Problemas de divisibilidad

1. Tenemos 24 botellas de agua. Queremos envasarlas en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten botellas. **Averigua todas las soluciones posibles.**

2. En el almacén tenemos 45 paquetes de 1 kg de arroz. Hay que meterlos en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten paquetes. **Calcula todas las soluciones posibles.**

3. Un viajero va a Barcelona cada 8 días y otro cada 12 días. Hoy han estado los dos en Barcelona.

¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

4. Un faro se enciende cada 18 segundos, otro cada 36 segundos y un tercero cada minuto. A las 6:30 de la tarde los tres coinciden.

Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

5. Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 90 minutos y un tercero que da una señal cada 150 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal.
a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?
b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

6. Un libro tiene entre 400 y 450 páginas. Si las contamos de 2 en 2 no sobra ninguna, si las contamos de 5 en 5 no sobra ninguna y si las contamos de 7 en 7 tampoco sobra ninguna.

¿Cuántas páginas tiene el libro?

7. En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 litros, 360 litros, y 540 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. **Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueden envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.**

8. Se desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chocolatines entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de cada uno de esos elementos. **¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse así y qué cantidad recibe cada uno?**

9. Un jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de jacintos y 480 de claveles en el menor número posible de planteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas. **¿Qué cantidad de plantas debe contener cada plantero y cuántos hay?**

Soluciones de los Problemas de divisibilidad

1. Tenemos 24 botellas de agua. Queremos envasarlas en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten botellas. **Averigua todas las soluciones posibles.**

Como no queremos que sobren ni falten botellas y queremos repartirlas en cajas iguales, este problema se resuelve calculando los divisores de 24:

Div(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

24	1 1	24	1 2	24	1 3	24	1 4	~~24~~	~~1 5~~
00	24	00	12	00	8	00	6	~~04~~	~~4~~

Todas las soluciones posibles son:

1 caja con **24** botellas

2 cajas con **12** botellas cada una

3 cajas con **8** botellas cada una

4 cajas con **6** botellas cada una

6 cajas con **4** botellas cada una

8 cajas con **3** botellas cada una

12 cajas con **2** botellas cada una

24 cajas con **1** botella cada una

2. En el almacén tenemos 45 paquetes de 1 kg de arroz. Hay que meterlos en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten paquetes. **Calcula todas las soluciones posibles.**

Este ejercicio es igual que el anterior. Calculamos los divisores de 45:

div (45) = {**1, 3, 5, 9, 15, 45** }

45	1 1	~~45~~	~~1 2~~	45	1 3	~~45~~	~~1 4~~	45	1 5	~~45~~	~~1 6~~	~~45~~	~~1 7~~
00	45	~~01~~	~~22~~	00	15	~~01~~	~~11~~	00	9	~~03~~	~~7~~	~~03~~	~~6~~

Todas las soluciones posibles son:

1 caja con **45** paquetes

3 cajas con **15** paquetes cada una

5 cajas con **9** paquetes cada una

9 cajas con **5** paquetes cada una

15 cajas con **3** paquetes cada una

45 cajas con **1** paquete cada una

3. Un viajero va a Barcelona cada 8 días y otro cada 12 días. Hoy han estado los dos en Barcelona.

¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

Como un viajero va cada 8 días y otro cada 12 días, se trata de buscar un múltiplo común de 8 y de 12 y para saber cual es la primera vez que se encontrarán calculamos el m.c.m. (8 y 12)

8	2
4	2
2	2
1	

12	2
6	2
3	3
1	

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \times 3$

m.c.m (8 y 12) = $2^3 \times 3 = 24$

Solución: Se encontrarán dentro de 24 días.

Si hoy es 2 de noviembre volverán a coincidir el 26 de noviembre

4. Un faro se enciende cada 18 segundos, otro cada 36 segundos y un tercero cada minuto. A las 6:30 de la tarde los tres coinciden.

Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

Se trata de buscar un número que sea múltiplo de 18, 36 y 60 (1 minuto). La primera vez que coinciden se sabe calculando el m.c.m.(18, 36 y 60)

18	2
9	3
3	3
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$18 = 2 \times 3^2$

$36 = 2^2 \times 3^2$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

m.c.m.(18, 36, 60) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$ segundos

180 segundos 1 60

00 3 minutos.

Solución: Como coincidieron a las 6:30, volverán a coincidir a las 6:33

Por lo tanto en los 5 minutos siguientes sólo coinciden una vez, a los 3 minutos.

5. Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 90 minutos y un tercero que da una señal cada 150 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal.

a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?

b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

Se trata de buscar un múltiplo común de 60, 90 y 150. La primera vez que suenan las señales a la vez se averigua calculando el m.c.m.(60, 90, 150)

60	2	90	2	150	2	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
30	2	45	3	75	3	$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
15	3	15	3	25	5	$150 = 2 \times 3 \times 5^2$
5	5	5	5	5	5	
1		1		1		

m.c.m.(60, 90, 150) = $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 4 \times 9 \times 25 = 900$ minutos

900 minutos | 60

300 | 15 horas

00

a) Solución: Los tres relojes darán la señal a la vez dentro de 15 horas.

b) Solución: Sonarán a las 12 de la noche **9 + 15 = 24:00 = 12 de la noche**

6. Un libro tiene entre 400 y 450 páginas. Si las contamos de 2 en 2 no sobra ninguna, si las contamos de 5 en 5 no sobra ninguna y si las contamos de 7 en 7 tampoco sobra ninguna.

¿Cuántas páginas tiene el libro?

Como las puedo contar de 2 en 2, de 5 en 5 y de 7 en 7, tengo que buscar un múltiplo común de 2, 5 y 7 que esté comprendido entre 400 y 450.

1º Calculamos el m.c.m.(2, 5, 7)

2	2	5	5	7	7	2 = 2
1		1		1		5 = 5
						7 = 7

m.c.m.(2, 5, 7) = 2 x 5 x 7 = 70 páginas

2º Como el número de páginas está entre 400 y 450, calculamos los múltiplos de 70

Múltiplos de 70 = {0, 70, 140, 210, 280, 350, **420**, 490,...}

Solución: El número de páginas que tiene el libro son 420

7. En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 litros, 360 litros, y 540 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. **Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueden envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.**

Se trata de repartir (dividir) 250, 360 y 540 litros en garrafas iguales y que sean lo más grandes posibles. Este problema se resuelve calculando el M.C.D.(250, 360, 540)

250	2	360	2	540	2
125	5	180	2	270	2
25	5	90	2	135	3
5	5	45	3	45	3
1		15	3	15	3
		5	5	5	5
		1		1	

$250 = 2 \quad \times 5^3$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$540 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

M.C.D. (250, 360, 540) = 2 x 5 = 10 litros

Solución: Las garrafas son de 10 litros.

Para averiguar cuántas garrafas se necesitan sumamos el vino de los tres toneles y lo dividimos entre 10:

(250 + 360 + 540) : 10 = 1.150 : 10 = 115 garrafas

Solución: Se necesitan 115 garrafas de 10 litros cada una

8. Se desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chocolatines entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de cada uno de esos elementos. **¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse así y qué cantidad recibe cada uno?**
Este problema es igual que el anterior. Se calcula el M.C.D., de (180, 240 y 360)

180	2	240	2	360	2
90	2	120	2	180	2
45	3	60	2	90	2
15	3	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

M.C.D. (180, 240, 360) = 2^2 x 3 x 5 = 4 x 3 x 5 = 60 niños

Solución: El mayor número de niños para repartir es 60.

Para saber la cantidad que recibe cada uno, dividimos 180 libros, 240 juguetes y 360 chocolatines entre los 60 niños:

180 libros : 60 = 3 libros 240 juguetes : 60 = 4 juguetes 360 choc. : 60 = 6 choc.

Solución: Cada niño recibe 3 libros, 4 juguetes y 6 chocolatinas.

9. Un jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de jacintos y 480 de claveles en el menor número posible de planteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas. **¿Qué cantidad de plantas debe contener cada plantero y cuántos hay?**

Se trata de repartir (dividir) las plantas en planteros que sean lo mayor posibles sin que sobren ni falten plantas. Hay que calcular el M.C.D., de (720, 240, 360 y 480)

720	2	240	2	360	2	480	2
360	2	120	2	180	2	240	2
180	2	60	2	90	2	120	2
90	2	30	2	45	3	60	2
45	3	15	3	15	3	30	2
15	3	5	5	5	5	15	3
5	5	1		1		5	5
1						1	

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$
$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$480 = 2^5 \times 3 \times 5$

M.C.D. (720, 240, 360, 480) = $2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5 = 120$ plantas
Solución: En cada plantero caben 120 plantas

Para saber cuántos planteros necesito, sumamos todas las plantas y el resultado lo dividimos entre 120
(720 + 240 + 360 + 480) : 120 = 1.800 : 120 = 15 planteros
Solución: Se necesitan 15 planteros de 120 plantas cada uno.