Página 63

Resuelve

1. Observa la noria que aparece abajo.

Si C es la cantidad de agua que aporta en una vuelta, y A es la cantidad de agua que tenía inicialmente el pilón al que abastece, ¿qué cantidad de agua habrá en el pilón después de n vueltas?

Después de n vueltas habrá $nC + A$.

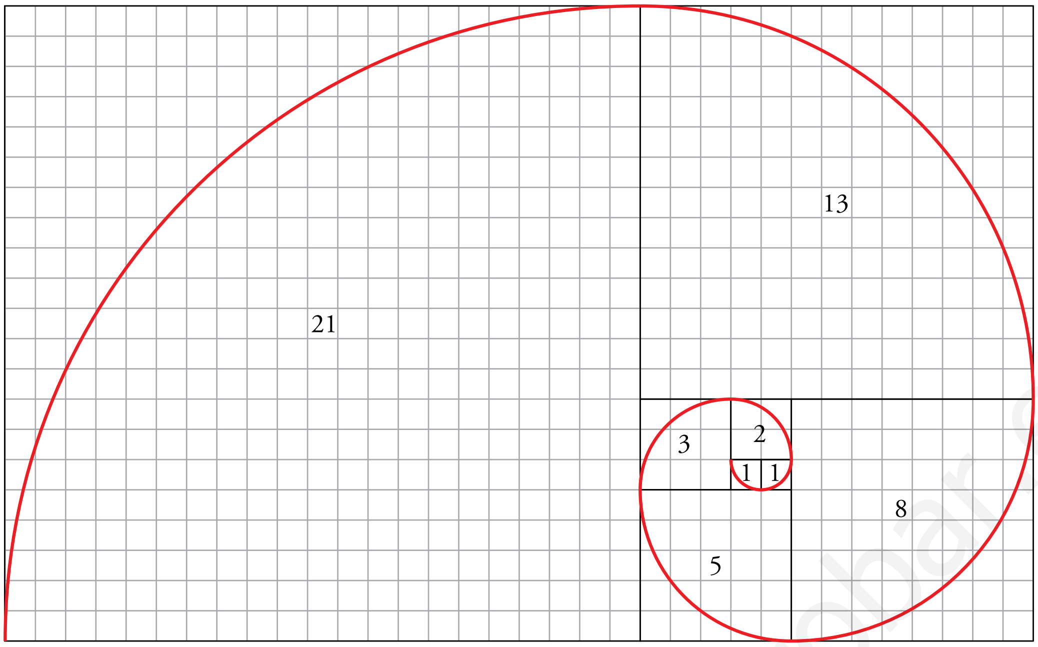
2. ¿Qué criterio hay que seguir para obtener más términos en la sucesión de Fibonacci?

Los dos primeros términos son 1 y 1. Los demás se obtienen como la suma de los dos anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

3. Dibuja las dos filas que siguen en el esquema que muestra la evolución de la descendencia de una pareja de conejos.

¿Cuántas parejas habría en el sexto mes? ¿Y en el séptimo?

4. **Dibuja en papel cuadriculado, ampliándola en dos pasos más, la espiral de Fibonacci.**



1 Sucesiones

Página 64

Ladillo

¿A cuáles de las sucesiones de la derecha corresponden estos dibujos?

La torre corresponde a la sucesión b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

La espiral corresponde a la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

1. Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

a) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene sumando 4 al anterior.

21, 25, 29, …

b) Criterio: Los términos son los cuadrados de los números naturales.

49, 64, 81, …

c) Criterio: El primer término es 2, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2, o bien, son las sucesivas potencias de 2 (2^1, 2^2, 2^3, …).

128, 256, 512, …

d) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por –3.

729, –2 187, 6 561, …

e) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 1, y cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

13, 21, 34, …

f) Criterio: El primer término es 1, y cada término que ocupa un lugar n se obtiene sumando $n - 1$ al anterior.

22, 29, 37, …

g) Criterio: Cada término que ocupa un lugar n se obtiene multiplicando $n \cdot (n + 1)$

56, 72, 90, …

h) Criterio: El primer término es 170, y cada término se obtiene restando 50 al anterior.

–130, –180, –230, …

i) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 3, y los términos pares se obtienen sumando 2 al anterior, y los términos impares se obtienen multiplicando el anterior por 2.

38, 76, 78, …

2. Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) Criterio: Obtenemos cada término mulitplicando el anterior por –2.

3, –6, 12, –24, 48, …

b) Criterio: Obtenemos cada término sumando 1,5 al término anterior.

1; 2,5; 4; 5,5; 7; 8,5; …

c) Criterio: Obtenemos los términos pares multiplicando el anterior por –3, y los impares, sumando –3 al anterior.

1, –3, –6, 18, 15, –45, –48, …

d) Criterio: Los términos son los cubos de los números naturales.

1, 8, 27, 64, 125, 216, …

e) Criterio: Obtenemos cada término restando 8 del anterior.

100, 92, 84, 76, 68, 60, …

3. Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \dots$ entre cada dos términos consecutivos de la sucesión c) de arriba.

La relación es 2.

4. Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.

La relación es –3.

Página 65

5. Comprueba, para b), c), d) y h) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $h_n = 220 - 50n$.

Se comprueba.

6. Escribe los cinco primeros términos de:

$$a_n = n^3 \qquad b_n = n^2 - 3n + 7 \qquad c_n = \frac{n-3}{n+4}$$

$a_n \to 1, 8, 27, 64, 125, \dots$

$b_n \to 5, 5, 7, 11, 17, \dots$

$c_n \to -\frac{2}{5}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \dots$

7. Forma una sucesión recurrente con estos datos:

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

8. Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión: 3, 5, 13, 31, 75, 181, …

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_n = b_{n-1} + (b_{n-2})^2$

Sucesión: 1, 3, 4, 13, 29, 198, 1 039, …

9. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ **b)** $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **c)** $c_n = (n-1)(n-2)$ **d)** $d_n = n^2 - n$

a) 3, 8, 13, 18, … b) 3, 32, 34, 38, … c) 0, 0, 2, 6, … d) 0, 2, 6, 12,…

10. Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

a) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$

c) Nuevo término: 1,625. Ley de recurrencia: $c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

d) Nuevo término: 2. Ley de recurrencia: $d_n = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

11. **Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).**

Respuesta abierta. Por ejemplo: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, …

12. **a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.**

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$$a_n \;\rightarrow\; 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$b_n \;\rightarrow\; 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

a) $s_1 = (-1)^1 = -1$; $s_2 = (-1)^2 = 1$; $s_3 = (-1)^3 = -1$; $s_4 = (-1)^4 = 1$

Los términos s_n con n par son 1, y cuando n es impar son iguales a –1. Coincide con los términos de la sucesión descrita.

b) $a_n = (-1)^{n+1}$; $b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2 Progresiones aritméticas

Página 66

Con calculadora (ladillo)

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 $\boxed{+}\boxed{+}$ **2** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

b) 20 $\boxed{+}\boxed{+}$ **120** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

c) 2 $\boxed{+/-}\boxed{+}\boxed{+}$ **9** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

d) 0,04 $\boxed{+}\boxed{+}$ **5,83** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}$ **3** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

b) 120 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}$ **20** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

c) 9 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}\boxed{(-)}$ **2** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

d) 5,83 $\boxed{=}\boxed{Ans}\boxed{+}$ **0,04** $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ **…**

a) 20, 23, 26, 29, … Diferencia: 3

b) 240, 260, 280, 300, … Diferencia : 20

c) –7, –9, –11, –13, … Diferencia: –2

d) 6,07; 7,11; 6,15; 6,19; … Diferencia: 0,04

1. El primer término de una progresión aritmética s es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2,5$. Escribe sus diez primeros términos.

Haz lo mismo para otra progresión aritmética t cuyo primer término sea $t_1 = 20$ y cuya diferencia sea $d = -3$.

Progresión s_n: 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; …

Progresión t_n: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, …

2. Calcula, para las progresiones de arriba:

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1\,000}$$

b) $b_1 = 120$ y $d = 20 \rightarrow b_n = b_1 + (n-1) \cdot d = 120 + (n-1) \cdot 20 = 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$

Así: $b_{36} = 100 + 20 \cdot 36 = 820$

c) $c_1 = 9$ y $d = -2 \rightarrow c_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = 9 - 2n + 2 = 11 - 2n$

Así: $c_{31} = 11 - 2 \cdot 31 = -51$

d) $d_1 = 5,83$ y $d = 0,04 \rightarrow d_n = 5,83 + (n-1) \cdot 0,04 = 5,83 + 0,04n - 0,04 = 5,79 + 0,04n$

Así: $d_{1\,000} = 5,79 + 0,04 \cdot 1\,000 = 45,79$

3. Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).

$b_n = 100 + 20 \cdot n$ $\qquad c_n = 11 - 2 \cdot n$ $\qquad d_n = 5,79 + 0,04 \cdot n$

4. a) Si dos términos de una progresión aritmética s son:

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

a) $d = 1,5$

b) $s_n = 6 + 1,5\,(n-1) = 6 + 1,5n - 1,5 = 4,5 + 1,5n$

Página 67

5. Halla la suma de todos los números impares menores que 100.

El término general de los números impares es $a_n = 2n - 1$. El último impar menor que 100 es 99, que resulta ser a_{50}. Así, la suma es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

6. a) Si $a_1 = 5$ y $d = 5$, calcula S_{15}.

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 7$, calcula b_{40} y S_{40}.

c) Si $c_1 = 5$ y $c_2 = 12$, calcula S_{32}.

a) $a_1 = 5$ y $d = 5 \rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n$; $a_{15} = 5 \cdot 15 = 75$

$$S_{15} = \frac{(5 + 75) \cdot 15}{2} = 600$$

b) $b_1 = 5$ y $d = 2 \rightarrow b_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n$; $b_{40} = 3 + 2 \cdot 40 = 83$

$$S_{40} = \frac{(5 + 83) \cdot 40}{2} = 1\,760$$

c) $c_1 = 5$ y $d = 7 \rightarrow c_n = 5 + (n - 1) \cdot 7 = -2 + 7n$; $c_{32} = -2 + 7 \cdot 32 = 222$

$$S_{32} = \frac{(5 + 222) \cdot 32}{2} = 3\,632$$

7. Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.

Como $c_1 = 17$ y $c_5 = 9 \rightarrow d = -2$

Así, $c_n = 17 + (n - 1)(-2) = 19 - 2n$; $c_{20} = 19 - 2 \cdot 20 = -21$

$$S_{20} = \frac{(14 - 21) \cdot 20}{2} = -40$$

8. Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

Como $a_1 = 4$ y $a_2 = 7$, tenemos que la diferencia de esta progresión es $d = 3$.

Nos piden la suma de los términos del décimo al vigésimo. Lo que vamos a hacer es calcular S_{20} y restarle S_9:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 4 + 57) \cdot 20}{2} = 650$$

$$S_9 = \frac{(4 + 4 + 8 \cdot 3) \cdot 9}{2} = 144$$

Por tanto, la suma pedida es 650 – 144 = 506.

Página 68

Con calculadora (ladillo)

Añade dos términos a cada una de las progresiones siguientes:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

b) 3, 30, 300, 3 000, …

c) 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; …

d) 80; 8; 0,8; 0,08; …

e) 3, –6, 12, –24, 48, –96, …

a) 192, 384, …

b) 30 000, 300 000, …

c) 1,25; 0,625; …

d) 0,008; 0,0008; …

e) 192, –384, …

3 Progresiones geométricas

Página 69

1. Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.

125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; …

2. De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.

$0{,}9 = 0{,}625r^2 \to r^2 = 1{,}44 \to r = \pm 1{,}2$

Por tanto, hay dos progresiones:

- $r = 1{,}2$

  0,625; 0,75; 0,9; 1,08; 1,296; 1,5552; …

- $r = -1{,}2$

  0,625; –0,75; 0,9; –1,08; 1,296; –1,5552; …

3. En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.

$6 = 2 \cdot r^2 \to r^2 = 3 \to r = \pm\sqrt{3}$

Como es una progresión de términos positivos, la razón también lo es.

$r = \sqrt{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^5 = 486$

$a_{12} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{11} = 2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{3} = 486\sqrt{3}$

4. En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.

$$\left.\begin{array}{l} a_{37} = 911127{,}781 \\ a_{38} = 1275578{,}893 \end{array}\right\} \to \text{Es } a_{37}.$$

5. En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.

$$\left.\begin{array}{l} a_{31} = 1{,}237 \\ a_{32} = 0{,}99 \end{array}\right\} \to \text{Es } a_{31}.$$

Página 70

6. Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + + 192 + 384.

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = \frac{3 \cdot 2^8 - 3}{2 - 1} = 765$$

7. ¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?

$$S_{16} = \frac{1 \cdot 20^{16} - 1}{2 - 1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

8. Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.

$$S_{10} = \frac{8{,}192 \cdot 2{,}5^{10} - 8{,}192}{2{,}5 - 1} = 52\,077{,}872$$

9. Si al comienzo de cada año ingresamos 6 000 € al 5 %, ¿qué capital tendremos al final del sexto año?

Se trata de una progresión geométrica, donde $a_1 = 6\,000$ y $r = 1{,}05$. Nos están preguntando por a_7.

Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6\,000 \cdot 1{,}05^{n-1}$

Por tanto, $a_7 = 8\,040{,}57$ €

Página 71

10. **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0,75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.**

$$S_\infty = \frac{8}{1-0,75} = \frac{8}{0,25} = 32$$

11. **En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0,2$. Calcula la suma de "todos" sus términos.**

$$S_\infty = \frac{30}{1-(-0,2)} = \frac{30}{1,2} = 25$$

12. **En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0,4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.**

$a_6 = a_4 \cdot r^2 \to 0,4 = 10 \cdot r^2 \to r^2 = 0,04 \to r = \pm 0,2$

$r = 0,2 \to 10 = a_1 \cdot 0,2^3 \to 10 = a_1 \cdot 0,008 \to a_1 = 1\,250$

$a_8 = a_1 \cdot 0,2^7 \to a_8 = 1\,250 \cdot 0,2^7 \to a_8 = 0,016$

$$S_8 = \frac{1\,250 - 1\,250 \cdot 0,2^8}{1-0,2} = 1\,562,496$$

$$S_\infty = \frac{1\,250}{1-0,2} = 1\,562,5$$

$r = -0,2 \to 10 = a_1 \cdot (-0,2)^3 \to a_1 = -1\,250$

$a_8 = -1\,250 \cdot (-0,2)^7 = 0,016$

$$S_8 = \frac{-1\,250 - (-1\,250) \cdot (-0,2)^8}{1-(-0,2)} = -1\,041,664$$

$$S_\infty = \frac{-1\,250}{1-(-0,2)} = \frac{-1\,250}{1,2} = -1\,041,\widehat{6}$$

4 Progresiones geométricas sorprendentes

Página 73

1. **El día 1 de cierto mes, un banquero le propuso a otro el siguiente trato:**

Cada día de este mes yo te doy 100 000 € con la condición de que tú dupliques el dinero que haya en esta caja en la que ahora hay un céntimo. Al final de mes tú te quedas con lo que te he ido dando día a día y yo me quedo con lo que finalmente haya en la caja.

El otro banquero, después de pensar un rato y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me haces esta propuesta dentro de un año exactamente?

Esta conversación ocurrió entre el 1 de marzo de 2008 y el 1 de septiembre de 2015. Di, justificando tu respuesta, en qué día tuvo lugar.

Era el día 1 de febrero del año 2012, bisiesto. Es decir, un mes con 29 días.

Así, en este año las cuentas salen como sigue:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 29 = 2\,900\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{29} = 5\,368\,709$ €, cantidad muy superior a la anterior.

Sin embargo, febrero del año 2013 tendría un día menos, 28. Y las cuentas serían estas:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 28 = 2\,800\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{28} = 2\,684\,354{,}56$ €, cantidad inferior a la primera.

Ejercicios y problemas

Página 75

Practica

Sucesiones. Término general

1. **Calcula los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$ **b)** $b_n = \frac{n^2-1}{n}$ **c)** $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$

d) $d_n = \frac{n + n(-1)^n}{2}$ **e)** $e_n = n(n-2)$ **f)** $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$

a) $a_{10} = \frac{10}{2} - 5 = 0$; $a_{25} = \frac{25}{2} - 5 = 7{,}5$

b) $b_{10} = \frac{10^2-1}{10} = \frac{99}{10} = 9{,}9$; $b_{25} = \frac{25^2-1}{25} = \frac{624}{25} = 24{,}96$

c) $c_{10} = (-1)^{10} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $c_{25} = (-1)^{25} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

d) $d_{10} = \frac{10 + 10 \cdot (-1)^{10}}{2} = 10$; $d_{25} = \frac{25 + 25 \cdot (-1)^{25}}{2} = 0$

e) $e_{10} = 10 \cdot (10-2) = 80$; $e_{25} = 25 \cdot (25-2) = 575$

f) $f_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 2^{10} = 2^1 = 2$; $f_{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot 2^{25} = 2^1 = 2$

2. **Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:**

a) $a_1 = 1;\ a_n = 2a_{n-1} + 3$ **b)** $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

c) $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$; $a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$; $a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$; $a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$

b) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$; $a_3 = \frac{3}{2}$; $a_4 = \frac{3}{2} : 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $a_5 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_4 = 6 \cdot 3 = 18$; $a_5 = 18 \cdot 6 = 108$

3. **Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones y escribe tres términos más en cada una de ellas:**

a) 11, 9, 7, 5, … **b)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ **c)** 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **e)** 8, 12, 18, 27, … **f)** 0, 3, 8, 15, …

a) Restando 2 unidades al término anterior: $a_n = 11 - (n-1)2 = 13 - 2n$

b) Multiplicando por $\frac{1}{2}$ al término anterior: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Sumando 0,4 al término anterior: $a_n = 2,5 + (n - 1) \cdot 0,4 = 2,1 + 0,4n$

d) Dividiendo 1 por n, lugar que ocupa el término: $a_n = \dfrac{1}{n}$

e) Multiplicando por 1,5 al término anterior: $a_n = 8 \cdot 1,5^{n-1}$

f) Restando 1 a los cuadrados de los números naturales: $a_n = n^2 - 1$

4. **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) 12, 14, 16, 18, …

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$

c) 1, 3, 9, 27, …

d) 1 · 2; 2 · 3; 3 · 4; 4 · 5; …

a) $a_n = 10 + 2n$

b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

c) $a_n = 3^{n-1}$

d) $a_n = n \cdot (n+1)$

5. **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 8, 10, 2, –8, –10, …

b) 4, 1, 3, –2, 5, …

c) 1, 2, 2, 1, 1/2, …

d) 7, 9, 12, 16, 21, …

a) $a_1 = 8$ y $a_2 = 10$; $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $a_1 = 4$ y $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

c) $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

d) $a_1 = 7$; $a_n = a_{n-1} + n$

Progresiones

6. **Escribe los cuatro primeros términos, el término general y calcula la suma de los veinte primeros términos en cada una de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 1,5;\ d = 2$

b) $a_1 = 32;\ d = -5$

c) $a_1 = 5;\ d = 0,5$

d) $a_1 = -3;\ d = -4$

a) $a_1 = 1,5;\ a_2 = 3,5;\ a_3 = 5,5;\ a_4 = 7,5$

$a_n = 1,5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 0,5$

$a_{20} = 39,5;\ S_{20} = \dfrac{(1,5 + 39,5) \cdot 20}{2} = 410$

b) $a_1 = 32;\ a_2 = 27;\ a_3 = 22;\ a_4 = 17$

$a_n = 32 + (n-1) \cdot (-5) = 37 - 5n$

$a_{20} = -63;\ S_{20} = \dfrac{(32 - 63) \cdot 20}{2} = -310$

c) $a_1 = 5;\ a_2 = 5,5;\ a_3 = 6;\ a_4 = 6,5$

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 0,5 = 4,5 + 0,5n$

$a_{20} = 14,5;\ S_{20} = \dfrac{(5 + 14,5) \cdot 20}{2} = 195$

d) $a_1 = -3;\ a_2 = -7;\ a_3 = -11;\ a_4 = -15$

$a_n = -3 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 1$

$a_{20} = -79;\ S_{20} = \dfrac{(-3 - 79) \cdot 20}{2} = -820$

7. **Halla el término general y calcula la suma de los quince primeros términos en cada una de las siguientes progresiones:**

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) $\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 0, \dots$

a) Progresión aritmética de diferencia $d = -7 \rightarrow a_n = 25 + (n-1) \cdot (-7) = 32 - 7n$

$a_{15} = -73;\ S_{15} = \dfrac{(25 - 73) \cdot 15}{2} = -360$

b) Progresión aritmética de diferencia $d = 2 \rightarrow a_n = -13 + (n-1) \cdot 2 = -15 + 2n$

$a_{15} = 15;\ S_{15} = \dfrac{(-13+15) \cdot 15}{2} = 15$

c) Progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}5 \rightarrow a_n = 1{,}4 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 0{,}9 + 0{,}5n$

$a_{15} = 8{,}4;\ S_{15} = \dfrac{(1{,}4+8{,}4) \cdot 15}{2} = 73{,}5$

d) Progresión aritmética de diferencia $d = -1/4 \rightarrow a_n = \dfrac{3}{4} + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}n$

$a_{15} = -\dfrac{11}{4};\ S_{15} = \dfrac{-2 \cdot 15}{2} = -15$

8. **Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y su término general:**

a) $a_1 = 0{,}3;\ r = 2$

b) $a_1 = -3;\ r = \dfrac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ r = -0{,}1$

d) $a_1 = \dfrac{1}{81};\ r = 3$

a) $a_1 = 0{,}3;\ a_2 = 0{,}6;\ a_3 = 1{,}2;\ a_4 = 2{,}4;\ a_n = 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_1 = -3;\ a_2 = -3/2;\ a_3 = -3/4;\ a_4 = -3/8;\ a_n = -3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_1 = 200;\ a_2 = -20;\ a_3 = 2;\ a_4 = -0{,}2;\ a_n = 200 \cdot (-0{,}1)^{n-1}$

d) $a_1 = \dfrac{1}{81};\ a_2 = \dfrac{1}{27};\ a_3 = \dfrac{1}{9};\ a_4 = \dfrac{1}{3};\ a_n = \dfrac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$

9. **Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:**

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 5; 6; 7,2; 8,64; …

c) 0,7; 0,07; 0,007; …

d) $\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{2}, \ldots$

a) $a_n = 20 \cdot 0{,}4^{n-1}$

b) $a_n = 5 \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 0{,}7 \cdot 0{,}1^{n-1}$

d) $a_n = \dfrac{1}{6} \cdot (-3)^{n-1}$

10. **Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) 3, –6, 12, –24, …

b) 0,7; 1,4; 2,8; 5,6; …

c) $\dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, \ldots$

d) 100; 20; 4; 0,8; …

a) $r = -2;\ S_{10} = \dfrac{3 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -1\,023$

b) $r = 2;\ S_{10} = \dfrac{0{,}7 \cdot (2^{10} - 1)}{1} = 716{,}1$

c) $r = \dfrac{3}{2};\ S_{10} = \dfrac{\dfrac{2}{3} \cdot \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\dfrac{1}{2}} = 75{,}55$

d) $r = 0{,}2;\ S_{10} = \dfrac{100 \cdot (0{,}2^{10} - 1)}{-0{,}8} \approx 125$

11. **Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \dots$ **b)** **18; 16,2; 14,58; 13,122; …**

a) $r = 1/3;\ S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$ b) $r = 0{,}9;\ S_\infty = \frac{18}{1-0{,}9} = 180$

Aplica lo aprendido

12. **Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:**

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots$ **b)** $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ **c)** **0,2; 0,02; 0,002; …**

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ **e)** **22; –11; 5,5; –2,75; …** **f)** **18, 13, 8, 3, …**

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1)\frac{1}{8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8}n$.

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0{,}1$.

Término general: $a_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, … forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, … forman una progresión aritmética de término general n.

Término general de la sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

e) Progresión geométrica, $r = -0{,}5;\ a_n = 22 \cdot (-0{,}5)^{n-1}$

f) Progresión aritmética, $d = -5;\ a_n = 18 + (n-1)\cdot(-5) = 23 - 5n$

13. **¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 42 en la progresión aritmética definida por $a_3 = 6$ y $a_9 = 15$?**

Calculamos la diferencia: $15 = 6 + 6d \rightarrow d = 3/2$

Calculamos el primer término: $6 = a_1 + 2 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow a_1 = 3$.

$42 = 3 + (n-1)\cdot\frac{3}{2} \rightarrow 84 = 6 + 3n - 3 \rightarrow 3n = 81 \rightarrow n = 27$

El número 42 ocupa el lugar 27.

14. **Determina la diferencia de una progresión aritmética en la que $a_1 = 5$ y $a_7 = 32$.**

$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 32 = 5 + 6d \rightarrow d = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

Página 76

15. **Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $d = 5$; $a_8 = 37$

b) $a_{11} = 17$; $d = 2$

c) $a_2 = 18$; $a_7 = -17$

d) $a_4 = 15$; $a_{12} = 39$

a) $a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 37 = a_1 + 7 \cdot 5 \rightarrow a_1 = 2$

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 = -3 + 5n$

b) $a_{11} = a_1 + 10d \rightarrow 17 = a_1 + 10 \cdot 2 \rightarrow a_1 = -3$

$a_n = -3 + (n - 1)2 \rightarrow a_n = -5 + 2n$

c) $a_7 = a_2 + 5d \rightarrow -17 = 18 + 5d \rightarrow d = -7$

$a_1 = a_2 - d \rightarrow a_1 = 18 - (-7) = 25$

$a_n = 25 + (n - 1) \cdot (-7) = 32 - 7n$

d) $a_{12} = a_4 + 8d \rightarrow 39 = 15 + 8d \rightarrow d = 3$

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow a_1 = 15 - 9 = 6$

$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 3 = 3 + 3n$

16. **Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones geométricas:**

a) $a_3 = 3$; $r = 1/10$

b) $a_4 = 20{,}25$; $r = -1{,}5$

c) $a_2 = 0{,}6$; $a_4 = 2{,}4$

d) $a_3 = 32$; $a_6 = 4$

a) $a_3 = a_1 r^2 \rightarrow 3 = a_1\left(\frac{1}{10}\right)^2 \rightarrow a_1 = 300;\ a_n = 300\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

b) $a_4 = a_1 r^3 \rightarrow 20{,}25 = a_1(-1{,}5)^3 \rightarrow a_1 = -6;\ a_n = -6 \cdot (-1{,}5)^{n-1}$

c) $a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 2{,}4 = 0{,}6 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 2$. Hay dos soluciones.

- Si $r = 2$:

  $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 0{,}6 = a_1 \cdot 2 \rightarrow a_1 = 0{,}3;\ a_n = 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$

- Si $r = -2$:

  $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 0{,}6 = a_1 \cdot (-2) \rightarrow a_1 = -0{,}3;\ a_n = -0{,}3 \cdot (-2)^{n-1}$

d) $a_6 = a_3 \cdot r^3 \rightarrow 4 = 32 \cdot r^3 \rightarrow r = 0{,}5$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 32 = a_1 \cdot 0{,}5^2 \rightarrow a_1 = 128$

$a_n = 128 \cdot 0{,}5^{n-1}$

17. **La suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = -5$ es 120. Calcula a_{10} y la diferencia.**

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \rightarrow 120 = \frac{(-5 + a_{10}) \cdot 10}{2} \rightarrow 120 = -25 + 5a_{10} \rightarrow a_{10} = 29$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \rightarrow 29 = -5 + 9d \rightarrow d = \frac{34}{9}$$

18. **Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$. ¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?**

$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 8 = 1\,000 \cdot r^3 \rightarrow r = 0{,}2$

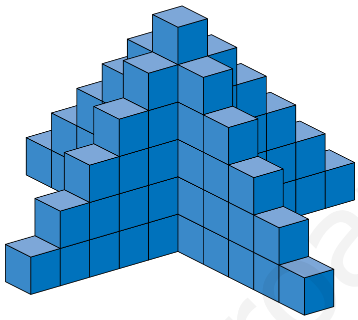
$a_5 = 1\,000 \cdot 0{,}2^4 = 1{,}6; \; S_5 = \dfrac{1000 \cdot (0{,}2^5 - 1)}{0{,}2 - 1} = 1\,249{,}6$

Se puede hallar la suma de los infinitos términos porque $r = 0{,}2 < 1$.

$S_\infty = \dfrac{1\,000}{1 - 0{,}2} = 1\,250$

Resuelve problemas

19. **Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 50 pisos.**



El número de bloques de cada piso es: 1, 5, 9, 13, 17, …

Es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 1$ y diferencia $d = 4$.

Término general $\rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 3$

$a_{50} = 4 \cdot 50 - 3 = 197$

$S_{50} = \dfrac{1 + 197}{2} \cdot 50 = 4\,950$

Para construir 50 pisos serán necesarios 4 950 bloques.

20. **Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer 15 km? ¿Cuántos kilométros recorrerá en total los días que dure el entrenamiento?**

$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow 15 = 3 + (n - 1) \cdot 1{,}5 \rightarrow 15 = 1{,}5 + 1{,}5n \rightarrow n = 9$ días

En los 9 días de entrenamiento habrá recorrido: $S_9 = \dfrac{(3 + 15) \cdot 9}{2} = 81$ km.

21. **La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?**

$a_{12} = a_1 + 11d \rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$

$S_{12} = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \dfrac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870$ mg

22. **Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 1 m durante el primer segundo, 4 m durante el segundo, 7 m durante el tercero, y así durante 10 segundos. ¿Qué distancia ha recorrido en total?**

1, 4, 7, … es una progresión aritmética con $d = 3$.

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot 3 \;\rightarrow\; a_{10} = 1 + 9 \cdot 3 = 28$ m recorre en 10 s.

23. **La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5 % anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?**

$a_{10} = 3 \cdot 1{,}025^9 = 3\,746\,589$ dentro de 10 años.

24. **En una progresión geométrica se conocen $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

a) $a_1 = 64 = 2^6$; $d = 0{,}75 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2^2}$

El primer término no entero es $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 2^6 \cdot 2^6 \cdot \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^4 = \dfrac{2^6 \cdot 3^4}{2^8} = \dfrac{3^4}{2^2} = \dfrac{81}{4} = 20{,}25$

b) $a_{15} = 64 \cdot 0{,}75^{14} = 1{,}14$; $a_{16} = 64 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}855$

El primer término menor que 1 es $a_{16} = 0{,}855$.

25. **Una máquina envasadora pierde cada año un 15 % de su valor. Si ha costado 20 000 €, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?**

$a_5 = a_1 \cdot r^4 \;\rightarrow\; a_5 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}15)^4 = 10\,440$ € será su valor dentro de 5 años.

26. **La suma de diez múltiplos de 3 consecutivos es 255. ¿Cuál es el primero y el último de los múltiplos sumados?**

Los múltiplos de 3 forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

$$255 = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 27) \cdot 5 = 10a_1 + 135 \;\rightarrow\; a_1 = 12$$

$a_{10} = 12 + 3 \cdot 9 = 39$

27. **Dibuja un triángulo equilátero de 16 cm de lado. Une los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos obtienes? ¿Cuánto miden sus lados?**

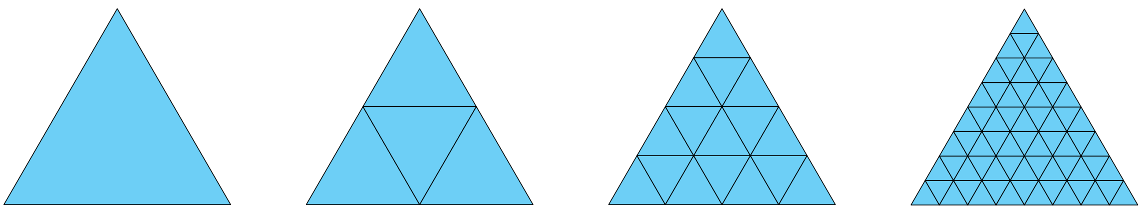
En estos triángulos, vuelve a unir los puntos medios, y así sucesivamente. Escribe las siguientes sucesiones y halla su término general:

a) Número de triángulos que tienes cada vez.

b) Longitudes de los lados de esos triángulos.

c) Áreas de los triángulos.

d) Si multiplicas cada término de la sucesión obtenida en a) por el correspondiente de la sucesión obtenida en c), ¿qué obtienes?



a) El número de triángulos que se van formando es 1, 4, 16, 64, …

Forman una progresión geométrica de razón $r = 4$ y primer término $a_1 = 1$.

Su término general es $a_n = 4^{n-1}$.

b) Las longitudes de los lados de los triángulos son: 16, 8, 4, 2, 1, …

Forman una progresión geométrica de primer término $a_1 = 16$ y razón $r = 0{,}5$.

Su término general es $a_n = 16 \cdot 0{,}5^{n-1}$.

c) Área del primer triángulo:

$$h_1 = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{2^8 - 2^6} = 2^3\sqrt{2^2 - 1} = 8\sqrt{3};\ \ A_1 = \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 8 \cdot 8\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$$

Área de los segundos triángulos:

$$h_2 = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{2^6 - 2^4} = 2^2\sqrt{2^2 - 1} = 4\sqrt{3};\ \ A_2 = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Área de los terceros triángulos:

$$h_3 = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{2^2 - 1} = 2\sqrt{3};\ \ A_3 = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Las áreas de los triángulos forman una progresión geométrica de primer término $a_1 = 64\sqrt{3}$ y razón $r = \frac{1}{4}$. Su término general es $a_n = 64\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

d) Se obtiene, para cada término, la suma de las áreas de los triángulos, que, en todos los casos, es igual al área del primer triángulo, $64\sqrt{3}$.

Se puede considerar que es una progresión geométrica de primer término $a_1 = 64\sqrt{3}$ y razón $r = 1$.

28. **Las edades de 4 hermanos están en progresión aritmética y suman 34 años. El mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

$$S_4 = 34;\ a_4 = 13;\ S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} \rightarrow 34 = \frac{(a_1 + 13) \cdot 4}{2} \rightarrow a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 13 = 4 + 3d \rightarrow d = 3$$

Por tanto, las edades son: 4, 7, 10 y 13 años.

29. **Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, recorriendo su diámetro. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca?¿ Llegará al otro lado de la charca?**

Los saltos forman una progresión geométrica, con $a_1 = 2$ y $r = \frac{2}{3}$.

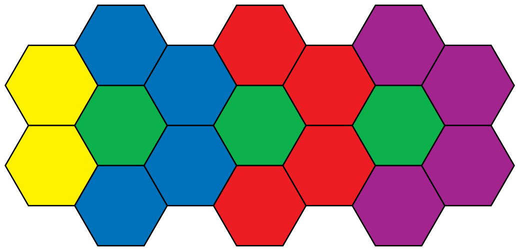
Si la rana salta infinitamente, en total recorrería:

$$S_\infty = \frac{2}{1 - 2/3} = 6 \text{ cm}$$

Por tanto, sí pasaría del centro de la charca (5 m), pero no llegará nunca al otro lado (19 m).

30. **Para adornar un paseo se colocan a lo largo de su línea central una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma, como muestra la figura. ¿Cuántas baldosas se necesitarán para poner 25 jardineras?**

Veamos un dibujo:



Así, es fácil entender que hacen falta:

— Para 1 jardinera, $1 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 2 jardineras, $2 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para 3 jardineras, $3 \cdot 4 + 2$ baldosas.

— Para n jardineras, $n \cdot 4 + 2$ baldosas.

Es una progresión aritmética con $a_1 = 6$ y $d = 4$, ya que:

$$a_n = 6 + (n - 1)4 = 4n + 2$$

Por tanto, para 25 jardineras hacen falta:

$$a_{25} = 4 \cdot 25 + 2 = 102 \text{ baldosas.}$$

Página 77

31. Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando las progresiones geométricas:

a) $7,\widehat{3}$ **b)** $3,5\widehat{4}$ **c)** $0,\widehat{23}$

a) $7,\widehat{3} = 7{,}3333\ldots = 7 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$

Suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000} \ldots$

$$S_\infty = \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$7,\widehat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

b) $3,5\widehat{4} = 3{,}54444\ldots = 3{,}5 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \ldots = \frac{35}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10\,000} + \ldots$

$$S_\infty = \frac{4/100}{1 - 1/10} = \frac{40}{900} = \frac{2}{45}$$

$$3,5\widehat{4} = \frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

c) $0,\widehat{23} = 0{,}23232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000} + \ldots$

$$S_\infty = \frac{23/100}{1 - 1/10} = \frac{23}{99}$$

$$0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$$

32. ¿Cuánto tardará en duplicarse un euro colocado en un banco al 5 % anual si los intereses se van acumulando al final de cada año?

Progresión geométrica con $r = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$; $a_1 = 1$ y $a_n = a_1 \cdot 1{,}05^{n-1}$

$2 = 1 \cdot 1{,}05^{n-1} \to n = 16$ años

33. Una persona inicia un plan de pensiones ingresando, al principio de cada año, 3 000 € al 6 % anual. ¿Qué capital tendrá dentro de 10 años?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 3\,000 \cdot 1{,}06$ y $r = 1{,}06$.

Lo que nos están pidiendo es S_{10}:

$$S10 = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3\,000 \cdot 1{,}06^{11} - 3\,000 \cdot 1{,}06}{0{,}06} = 41\,914{,}93\ €$$

34. Un grupo de amigos acuerda ahorrar dinero para un viaje. El primer día de diciembre, cada uno pone 0,50 €; el segundo día, 1 €; el tercero, 1,5 €, y así sucesivamente hasta terminar el mes.

a) ¿Cuánto ahorrará cada uno?

b) El tesorero le dijo a Ana que no había hecho el depósito del día 15. ¿Cuánto debe Ana?

c) En la cuenta de Paco hay 237 €. ¿Qué día no puso el dinero?

a) Progresión aritmética con $a_1 = 0{,}5$; $d = 0{,}5$.

Diciembre tiene 31 días. $a_{31} = 0{,}5 + 30d = 15{,}5$ €

Lo que cada uno ahorra es la suma de los 31 términos $\rightarrow S_{31} = \dfrac{(0{,}5 + 15{,}5) \cdot 31}{2} = 248$ €

b) Ana debe $a_{15} = 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}5 = 7{,}50$ €.

c) $248 - 237 = 11$; $11 = 0{,}5 + (n - 1) \cdot 0{,}5 \rightarrow n = 22$. No puso dinero el día 22.

35. **En una progresión geométrica, la suma de sus infinitos términos es 2 y la diferencia entre el primero y el segundo es 2/9. Halla el primer término y la razón. ¿Hay más de una solución?**

$$a_1 - a_2 = \frac{2}{9} \rightarrow a_1 - a_1 r = \frac{2}{9} \rightarrow a_1(1 - r) = \frac{2}{9} \rightarrow 1 - \text{r} = \frac{2}{9a_1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{a_1}{\dfrac{2}{9a_1}} = \frac{9a_1^2}{2} \rightarrow 2 = \frac{9a_1^2}{2} \rightarrow 4 = 9a_1^2 \rightarrow a_1^2 = \frac{4}{9} \rightarrow a_1 = \pm\frac{2}{3}$$

$$a_1 = \pm\frac{2}{3} \begin{cases} 1 - r = \dfrac{2}{9 \cdot \dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \rightarrow r = \dfrac{2}{3} \\[2ex] 1 - r = \dfrac{2}{9 \cdot \dfrac{-2}{3}} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow r = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

La solución $r = \frac{4}{3} > 1$ (con este valor, no se puede calcular S_∞) no es válida.

Hay, por tanto, una única solución: $a_1 = \frac{2}{3}$, $r = \frac{2}{3}$.

Problemas "+"

36. **Un agricultor debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que hay en su huerto. Estos están alineados a distancias regulares de 6 m a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 m.**

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los 20 árboles y dejar el cubo en su posición inicial, junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

a) Para regar el primero y dejar el cubo donde estaba, recorre 12 metros de ida y 12 metros de vuelta $\rightarrow$ $a_1 = 24$.

Para regar el segundo y dejar el cubo en la fuente, recorre 36 metros $\rightarrow$ $a_2 = 36$.

Para regar el tercero y dejar el cubo en la fuente, recorre 48 metros $\rightarrow$ $a_3 = 48$.

…

Es una progresión aritmética con $d = 12$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 24 + 12n - 12 = 12n + 12$

$a_n = 12n + 12$

$a_{20} = 12 \cdot 20 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(24 + 252) \cdot 20}{2} = 2760 \text{ m}$$

b) Para regar los árboles 1.º y 2.º, recorre (dejando el cubo en la fuente) 36 m: $b_1 = 36$.

Para regar los árboles 3.º y 4.º, recorre 60 m $\rightarrow$ $b_2 = 60$.

Es una progresión aritmética con $d = 24$.

$b_n = 36 + (n - 1) \cdot 24 = 36 + 24n - 24 = 24n + 12$

$b_{10} = 240 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{10} = \frac{(b_1 + b_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(36 + 252) \cdot 10}{2} = 1440 \text{ m}$$

37. Un comerciante recibe un pedido de 20 cajas de naranjas, 7 de clase extra, y 13 de una calidad inferior. Quiere exponerlas al público formando una pirámide de base cuadrada con 12 naranjas de lado en la base, de forma que las naranjas visibles sean de la clase extra. Si en cada caja hay alrededor de 40 naranjas, ¿tendrá suficientes naranjas para ello?

El primer piso es un cuadrado de 12 naranjas de lado.

Las que se ven son: $12 \cdot 4 - 4 = 44$

En el 2.º piso se ven $11 \cdot 4 - 4 = 40$.

En el 3.er piso se ven $10 \cdot 4 - 4 = 36$.

Las naranjas visibles son $44 + 40 + 36 + \ldots + 4 + 1$.

Los 11 primeros pisos forman una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 44 - (n - 1) \cdot 4 = 48 - 4n$ y cuya suma es:

$$S_{11} = \frac{44 + 4}{2} \cdot 11 = 264$$

Añadimos la que corona la pirámide y son 265 las naranjas visibles.

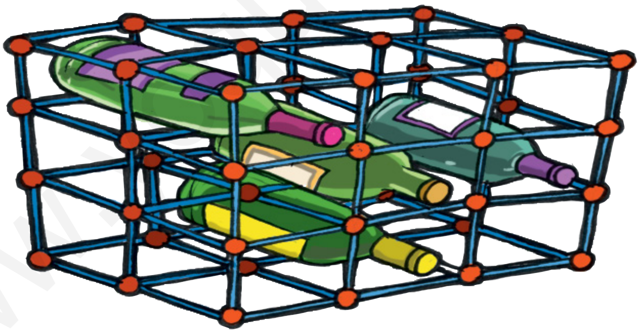
Las 7 cajas de naranjas extras contienen $7 \cdot 40 = 280$ naranjas, que son suficientes para la parte visible.

Las naranjas que no se ven son:

$$10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$$

Como tiene $13 \cdot 40 = 520$, también son suficientes.

38. Queremos construir un botellero como el de la figura, en el que cada botella ocupa dos celdillas. Observa que en este caben nueve botellas.



¿Cuántas bolas y cuántos palos son necesarios para hacer uno en el que quepan doce botellas?

Para el primer piso se necesitan 24 bolas y 46 palos.

Para dos pisos se necesitan 36 bolas y 75 palos.

Las bolas forman una progresión aritmética con $a_1 = 24$ y $d = 12$. El término general es $a_n = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 12 + 12n$.

Los palos forman una progresión aritmética con:

$a_1 = 46$ y $d = 29 \rightarrow a_n = 46 + (n - 1) \cdot 29 \rightarrow a_n = 17 + 29n$

Para 12 botellas necesitamos un piso más. Por tanto:

$a_4 = 12 + 12 \cdot 4 = 60$ bolas

$a_4 = 17 + 29 \cdot 4 = 133$ palos

Reflexiona sobre la teoría

39. **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) La diferencia en las progresiones aritméticas es siempre un número negativo.

b) No se puede hallar la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica si esta es creciente.

c) La sucesión 3, 3, 3, 3, … no es una progresión.

d) Si sumamos dos progresiones aritméticas, se obtiene otra progresión aritmética.

e) En todas las progresiones aritméticas se verifica que $a_2 + a_{13} = a_{15}$.

f) Si en una progresión aritmética $a_5 + a_{17} = 32$, podemos saber cuánto vale a_{11}.

a) Falso, puede ser positivo o negativo.

b) Verdadero, porque es una progresión geométrica creciente ha de ser $r > 1$.

c) Falso. Es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 0$, o una progresión geométrica de primer término $a_1 = 3$ y razón $r = 1$.

d) Verdadero. Se obtiene una progresión aritmética de primer término la suma de los primeros términos y de diferencia, la suma de las diferencias.

$a_n = a_1 + (n-1)d_1;\ b_n = b_1 + (n-1)d_2;\ a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(d_1 + d_2)$

e) Verdadero. $a_2 + a_{13} = a_1 + 14d = a_{15}$

f) Verdadero. $a_5 + a_{17} = 2a_1 + 20d = 32 \rightarrow a_1 + 10d = a_{11} = 16$

40. **Euclides, en sus *Elementos*, utiliza la siguiente fórmula para las progresiones geométricas:**

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

A partir de ella, obtén la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, tal como la hemos estudiado en esta unidad.

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \rightarrow a_1(a_{n+1} - a_1) = S(a_2 - a_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1 r - a_1} = \frac{a_1(a_n r - a_1)}{a_1(r-1)} \rightarrow S = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

Página 78

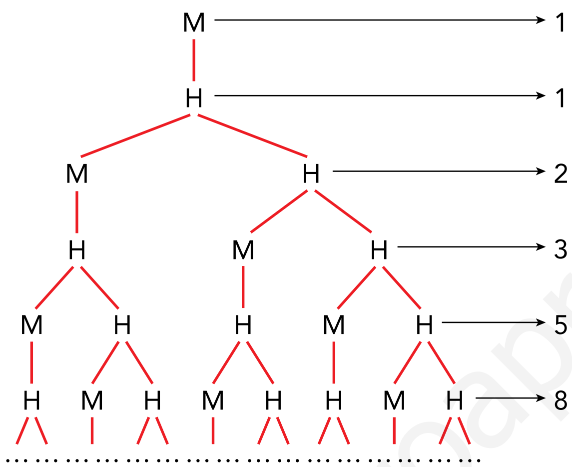
Lee y comprende

Una sucesión famosa

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El siguiente esquema nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- **¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?**

  El número de antepasados en cada una de las diez primeras generaciones es:

  $$1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 9$$

- **¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?**

  Ley de formación: Cada término se obtiene sumando los dos que le preceden:

  $$a_1 = 1; \; a_2 = 2; \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

- **¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?**

  Sucesión de Fibonacci.

Página 79

Entrénate resolviendo problemas

- **Los participantes en un desfile pueden agruparse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9.**

  ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que está entre 1 000 y 1 250?

  El número de participantes es un múltiplo de $3 \cdot 25 = 75$ (ten en cuenta que 25 es múltiplo de 5).

  Los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 000 y 1 250 son:

  1 050   1 125   1 200

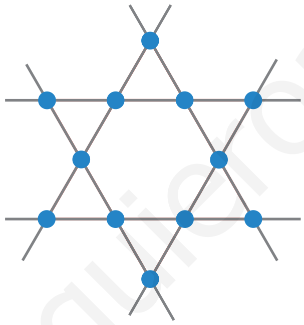
  1 050 no es múltiplo ni de 4 ni de 9.

  1 125 es múltiplo de 9.

  1 200 es múltiplo de 4.

  Por tanto, el número de participantes es de 1 050.

- **Sitúa 12 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 6 filas de 4 soldados.**



- **a) ¿Cuántas de estas monedas hemos de tocar para que las tres caras estén a la izquierda y las tres cruces a la derecha?**

  b) ¿Cuántas de estas copas hemos de tocar para que queden tres llenas a la izquierda y tres vacías a la derecha?

  a) Da la vuelta a las monedas que están en las posiciones segunda y quinta.

  b) Toma la quinta copa y vierte su contenido en la segunda.

Autoevaluación

1. Escribe el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $-\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots$

b) **3; 0,6; 0,12; 0,024; …**

c) **1,2; 2,3; 3,4; 4,5; …**

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

a) $a_n = -5 + \frac{n}{2}$ b) $a_n = 3 \cdot 0{,}2^{n-1}$ c) $a_n = 0{,}1 + 1{,}1n$ d) $a_n = \frac{1}{n+2}$

2. Define por recurrencia la sucesión 8, 14, 6, –8, … y escribe los tres términos siguientes.

$a_1 = 8;\ a_2 = 14 \rightarrow a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

Tres términos siguientes: –14, –6, 8, …

3. Calcula la suma de los diez primeros términos de las siguientes progresiones:

a) **9; 6,5; 4; 1,5; …**

b) **2, –4, 8, –16, …**

a) Progresión aritmética de primer término 9 y diferencia $d = -2{,}5$.

$$a_{10} = 9 - (9 \cdot 2{,}5) = -13{,}5;\ S_{10} = \frac{(9 - 13{,}5) \cdot 10}{2} = -22{,}5$$

b) Progresión geométrica de primer término 2 y razón $r = -2$.

$$S_{10} = \frac{2 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -682$$

4. En una progresión aritmética conocemos $a_5 = 22$ y $a_9 = 38$. Calcula a_{25} y el lugar que ocupa un término cuyo valor es 58.

$a_9 = a_5 + 4d \rightarrow 38 = 22 + 4d \rightarrow d = 4$

$22 = a_1 + 4 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 6$

$a_{25} = 6 + 24 \cdot 4 = 102$

$58 = 6 + (n - 1) \cdot 4 \rightarrow n = 14$

5. Halla la fracción generatriz de $6,\widehat{4}$ utilizando las progresiones geométricas.

$6,\widehat{4} = 6 + 0,\widehat{4} = 6 + 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 00004 + \ldots$

0,4; 0,04; 0,004; … es una progresión geométrica de primer término 0,4 y razón 0,1. La suma de sus infinitos términos es $S_\infty = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} = \frac{4}{9}$.

$6,\widehat{4} = 6 + 0,\widehat{4} = 6 + \frac{4}{9} = \frac{58}{9}$

6. La suma de doce múltiplos consecutivos de 5 es 750. Halla el primero y el último de los múltiplos sumados.

Los múltiplos de 5 forman una progresión aritmética de diferencia $d = 5$.

$$750 = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} \rightarrow a_1 = 125 - a_{12}$$

$a_{12} = a_1 + 55$

Sustituyendo, $a_1 = 125 - (a_1 + 55) \rightarrow a_1 = 35$ y $a_{12} = 90$.

7. **Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 15 000 € anuales y una subida de 500 € cada año siguiente. Otra empresa le ofrece el mismo sueldo con una subida del 5 % anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 5 años.**

En el primer caso tenemos una progresión aritmética:

$a_1 = 15\,000;\ \ d = 500 \ \to\ a_5 = 15\,000 + 4 \cdot 500 = 17\,000$ €

En el segundo caso tenemos una progresión geométrica:

$a_1 = 15\,000;\ \ r = 1{,}05 \ \to\ a_5 = 15\,000 \cdot 1{,}05^4 = 18\,232{,}59$ €

Es mejor la segunda oferta.

8. **Para rodar un anuncio se ha contratado a un gran número de personas que deben colocarse en 51 filas. Cada fila tiene dos personas más que la anterior y en la fila 26 tiene que haber 57 personas. Averigua cuántas personas hay en la primera fila, cuántas en la última y el número total de personas que intervienen en el anuncio.**

Es una progresión aritmética de la que sabemos $n = 51$, $d = 2$ y $a_{26} = 57$.

$a_{26} = a_1 + 25d \ \to\ 57 = a_1 + 25 \cdot 2 \ \to\ a_1 = 7$

$a_{51} = a_1 + 50d \ \to\ a_{51} = 7 + 50 \cdot 2 = 107$

$S_{51} = \dfrac{7 + 107}{2} \cdot 51 = 2\,907$ personas en total.

9. **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Para calcular S_{20} en una progresión aritmética o geométrica, basta con conocer dos de sus términos.

b) Los términos de una progresión geométrica se pueden obtener multiplicando cada término por el anterior.

c) Se puede calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica si $-1 < r < 1$.

d) Una progresión aritmética es decreciente cuando la diferencia es menor que 1.

a) Verdadero. Con dos términos podemos calcular la diferencia o la razón.

b) Falso. Cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón.

c) Verdadero. Se puede calcular siempre que $|r| < 1$, lo que es equivalente a $-1 < r < 1$.

d) Falso. Es decreciente cuando la diferencia es menor que 0 (negativa).