

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

EJERCICIO 1 : Desarrolla y simplifica:

a) $(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2)$

b) $(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2)$

c) $(x^2 - 2x + 3)(2x+1) - (4x-1)^2$

d) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6) + (x+1)(x-1) - (x+2)^2$

Solución:

a) $(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) = (x-1)(x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) =$

$= x^5 + 2x^4 + x^3 - x^4 - 2x^3 - x^2 - x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 = 6x^4 - 2x^3$

b) $(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2) = (4x^2 - 12x + 9) - (2x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 8x - 2) =$

$= 4x^2 - 12x + 9 - (2x^3 - 7x - 2) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^3 + 7x + 2 = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 11$

c) $(x^2 - 2x + 3)(2x+1) - (4x-1)^2 = (2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 6x + 3) - (16x^2 - 8x + 1) =$

$= 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3 - 16x^2 + 8x - 1 = 2x^3 - 19x^2 + 12x + 2$

d) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6) + (x+1)(x-1) - (x+2)^2 = (2x^2 + 4x - 3x - 6) + (x^2 - 1) - (x^2 + 4x + 4) =$

$= 2x^2 + x - 6 + x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 2x^2 - 3x - 11$

EJERCICIO 2

a) Opera y simplifica: $(x+2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4)$

b) Halla el cociente y el resto de esta división: $(4x^5 + 2x^3 - 3x + 1) : (x^2 - 2)$

Solución:

a) $(x+2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4) = x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 6x - 12 = -2x^2 + 10x - 8$

b)
$$\begin{array}{r} 4x^5 + 2x^3 - 3x + 1 \\ - 4x^5 + 8x^3 \\ \hline 10x^3 - 3x + 1 \\ - 10x^3 + 20x \\ \hline 17x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 2 \\ 4x^3 + 10x \end{array}$$

Cociente = $4x^3 + 10x$

Resto = $17x + 1$

EJERCICIO 3

a) Opera y simplifica: $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2) - (x+1)^2$

b) Halla el cociente y el resto de esta división: $(7x^5 - 2x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 2)$

Solución:

a) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2) - (x+1)^2 = x^2 + x + 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 3x + 2 - x^2 - 2x - 1 = x + 1$

b)
$$\begin{array}{r} 7x^5 - 2x^3 + 3x - 2 \\ - 7x^5 - 14x^3 \\ \hline - 16x^3 + 3x - 2 \\ 16x^3 + 32x \\ \hline 35x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 2 \\ 7x^3 - 16x \end{array}$$

Cociente = $7x^3 - 16x$

Resto = $35x - 2$

EJERCICIO 4 : Calcula el cociente y el resto de cada división:

a) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 + 1 \\ 2x^2 - 3x + 4 \end{array} \right. \\
 \underline{-2x^5 - 2x^2} \\
 -3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - x + 1 \\
 \underline{3x^4 - 6x^2 + 3x} \\
 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{-4x^3 - 4} \\
 -6x^2 + 10x - 3
 \end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 3x + 4$

Resto = $-6x^2 + 10x - 3$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\
 -2 & & -4 & 8 & -10 & 20 & -44 \\
 \hline
 & 2 & -4 & 5 & -10 & 22 & -45
 \end{array}$$

Cociente = $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$

Resto = -45

EJERCICIO 5 : Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$

b) $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$

Solución:

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ 2x^2 - 7x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-2x^4 - 4x^2} \\
 -7x^3 - x^2 - 1 \\
 \underline{7x^3 } \\
 -x^2 + 14x - 1 \\
 \underline{x^2 } \\
 14x + 1
 \end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 7x - 1$

Resto = $14x + 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -3 & 0 & 6 & 1 & -2 \\
 1 & & -3 & -3 & 3 & 4 \\
 \hline
 & -3 & -3 & 3 & 4 & 2
 \end{array}$$

Cociente = $-3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

Resto = 2

EJERCICIO 6 : Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta:

$(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$

Solución: Llamamos $P(x) = 3x^2 + kx - 2$.

Para que la división sea exacta, ha de ser $P(-2) = 0$; es decir: $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

EJERCICIO 7

- a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$
 b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$?

Solución:

- a) $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$
 b) Sí. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ coincide con $P(-1)$. En este caso $P(-1) = 0$; por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x + 1$.

EJERCICIO 8 : Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

- a) Halla el cociente y el resto de la división: $P(x) : (x - 2)$
 b) ¿Cuánto vale $P(2)$?

Solución:

- a) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & 3 & 1 \\ 2 & & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 4x^2 + 3$$

$$\text{Resto} = 5$$

- b) Por el teorema del resto, sabemos que $P(2) = 5$.

EJERCICIO 9

- a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$.
 b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

Solución:

- a) $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$
 b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ coincide con $P(1)$. En este caso $P(1) = 0$, por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.

EJERCICIO 10 : Opera y simplifica cada una de estas expresiones:

- a) $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2$ b) $\frac{4}{x} + \frac{x}{x-2}$
 c) $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7)$ b) $\frac{(x+5)^2}{x} : \frac{x+5}{3x^3}$

Solución:

- a) $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2 = 4x^2 + 2x - (4x^2 + 12x + 9) = 4x^2 + 2x - 4x^2 - 12x - 9 = -10x - 9$
 b) $\frac{4}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x(x-2)} + \frac{x^2}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 4x - 8}{x^2 - 2x}$
 c) $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7) = x^2 - 9 - 3x^2 + 7x = -2x^2 + 7x - 9$
 b) $\frac{(x+5)^2}{x} : \frac{x+5}{3x^3} = \frac{3x^3(x+5)^2}{x(x+5)} = 3x^2 \cdot (x+5) = 3x^3 + 15x^2$

EJERCICIO 11 : Opera y simplifica:

a) $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9)$ b) $\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-2}$ c) $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x)$ b) $\frac{5x^4}{x-6} : \frac{10x^2}{(x-6)^2}$

Solución:

a) $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9) = 9x^2 + 12x + 4 + x^3 - 9x^2 = x^3 + 12x + 4$

b) $\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-2} = \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{5(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x^2 - 6x - 5x - 10}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x^2 - 11x - 10}{x^2 - 4}$

c) $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x) = 2(x^2 - 2x + 1) - x - 2x^2 = 2x^2 - 4x + 2 - x - 2x^2 = -5x + 2$

b) $\frac{5x^4}{x-6} : \frac{10x^2}{(x-6)^2} = \frac{5x^4(x-6)^2}{10x^2(x-6)} = \frac{x^2(x-6)}{2} = \frac{x^3 - 6x^2}{2}$

EJERCICIO 12 : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

b) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

e) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

f) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

Solución:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

• Sacamos x^2 factor común: $x^2(x^3 + 5x^2 - x - 5)$

• Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 5x^2 - x - 5$:

	1	5	-1	-5	
1		1	6	5	
	1	6	5	0	
-1		-1	-5		
	1	5	0		

Por tanto: $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)(x + 1)(x + 5)$

b) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

• Sacamos x^2 factor común: $x^2(x^3 + x^2 - 4x - 4)$

• Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + x^2 - 4x - 4$:

	1	1	-4	-4	
-1		-1	0	4	
	1	0	-4	0	
2		2	4		
	1	2	0		

Por tanto: $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = x^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

• Sacamos x factor común: $x(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$

• Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$:

	1	2	-9	-18	
3		3	15	18	
	1	5	6	0	
-3		-3	-6		
	1	2	0		

Por tanto: $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x = x(x-3)(x+3)(x+2)$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	-1	-6	
1		1	7	6	
	1	7	6	0	
-1		-1	-6		
	1	6	0		

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x(x-1)(x+1)(x+6)$

e) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	-1	-6	
1		1	7	6	
	1	7	6	0	
-1		-1	-6		
	1	6	0		

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x(x-1)(x+1)(x+6)$

f) Usamos la regla de Ruffini:

	1	-6	8	6	-9	
1		1	-5	3	9	
	1	-5	3	9	0	
-1		-1	6	-9		
	1	-6	9	0		
3		3	-9			
	1	-3	0			

Luego: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x-1)(x+1)(x-3)^2$

EJERCICIO 13

- a) Halla el cociente y el resto de la siguiente división: $(3x^5 - 16x^3 + 6x^2 + 7x - 2) : (3x^2 - 1)$
 b) Factoriza este polinomio: $2x^4 + 4x^2$

Solución:

a)	$3x^5$	$-16x^3 + 6x^2 + 7x - 2$	$\overline{3x^2 - 1}$
	$-3x^5$	x^3	$x^3 - 5x + 2$
	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>		
	$-15x^3 + 6x^2 + 7x$		
	$15x^3$	$-5x$	
	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>		
	$6x^2 + 2x - 2$		
	$-6x^2$	$+2$	
	<hr style="border: 0.5px solid black;"/>		
	$2x$		

Cociente = $x^3 - 5x + 2$

Resto = $2x$

b) $2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$ (El polinomio $x^2 + 2$ no tiene raíces reales.)

EJERCICIO 14

a) **Calcula y simplifica:** $(x - 3)(x + 3) - 2x(x^2 - 5x)$

b) **Descompón en factores este polinomio:** $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6$

Solución:

a) $(x - 3)(x + 3) - 2x(x^2 - 5x) = x^2 - 9 - 2x^3 + 10x^2 = -2x^3 + 11x^2 - 9$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	3	-16	23	-6	
2		6	-20	6	
	3	-10	3	0	
3		9	-3		
	3	-1	0		

Luego: $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = (x - 2)(x - 3)(3x - 1)$

EJERCICIO 15 : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 18x^2$

b) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

c) $x^3 - 13x^2 + 36x$

d) $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

e) $x^5 + x^4 - 2x^3$

e) $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$2x^4 - 18x^2 = 2x^2(x^2 - 9) = 2x^2(x + 3)(x - 3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	-1	-1	-1	-2
-1		-1	2	-1	2
	1	-2	1	-2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$ (El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales).

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^3 - 13x^2 + 36x = x(x^2 - 13x + 36)$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

Por tanto: $x^3 - 13x^2 + 36x = x(x - 9)(x - 4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	-9	-8	15
1		2	-7	-15
	2	-7	-15	0
5		10	15	
	2	3	0	

$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = (x - 1)(x - 5)(2x + 3)$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x-1)(x+2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

EJERCICIO 16 : Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1}$

b) $\frac{x^2-2x+1}{x+3} : \frac{x-1}{x^2-9}$

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+2}{x^2-x}$

b) $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

a) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x^2+1}{x^2-4}$

b) $\frac{x^2+x}{2x+4} : \frac{x^2-1}{x+2}$

a) $\frac{2x+1}{x^2-9} + \frac{3}{x+3}$

b) $\frac{x^2+2x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{x^2-4}$

a) $\frac{3x^2+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x+1}$

b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1}$

Solución:

a) $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} - \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-2x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2-2x+1}{x+3} : \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{(x-1)^2}{(x+3)} : \frac{(x-1)}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)} = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+2}{x^2-x} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} - \frac{x^2+2}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-x^2-2}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x^2-x}$

b) $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

a) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+x-2+x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

b) $\frac{x^2+x}{2x+4} : \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{x(x+1)}{2(x+2)} : \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)} = \frac{x(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{x}{2(x-1)} = \frac{x}{2x-2}$

a) $\frac{2x+1}{x^2-9} + \frac{3}{x+3} = \frac{2x+1}{(x-3)(x+3)} + \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+1+3x-9}{(x-3)(x+3)} = \frac{5x-8}{x^2-9}$

b) $\frac{x^2+2x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

a) $\frac{3x^2+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x+1} = \frac{3x^2+1}{x(x+1)} - \frac{2x^2}{x(x+1)} = \frac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \cdot \frac{x}{(x+1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

EJERCICIO 17 : Calcula y simplifica si es posible:

a) $\frac{2}{x+1} - \frac{x+3}{2x+2} + \frac{x}{(x+1)^2}$

b) $\frac{x^2-9}{2x^2+x} : \frac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2} - \frac{2x^2-6}{2x^3}$

d) $\left(\frac{2}{x} + x^2\right) : \frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}$

e) $\frac{2x+5}{x+5} + \frac{5x^2}{x-5} - \frac{6x-5}{3x-15}$

f) $\frac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}$

g) $\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}$

h) $\frac{3x^3-3x}{x^5-x}$

i) $\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}$

j) $\frac{x^3-49x}{x^4-7x^3}$

*Solución:*a) Observa que $2x+2 = 2(x+1)$, por tanto:

m.c.m. $[x+1, 2x+2, (x+1)^2] = 2(x+1)^2$

Así:
$$\frac{2}{x+1} - \frac{x+3}{2x+2} + \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)}{2(x+1)^2} - \frac{(x+3)(x+1)}{2(x+1)^2} + \frac{2x}{2(x+1)^2} =$$
$$= \frac{4x+4}{2(x+1)^2} - \frac{x^2+4x+3}{2(x+1)^2} + \frac{2x}{2(x+1)^2} = \frac{4x+4-x^2-4x-3+2x}{2(x+1)^2} =$$

b) $\frac{x^2-9}{2x^2+x} : \frac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1} = \frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}$

Factorizamos para simplificar:
$$\left. \begin{aligned} x^2-9 &= (x-3)(x+3) \\ 4x^2+4x+1 &= (2x+1)^2 \\ x^2-6x+9 &= (x-3)^2 \\ 2x^2+x &= x(2x+1) \end{aligned} \right\} \text{Productos notables}$$

Así:
$$\frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)} = \frac{(x-3)(x+3)(2x+1)^2}{x(2x+1)(x-3)^2} = \frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-3)} = \frac{2x^2+7x+3}{x^2-3x}$$

c) m.c.m. $[x, x^2, 2x^3] = 2x^3$

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2} - \frac{2x^2-6}{2x^3} = \frac{2x^2}{2x^3} + \frac{2x(x+1)}{2x^3} - \frac{2x^2-6}{2x^3} = \frac{2x^2}{2x^3} + \frac{2x^2+2x}{2x^3} - \frac{2x^2-6}{2x^3} = \frac{2x^2+2x+6}{2x^3} = \frac{x^2+x+3}{x^3}$$

d) $\left(\frac{2}{x} + x^2\right) : \frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3} = \frac{2+x^3}{x} : \frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3} = \frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}$

Factorizamos para simplificar:

$$x^2+5x^3 = x^2(1+5x)$$

$$4x^4+8x = 4x(x^3+2)$$

Luego:
$$\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)} = \frac{(2+x^3)x^2(1+5x)}{x \cdot 4x(x^3+2)} = \frac{1+5x}{4}$$

e) Como $3x-15 = 3(x-5)$, se tiene que: m.c.m. $[x+5, x-5, 3(x-5)] = 3(x-5)(x+5)$

Así:
$$\frac{2x+5}{x+5} + \frac{5x^2}{x-5} - \frac{6x-5}{3x-15} = \frac{3(2x+5)(x-5)}{3(x-5)(x+5)} + \frac{15x^2(x+5)}{3(x-5)(x+5)} - \frac{(6x-5)(x+5)}{3(x-5)(x+5)} =$$

$$= \frac{3(2x^2-5x-25)}{3(x-5)(x+5)} + \frac{15x^3+75x^2}{3(x-5)(x+5)} - \frac{6x^2+25x-25}{3(x-5)(x+5)} =$$

$$= \frac{6x^2-15x-75+15x^3+75x^2-6x^2-25x+25}{3(x-5)(x+5)} = \frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x-5)(x+5)} = \frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x^2-25)}$$

f) Factorizamos ambos polinomios:

$$2x^3-5x^2+3x = x \cdot (2x^2-5x+3)$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Luego: $2x^3 - 5x^2 + 3x = x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$2x^2 + x - 6 = (x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) \text{ ya que: } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Por tanto: $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6} = \frac{x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x(x-1)}{x+2}$

g)

- Numerador \rightarrow Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda:

$$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12)$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} \begin{cases} -\frac{8}{2} = -4 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Así: $x^3 + 7x^2 + 12x = x(x+4)(x+3)$

- Denominador \rightarrow Descomponemos aplicando Ruffini:

1	3	-16	-48
4	4	28	48
1	7	12	0

$x^2 + 7x + 12$ es una expresión de 2º grado cuyas raíces se calculan resolviendo la ecuación: $x^2 + 7x + 12 = 0$, que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = (x-4)(x+4)(x+3)$

- Simplificación de la fracción algebraica: $\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48} = \frac{x(x+4)(x+3)}{(x-4)(x+4)(x+3)} = \frac{x}{x-4}$

h) $\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^4 - 1)} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a la expresión $x^4 - 1$.

i) Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador \rightarrow Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

1	5	8	4
-2	-2	-6	-4
1	3	2	0

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Así: $2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x+2)^2(x+1)$

- Denominador \rightarrow Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Así: $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x+2)(x+1)(x-1)$

- Simplificación: $\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8} = \frac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2x-2}$

Se obtiene dividiendo numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $2(x+2)(x+1)$.

$$j) \frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x(x^2 - 49)}{x^3(x-7)} = \frac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)} = \frac{x+7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ a la expresión $x^2 - 49$, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $x(x-7)$.

EJERCICIO 18 : Opera y simplifica:

a) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{x^2 - 4x + x}$

Solución:

- a) Observamos que tenemos el producto notable $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$.

$$\text{Así: } \left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 - \frac{1}{x^4} = \frac{x^6 - 1}{x^4}$$

- b) Calculamos el m.c.m. $[(x-2), (x^2 - 4x + 4)]$ que es $(x-2)^2$.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\text{Luego: } \frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 2 + x}{(x-2)^2} = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

EJERCICIO 19 : Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x-1}{x}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x-10}{x^2 - 25}$

Solución:

- a) m.c.m. $[(x^2 - x), (x-1), x] = x(x-1)$

$$\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x-1}{x} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{x(2x-1)}{x(x-1)} - \frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2x^2 - x}{x(x-1)} - \frac{3x^2 - 3x - x + 1}{x(x-1)} = \frac{1 + 2x^2 - x - 3x^2 + 3x + x - 1}{x(x-1)} = \frac{-x^2 + 3x}{x(x-1)} = \frac{x(-x+3)}{x(x-1)} = \frac{-x+3}{x-1}$$

- b) Efectuamos el cociente: $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x-10}{x^2 - 25} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x-10)}$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) \rightarrow$ Producto notable

$$2x - 10 = 2(x - 5)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{array}{l} / \quad \frac{-10}{2} = -5 \\ \backslash \quad \frac{6}{2} = 3 \end{array}$$

$$\text{Así: } \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)} = \frac{(x - 3)^2(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)(x - 3)2(x - 5)} = \frac{x - 3}{2}$$