \cdot 3 - \dfrac{x^2}{2}$ **e)** $12x$ **f)** $18 - \dfrac{x^2}{2}$

g) $36 - 3x$ **h)** $36x$ **i)** $(6 - x) \cdot 3$

Ⓐ → g) $36 - 3x$ Ⓑ → e) $12x$

Ⓒ → c) $18 + 3x$

Cada una de las dos partes coloreadas iguales se puede dividir en dos triángulos de área 9 y $\dfrac{3x}{2}$, por lo que cada una de estas partes tiene área $9 + \dfrac{3x}{2}$. Como son dos,

$$2 \cdot \left(9 + \frac{3x}{2}\right) = 18 + 3x$$

Ⓓ → d) $(6 + x) \cdot 3 - \dfrac{x^2}{2}$

Al área total del cuadrado, 36, hemos de restarle los dos triángulos blancos:

$$36 - \frac{x^2}{2} - 3 \cdot (6 - x) = 18 + 3x - \frac{x^2}{2} = (6 + x) \cdot 3 - \frac{x^2}{2}$$

9. **a) Sabiendo que la libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:**

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)		0,45				

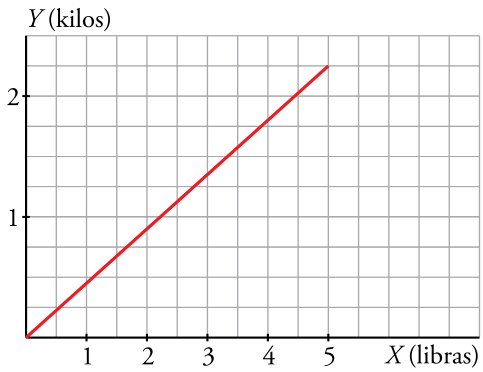
b) Representa la función que convierte libras en kilos.

c) Obtén la expresión analítica que relaciona estas dos variables.

a)

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)	0,225	0,45	0,675	0,9	1,35	1,8	$0,45x$

b)



c) $y = 0,45x$

Página 157

Resuelve problemas

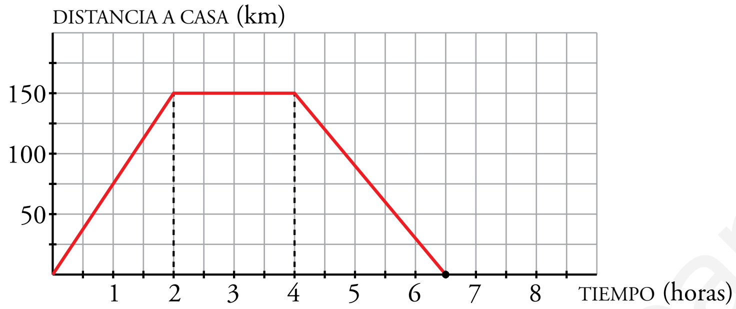
10. **Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia, en la que tenía que asistir a una reunión de trabajo. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿a cuánto iba al volver?

a)



b) $v = \dfrac{150 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 75 \text{ km/h}$

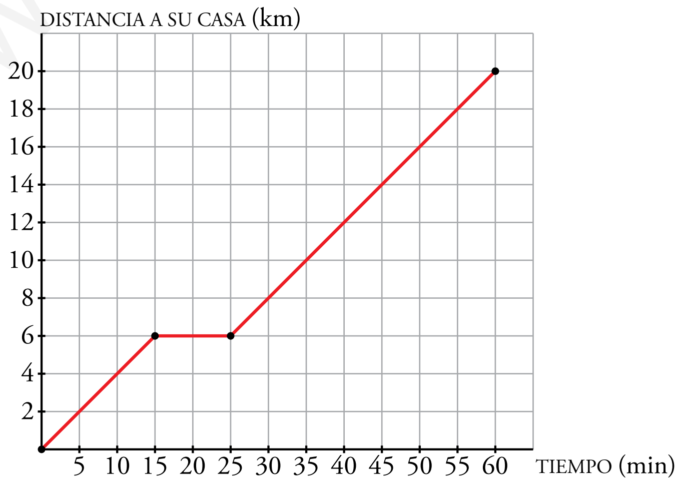
c) $v = \dfrac{150 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 60 \text{ km/h}$

11. **Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (Suponemos que la velocidad es constante en cada tramo).

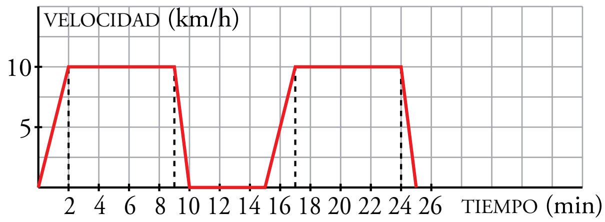
a)



b) Sí, lleva la misma velocidad porque por cada 5 minutos recorre 2 kilómetros en ambos tramos.

12. **Un tiovivo acelera durante 2 minutos hasta alcanzar una velocidad de 10 km/h. Permanece a esta velocidad durante 7 minutos y decelera hasta parar en 1 minuto. Tras permanecer 5 minutos parado, comienza otra vuelta.**

Dibuja la gráfica *tiempo-velocidad* para un intervalo de 25 min.



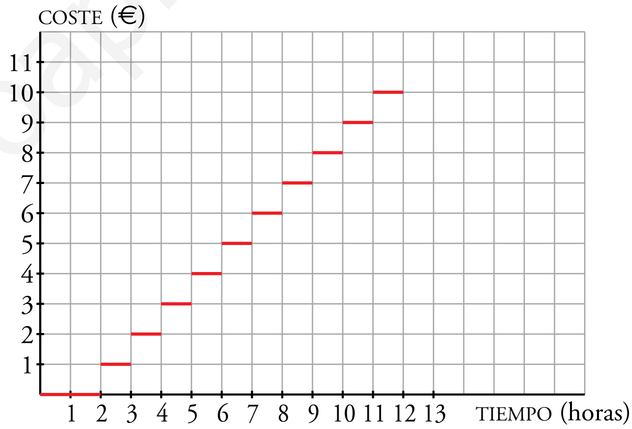
13. **Desde la concejalía de juventud del ayuntamiento de un pueblo se quiere promover el uso de la bicicleta. Para ello, han decidido alquilarlas según las siguientes tarifas:**

HORARIO: DE 9 DE LA MAÑANA A 9 DE LA NOCHE
Las dos primeras horas...................... gratuito
3.ª hora o fracción, y sucesivas................. 1 €

El tiempo máximo diario es de 12 horas (desde las 9 de la mañana hasta las 9 de la noche).

Representa la gráfica de la función:

Tiempo de uso de la bici-coste



14. **En la factura del gas de una ciudad se paga una cantidad fija de 15 € y 0,75 € más por cada metro cúbico consumido.**

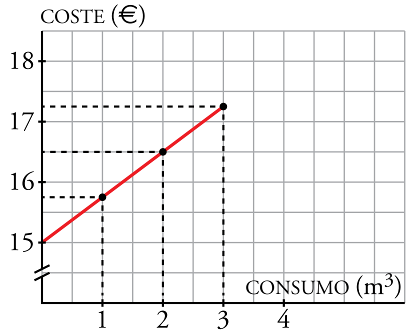
a) ¿Cuánto se paga por 3 m^3? ¿Y por 15 m^3?

b) Dibuja la función: *metros cúbicos consumidos-coste.*

a) Por 3 m^3 se pagan $15 + 0{,}75 \cdot 3 = 17{,}25$ €.

Por 15 m^3 se pagan $15 + 0{,}75 \cdot 15 = 26{,}25$ €.

b)



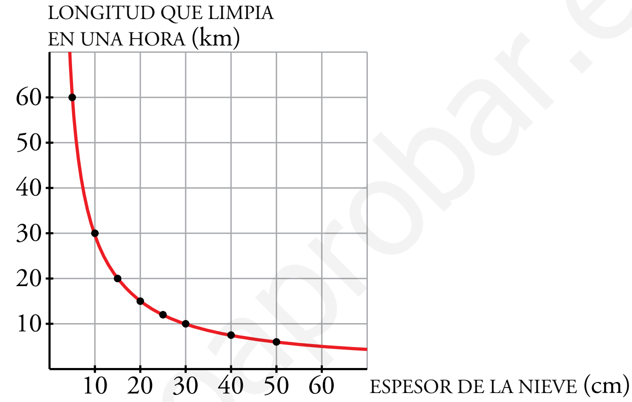
15. **La longitud de carretera que limpia un quitanieves depende del espesor de la nieve. Estos son los datos recogidos para una de estas máquinas:**

ESPESOR DE LA NIEVE (cm)	50	40	30	25	20	15	10	5
LONGITUD QUE LIMPIA EN 1 HORA (km)	6	7,5	10	12	15	20	30	60

a) Representa gráficamente estos datos y une los puntos para poder analizar su gráfica. Descríbela.

b) Supón que para espesores mayores de nieve, la máquina se comporta de manera análoga. Para un espesor de 60 cm, ¿cuántos kilómetros, aproximadamente, despejaría en una hora?

a)



Al aumentar el espesor de la nieve, la longitud de la carretera que limpia en una hora va descendiendo.

b) Limpiaría aproximadamente 5 km.

16. **Esta tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño durante los primeros meses de vida:**

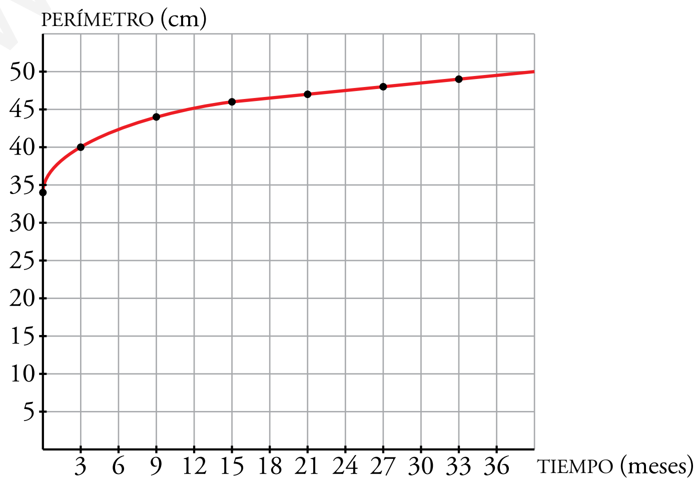
TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

a)



b) El tamaño del cráneo parece estabilizarse alrededor de los 50 cm.

c) Medirá unos 50 cm aproximadamente.

17. **Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:**

TIEMPO (s)	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	3,7	7	9,7	11,4	12

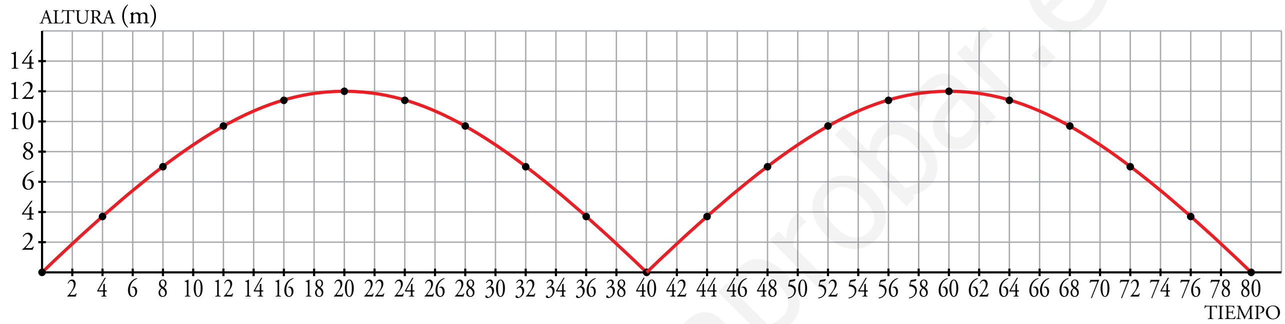
a) Representa la gráfica de la función *tiempo-altura* de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿A qué tiempos corresponden sus máximos y mínimos relativos?

c) ¿Es una función periódica?

d) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

a)



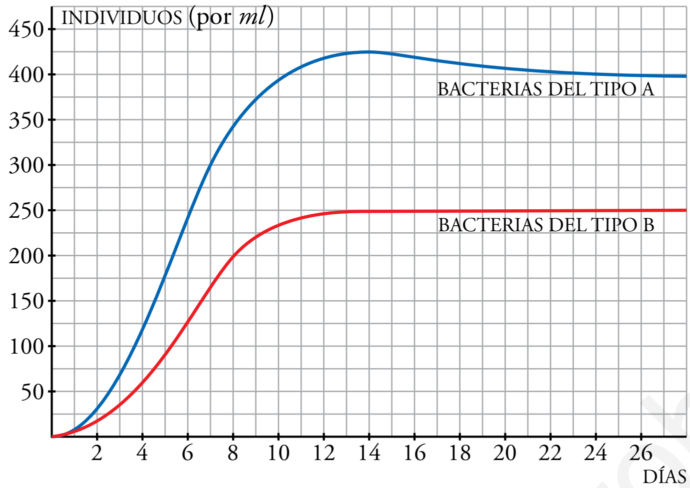
b) Los máximos y mínimos corresponden con los múltiplos de 20.

c) Sí, es una función periódica de periodo 40.

d) Como los valores se repiten cada 40 segundos, tenemos que ver con qué valor corresponde 150 de entre 0 y 40. Dividimos 150 entre 40 y obtenemos como cociente 3 y de resto 30. Es decir, corresponderá con la altura para 30 segundos, que es aproximadamente 8 metros.

Página 158

18. **Se ha realizado una experiencia en un laboratorio de biología molecular con dos tipos de bacteria. La gráfica siguiente nos muestra el crecimiento de cada una de ellas, criándose por separado y en idénticas condiciones:**

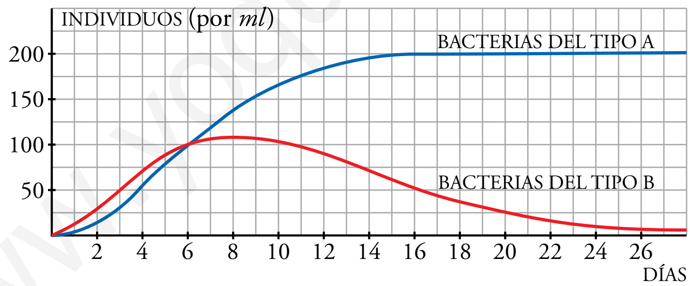


a) El número de individuos de cada tipo, ¿crece indefinidamente o se va estabilizando en torno a algún valor?

b) ¿A qué valor tiende el número de individuos por mililitro en el tipo A (en las condiciones estudiadas que se muestran en la gráfica)?

c) ¿Cuál de los dos tipos de bacteria se multiplica con más rapidez?

Observa en esta otra gráfica lo que sucede cuando se crían los dos tipos de bacterias en un mismo recipiente, compitiendo por el alimento:



d) Ambas poblaciones crecen de forma más lenta estando juntas que si se crían por separado. ¿A qué valor tiende el número de individuos del tipo A en este caso?

e) ¿Cuál es el número máximo de individuos que alcanza la población del tipo B?

f) ¿A qué valor tiende el número de individuos del tipo B al avanzar los días?

a) Se estabiliza.

b) A 800 individuos por mililitro.

c) La especie A.

d) A 200 individuos por mililitro.

e) Aproximadamente, 110 individuos.

f) A 0 individuos, la población B tiende a desaparecer.

Problemas "+"

19. **Ángel, meteorólogo, se encuentra en lo alto de un puerto de montaña midiendo las variaciones de temperatura a lo largo de una noche (empieza con –4 h, porque faltan 4 horas para las 0:00 h). Esta tabla muestra los datos transmitidos:**

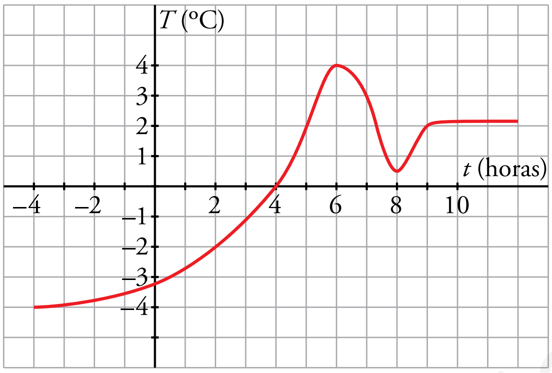
t (h)	–4	–2	0	2	4	6	7	8	9
T (°C)	–4	–3,75	–3,25	–2	0	4	3	0,5	2

a) Representa la gráfica *tiempo-temperatura*.

b) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Y el recorrido?

c) ¿En qué valores la gráfica corta a cada uno de los ejes? Explica su significado.

d) ¿En qué periodo la temperatura asciende, por hora, más lentamente? ¿Y más rápidamente? ¿Cuándo es máxima?

a) 

b) Dominio [–4, 10]. Recorrido [–4, 4]

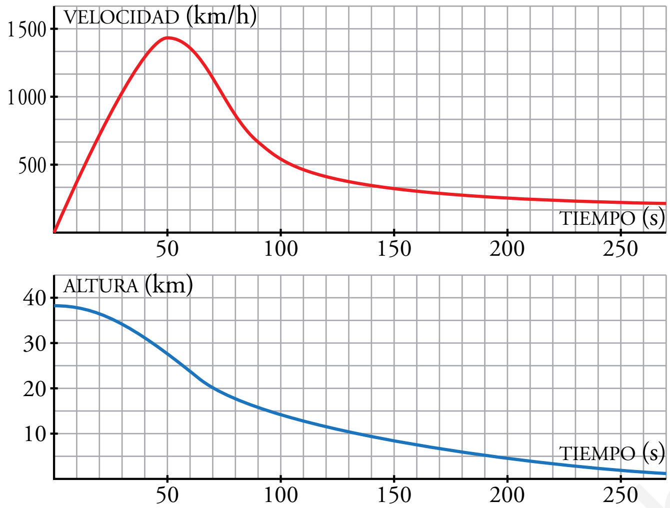
c) Corta al eje *t*(horas) en *t* = 4. Punto (4, 0); corta al eje *T* (temperatura en °C) en *T* = –3,25. Punto (0; –3,25).

d) La temperatura asciende más rápidamente en el intervalo [4, 6], 2 grados por hora.

El crecimiento más lento se da en el intervalo [–4, 0], 0,75° en 4 horas.

La temperatura máxima se da a las 6 horas.

20. **En 2012, Felix Baumgartner batió el record de velocidad en caída libre, lanzándose desde 39 000 m de altura. Estas son las gráficas de la velocidad y de la altura, respectivamente, que llevó durante los 250 primeros segundos desde que inició el descenso:**



a) ¿En qué momento cogió más velocidad?

b) ¿Cuándo rompió la velocidad del sonido? Recuerda que son 300 m/s. Pásalo a km/h.

c) A una altura de 40 km, la atmósfera es muy poco densa, por lo que casi no hay rozamiento. ¿A qué altura empieza a frenarle la atmósfera? ¿A qué altura se empieza a estabilizar?

d) ¿Cómo es la gráfica de la altura cuando la velocidad se estabiliza, más recta o más curva?

a) Cogió máxima velocidad a los 50 segundos.

b) Pasamos la velocidad del sonido a km/h:

$$300 \text{ m/s} = 300 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1\,080 \text{ km/h}$$

Sobrepasa esta velocidad a los 30 segundos aproximadamente.

c) El saltador comienza a descender su velocidad a los 50 segundos. En ese instante está a una altura aproximada de 27 kilómetros.

Comienza a estabilizarse alrededor del segundo 100, y está a una altura de 14 metros.

d) La gráfica de la altura es más recta.

Página 159

21. **El agua que vierte una fuente de un parque proviene de una cisterna cuya altura es de 90 cm. La cisterna tarda 3 min en llenarse, y se observa una relación entre la altura, *a*, del agua en la cisterna y el tiempo, *t*, transcurrido, dada por esta tabla:**

TIEMPO (min)	0	1	1,5	2	3
ALTURA (cm)	0	50	67,5	80	90

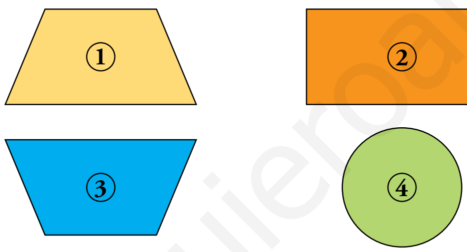
A continuación, la cisterna se vacía en 3 min, a la misma velocidad. Durante 1 min, el agua circula por las tuberías de la fuente, regresando a la cisterna para llenarla, y así sucesivamente.

a) Completa la tabla anterior hasta un tiempo de 15 min. Haz la gráfica de la función *tiempo-altura*.

b) ¿Es continua dicha función? ¿Es periódica? Si lo es, ¿cuál es su periodo? ¿En qué valores de *t* la cisterna está llena?

c) Durante el llenado, ¿sube el agua con igual rapidez en cada minuto? Justifícalo.

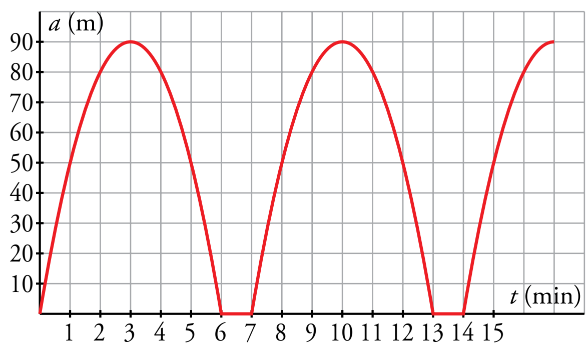
d) Teniendo en cuenta el apartado c), ¿cuál de estas figuras representa la forma del perfil de la cisterna?



a)

t (min)	0	1	1,5	2	3	4	4,5	5	6	7
a (cm)	0	50	67,5	80	90	80	67,5	50	0	0

t (min)	8	8,5	9	10	11	11,5	12	13	14	15
a (cm)	50	67,5	80	90	80	67,5	50	0	0	50

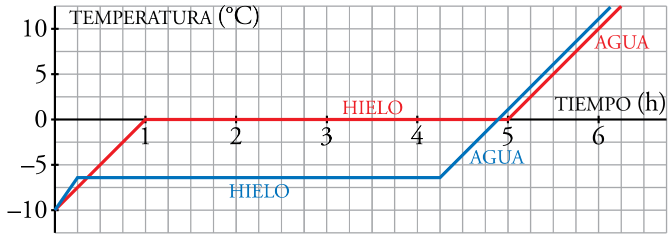


b) La función es continua y periódica. El periodo es 7 min. La cisterna está llena a los 3 minutos, $t = 3$, y a los 10 minutos, $t = 10$ min.

c) En el primer minuto de llenado el agua sube 50 cm. Entre 1 y 2 minutos sube 30 cm y entre 2 y 3 sube 10 cm. Sube más rápidamente en el primer minuto.

d) La cisterna tiene la forma 3 porque al ser más estrecha en la parte de abajo sube la altura del agua más rápidamente que en la parte superior donde la cisterna es más ancha.

22. **Cuando nieva, se echa sal en las calles para que la nieve se derrita. Al echarle sal, el hielo se derrite a menor temperatura (aproximadamente, –6 °C). Hasta que un bloque de hielo no está derretido completamente, no empieza a aumentar su temperatura. Estas son las gráficas *tiempo-tempertura* de un bloque de hielo (luego agua) con sal y de otro sin sal:**



a) ¿Cuál corresponde a cada uno?

b) ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en derretirse?

c) ¿Tendría sentido echar sal a la nieve con una temperatura ambiente de –12 °C? ¿Por qué?

a) La gráfica azul es el bloque de hielo con sal.

b) Los dos tardan 4 horas en derretirse.

c) No tendría sentido, ya que a esa temperatura el hielo no se derretiría aunque echásemos sal.

23. **Estas dos gráficas muestran las funciones *tiempo-espacio* correspondientes a un tren en movimiento y a un viajero que, habiéndolo perdido, corre para alcanzarlo:**

a) ¿Cuál es la gráfica del viajero y cuál la del tren?

b) ¿A qué distancia estaba del tren cuando comenzó a correr?

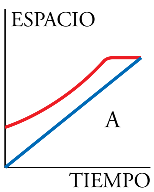
c) ¿Lo alcanza? ¿Dónde y cuándo?

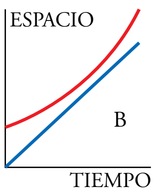
d) Las siguientes gráficas corresponden a tres situaciones similares, asocia cada una a uno de estos enunciados:

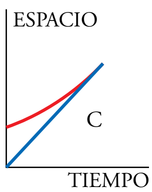
I. Ríchard coge la bici de Álex, que sale corriendo para alcanzarle antes de que se vaya, pero no le coge.

II. Ríchard coge la bici de Álex, que sale corriendo y le alcanza.

III. Ríchard coge la bici de Álex, que sale corriendo hacia él. Ríchard, cuando se da cuenta, se para y espera a que llegue Álex.







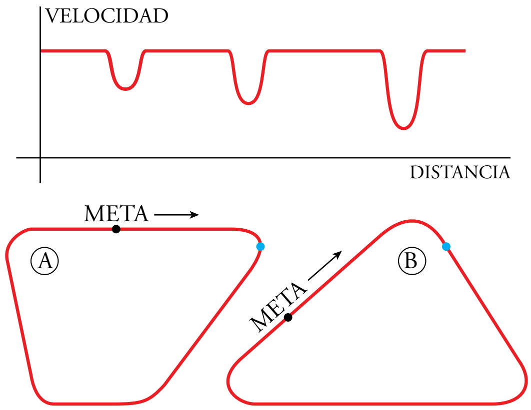
a) La gráfica del viajero es la azul.

b) Cuando empezó a correr estaba a 100 metros del tren.

c) Sí, lo alcanza cuando lleva un minuto y medio corriendo y ha recorrido 200 metros.

d) I → B   II → C   III → A

24. **Esta gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados más abajo:**

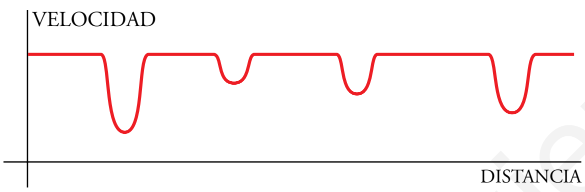


a) ¿A cuál de los dos corresponde?

b) Haz la gráfica correspondiente al otro.

a) Corresponde al circuito B. Al llegar a la curva, el coche debe bajar su velocidad, tanto más cuanto más cerrada es la curva. Esto se aprecia en la gráfica: tres frenazos, cada uno más fuerte que el anterior, como corresponde a los tres ángulos del circuito B en el orden en que se toman desde la salida, S.

b)

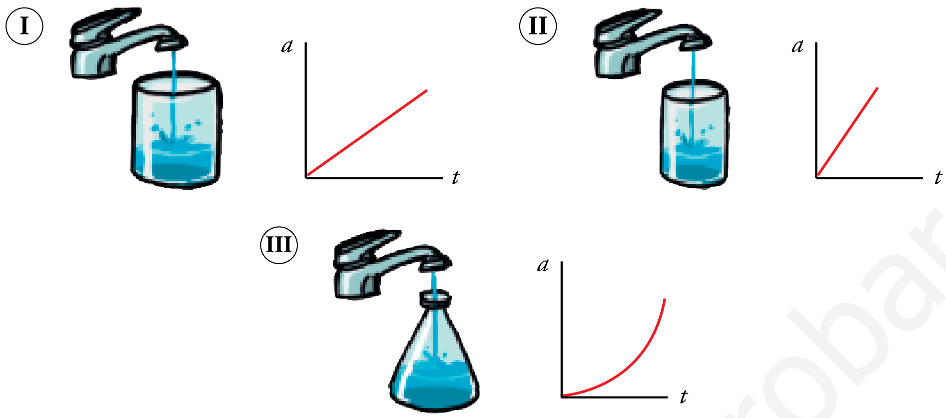


Página 160

Reflexiona y decide

Al abrir un grifo sobre un recipiente, la altura (*a*) que alcanza el líquido está en función (depende) del tiempo transcurrido (*t*).

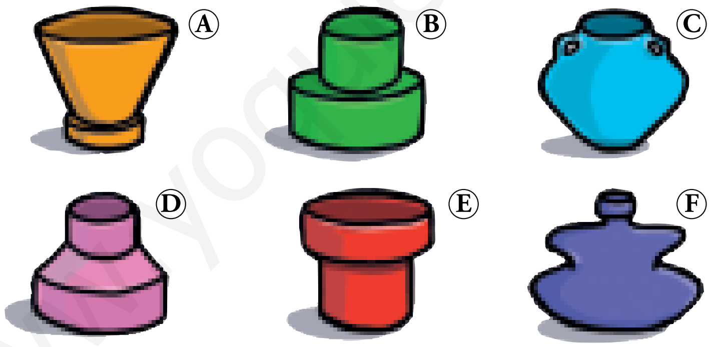
Y al representar esa función vemos que cada recipiente tiene una gráfica característica.

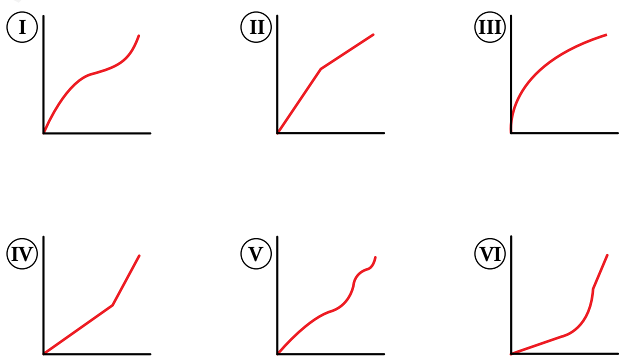


— En los dos primeros recipientes, el nivel sube uniformemente, aunque en el segundo más rápido que en el primero.

— En el tercer recipiente, el nivel sube despacio al principio y rápido al final.

- **Asocia cada uno de estos recipientes con su gráfica:**



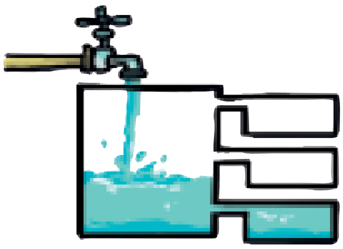


A – III; B – IV; C – I; D – VI; E – II; F – V

Observa y representa

Dibuja, en cada caso, la gráfica que relaciona la altura que alcanza el agua en el recipiente con el tiempo transcurrido:

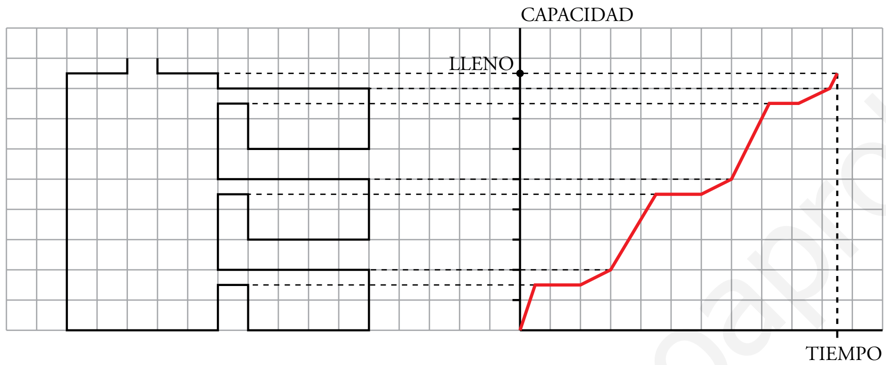
a)



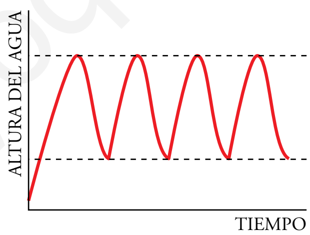
b)

NOTA: Antes de afrontar el apartado b), infórmate: ¿qué es una fuente vauclusiana?

a)



b) Las fuentes vauclusianas se caracterizan por brotar intermitentemente, unas veces echan agua y otras no, y además lo hacen en periodos de tiempo bastante regulares. Estos fenómenos geológicos se deben a la existencia de alguna cueva o depósito subterráneo con un conducto de salida que actúe de sifón y para recargarse requiere que el agua alcance un determinado nivel.



Puesto que cuando el tanque se llena hasta arriba el tubo también se llena y empieza a salir el agua del tanque. Esto ocurre hasta que el nivel del agua alcanza la entrada del tubo (efecto sifón). En ese momento deja de salirse agua y comienza a llenarse de nuevo el tanque.

Página 161

Entrénate resolviendo problemas

- **Dos hermanos rancheros se reparten una herencia a partes iguales. El primero invierte su parte en la compra de una manada de 80 caballos. El segundo invierte la suya en un rebaño de 100 vacas. Si un caballo cuesta 150 € más que una vaca, ¿a cuánto ascendía la herencia?**

$$\left.\begin{array}{l} 80 \text{ caballos} = 80 \text{ vacas} + 80 \cdot 150 \text{ €} = 80 \text{ vacas} + 12\,000 \text{ €} \\ 80 \text{ caballos} = 100 \text{ vacas} \qquad\qquad\qquad\;\; = 80 \text{ vacas} + 20 \text{ vacas} \end{array}\right\}$$

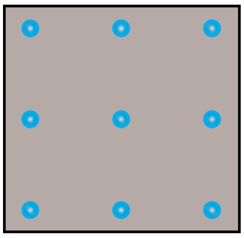
Por tanto, 20 vacas = 12 000 €.

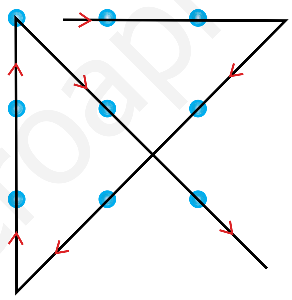
1 vaca cuesta 12 000 : 20 = 600 €.

1 caballo cuesta 600 + 150 = 450 €.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ vacas valen } 60\,000 \text{ €.} \\ 80 \text{ caballos valen } 60\,000 \text{ €.} \end{array}\right\} \text{La herencia asciende a } 60\,000 + 60\,000 = 120\,000 \text{ €.}$$

- **Pasa por encima de estos nueve puntos mediante una línea quebrada de cuatro segmentos.**





- **a) Estás junto a una fuente y dispones de una jarra de 5 litros y de otra de 3 litros. ¿Cómo te las arreglarías para medir exactamente un litro de agua?**

  b) Si ahora dispones de dos cántaros, uno de 7 litros y otro de 5, ¿cómo harías para medir 4 litros de agua?

  c) ¿Y cómo medirías 3 litros de agua si tuvieras un cántaro de 9 litros y otro de 5 litros?

a)

3	5
3	0
0	3
3	3
1	5

Se llena el de 3 litros.	Hay 3 y 0 litros.
El contenido de la de 3 litros se vierte en la de 5 litros.	Hay 0 y 3 litros.
Se vuelve a llenar la de 3 litros.	Hay 3 y 3 litros.
Con el contenido de la de 3 se completa la de 5 litros.	Hay 1 y 5 litros.

En la jarra de 3 litros queda 1 litro, lo que queríamos medir.

b)

5		7
0	5	7
5		2
0	2	2
2		0
2	3	7
5		4

Se llena el de 7 litros.	Hay 0 y 7 litros.
Con el contenido del de 7 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 2 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 2 litros.
Se vierten los 2 litros que hay en el de 7 en el de 5 litros.	Hay 2 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 7 litros.	Hay 2 y 7 litros.
Con el de 7 litros se completa el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.

Así, en el cántaro de 7 litros quedan los 4 litros que queríamos medir.

c)

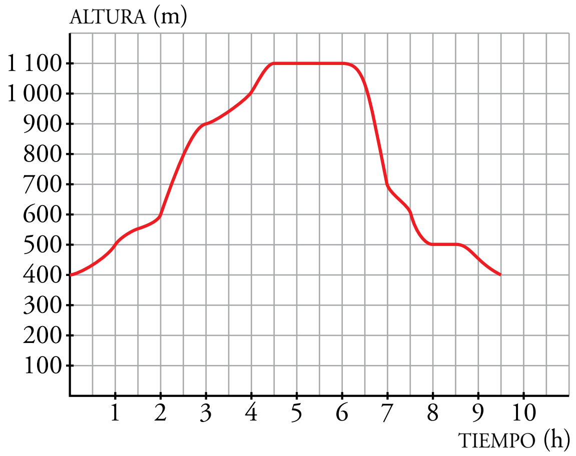
5		9
0	5	9
5		4
0	4	4
4		0
4	1	9
5		8
0	5	8
5		3

Se llena el de 9 litros.	Hay 0 y 9 litros.
Con el contenido del de 9 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 4 litros.
Se vierten los 4 litros que hay en el de 9 en el de 5 litros.	Hay 4 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 9 litros.	Hay 4 y 9 litros.
Se completa el de 5 con un litro del de 9 litros.	Hay 5 y 9 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 8 litros.
Se llena el de 5 litros con el contenido del de 9 litros.	Hay 5 y 3 litros.

En el cántaro de 9 litros quedan los 3 litros que queríamos medir.

Autoevaluación

1. Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión a cierta montaña:



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

a) Intervienen las variables tiempo y altura. La variable tiempo utiliza un cuadradito para media hora; la variable altura, un cuadradito para 100 metros. El dominio de la función es 0 - 9,5.

b) La marcha ha durado 9 horas y media. Comienzan a 400 metros de altura. Alcanzan una altura máxima de 1 100 metros. Han parado a comer cuando llevaban 4 horas y media de camino, al llegar a la cima.

c) Suben más rápido entre las 2 y las 3 horas del comienzo. Bajan más rápido entre las 6 y las 7 horas.

d) Comienzan su marcha a 400 metros. En dos horas han ascendido hasta los 600 metros, y en ese momento comienzan a subir más rápido, y mantienen ese ritmo durante una hora, hasta llegar a los 900 metros de altura. Entonces disminuyen la velocidad y continúan su ascensión dos horas más hasta llegar a la cima, a 1 100 metros de altitud. Pasan allí dos horas. Inician su descenso a las 6 horas de travesía, lo hacen rápidamente la primera hora, hasta volver a los 700 metros, y andan una hora más a un ritmo más lento. Hacen una parada de media hora a los 500 metros y reanudan la marcha una hora y media más, descendiendo hasta los 400 metros.

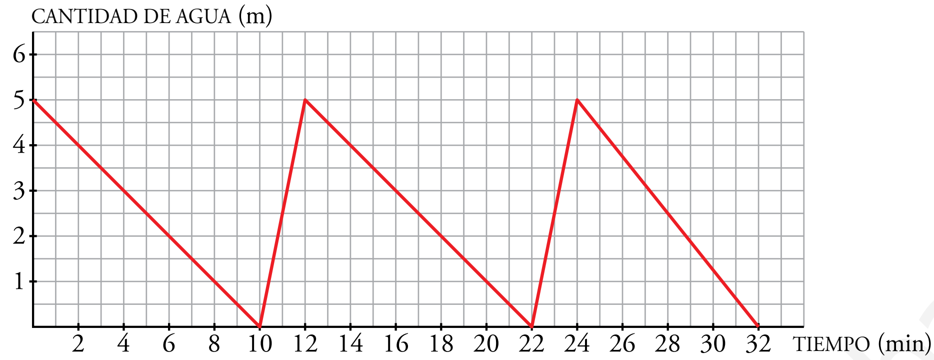
2. **Una cisterna contiene 5 *l* de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.**

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua*.

b) Explica si la función es periódica.

c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

a)

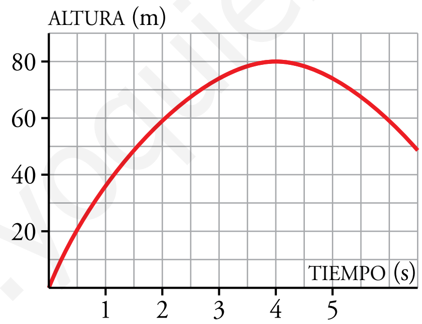


b) Es periódica, puesto que su comportamiento se va repitiendo en periodos de 12 minutos.

c) La cisterna está llena en los minutos 0, 12 y 24; y vacía en 10 y 22.

3. **Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, *t*. ¿Cuál de ellas es?**

Ⓐ $h = 8t - t^2$ Ⓑ $h = 40t - 5t^2$ Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

a) De forma aproximada, mirando la gráfica.

b) Utilizando la expresión algebraica.

Es la ecuación B.

a) Mirando la gráfica la altua es, aproximadamente, de 75 metros.

b) Utilizando la ecuación, $40 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 75$ m.