

4 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1 Indicamos con la letra l el lado de un hexágono regular.

- a) ¿Cómo expresarías su perímetro?
b) ¿Cuál es el valor del perímetro si el lado mide 3,5 centímetros?

- a) $6 \cdot l$
b) Si $l = 3,5$ cm, perímetro = $6 \cdot 3,5$ cm = 21 cm

4.2 Expresa en lenguaje algebraico esta información.

- a) "En un cibercafé cobran 0,75 euros por conectarse a internet más 1,25 euros por cada hora de uso".
b) "El triple de su edad menos cinco años".

- a) Si indicamos con t el número de horas de uso, el coste se puede expresar así: $0,75 + 1,25t$
b) Si indicamos con x la edad, podemos escribir: $3x - 5$.

4.3 Expresa matemáticamente esta propiedad:

"La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a 360 grados".

$$a + b + c + d = 360$$

Siendo a , b , c y d las medidas en grados de los ángulos del cuadrilátero.

4.4 Un cristal para enmarcar cuadros tiene un precio fijo de 25 euros, y cada decímetro del marco cuesta 4 euros. Expresa con una fórmula el coste de enmarcar un cuadro cualquiera.

$$c = 25 + 4x$$

Siendo x el número de decímetros del marco del cuadro y c el coste.

4.5 Utiliza el lenguaje algebraico para escribir las siguientes expresiones.

- a) Área del triángulo.
b) Perímetro del cuadrado.
c) Volumen del ortoedro.

Indica el significado de las letras que utilices.

- a) Área del triángulo = $\frac{b \cdot h}{2}$, siendo b la base, y h , la altura del triángulo.
b) Perímetro del cuadrado = $4 \cdot l$, siendo l el lado del cuadrado.
c) Volumen del ortoedro = $a \cdot b \cdot c$, siendo a , b y c las aristas del ortoedro.

4.6 Transcribe al lenguaje usual las siguientes expresiones algebraicas.

- a) $2(a + b)$ b) $\frac{1}{x}$ c) $(x + y)^2$ d) $3b^3 - b^2$ e) $5 \cdot \frac{1}{x^2}$ f) $3 \cdot \sqrt{x - 1}$

- a) Doble de la suma de a y b .
b) Inverso de x .
c) Suma de dos números al cuadrado.
d) Diferencia del triple del cubo de b y del cuadrado de b .
e) Quíntuplo del inverso de un número al cuadrado.
f) Triple de la raíz cuadrada de x menos 1.

4.7 Escribe la expresión del área del triángulo. Indica si es un monomio o un polinomio, y determina su grado.

La expresión del área del triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$. Siendo b la base, y h , la altura del triángulo.
Es un monomio de 2.º grado.

4.8 A partir de $7a$, $5b$, $8ac$, $9abc$ forma un binomio de primer grado y un trinomio de tercer grado.

Binomio de 1.º grado: $7a + 5b$
Trinomio de 3.º grado: $5b + 7a - 9abc$

4.9 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los datos que se indican:

- a) $x^5 - x^2$ para $x = -1$
b) $a^2 + b^2$ para $a = 1$ y $b = -1$
c) $3n^2 - 5abc$ para $n = 1$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$
d) $-x - y - z^5$ para $x = -2$, $y = 1$, $z = -1$

- a) $x^5 - x^2$ para $x = -1 \rightarrow (-1)^5 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$
b) $a^2 + b^2$ para $a = 1$ y $b = -1 \rightarrow 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$
c) $3n^2 - 5abc$ para $n = 1$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 0 \rightarrow 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 3 - 0 = 3$
d) $-x - y - z^5$ para $x = -2$, $y = 1$, $z = -1 \rightarrow -(-2) - 1 - (-1)^5 = 2 - 1 + 1 = 2$

4.10 Considera la fórmula que relaciona la longitud y el radio de la circunferencia:

$$L = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$

- a) Calcula el valor numérico para $r = 5$, $r = 0$ y $r = -2$.
b) Interpreta geoméricamente los valores obtenidos en el apartado anterior.

- a) Para $r = 5$ $L = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4$
Para $r = 0$ $L = 2 \cdot 3,14 \cdot 0 = 0$
Para $r = -2$ $L = 2 \cdot 3,14 \cdot (-2) = -12,56$

- b) Si el radio de la circunferencia mide 5 cm, su longitud es de 31,4 cm.
Si el radio es 0, no existe circunferencia. Luego el valor numérico no tiene sentido geométrico.
No existe circunferencia de radio -2 . Luego el valor numérico $-12,56$ no tiene significado geométrico.

4.11 Reduce las siguientes expresiones.

- a) $2b^2 - 4b^2$ b) $6x^2 - x^2$ c) $5p^2 + 1 - 3p^2$

- a) $2b^2 - 4b^2 = -2b^2$
b) $6x^2 - x^2 = 5x^2$
c) $5p^2 + 1 - 3p^2 = 2p^2 + 1$

4.12 Realiza las siguientes operaciones.

- a) $3x \cdot x^2 \cdot 2y$ b) $a^3 : a^2$ c) $-4x^2y : 2x^2y^2$

- a) $3x \cdot x^2 \cdot 2y = 6x^3y$
b) $a^3 : a^2 = a$
c) $-4x^2y : 2x^2y^2 = \frac{-2}{y}$

4.13 Haz las siguientes sumas y restas.

- a) $(a + b + c) - (a + b)$
b) $(2x^2 - 1) - (5 - 3x^2)$
c) $\left(\frac{1}{4}y^2 - b\right) + \left(\frac{2}{5}b + y^2\right) - (1 - y^2)$

- a) $(a + b + c) - (a + b) = a + b + c - a - b = c$
b) $(2x^2 - 1) - (5 - 3x^2) = 2x^2 - 1 - 5 + 3x^2 = 5x^2 - 6$
c) $\left(\frac{1}{4}y^2 - b\right) + \left(\frac{2}{5}b + y^2\right) - (1 - y^2) = \frac{1}{4}y^2 - b + \frac{2}{5}b + y^2 - 1 + y^2 = \frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{5}b - 1$

4.14 Calcula los siguientes productos.

- a) $(-x) \cdot (1 - 2x^2)$ b) $(y^2 - 3y + 2) \cdot (y - 1)$

- a) $(-x) \cdot (1 - 2x^2) = -x + 2x^3$
b) $(y^2 - 3y + 2) \cdot (y - 1) = y^3 - 3y^2 + 2y - y^2 + 3y - 2 = y^3 - 4y^2 + 5y - 2$

4.15 Realiza las siguientes divisiones.

a) $(x^4y + xy - 3xy^3) : xy$

b) $(6x - 2xy + 4xz) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{3}{5}x^2y^2 + \frac{1}{6}xy^3\right) : \frac{5}{3}x$

d) $(x^2 - x + 2y) : 2x$

a) $(x^4y + xy - 3xy^3) : xy = x^3 + 1 - 3y^2$

b) $(6x - 2xy + 4xz) : \left(-\frac{1}{2}x\right) = -12 + 4y - 8z$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{3}{5}x^2y^2 + \frac{1}{6}xy^3\right) : \frac{5}{3}x = \frac{2}{5}x^2y - \frac{9}{25}xy^2 + \frac{1}{10}y^3$

d) $(x^2 - x + 2y) : 2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{y}{x}$

4.16 Desarrolla los cuadrados de estos binomios.

a) $(-x - 1)^2$

b) $(2xy - a)^2$

c) $(7x^3 - 2y^2)^2$

a) $(-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(2xy - a)^2 = 4x^2y^2 - 4xya + a^2$

c) $(7x^3 - 2y^2)^2 = 49x^6 - 28x^3y^2 + 4y^4$

4.17 Halla el resultado de estos productos.

a) $(1 - p) \cdot (p + 1)$

b) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2)$

a) $(1 - p) \cdot (p + 1) = (1 - p) \cdot (1 + p) = 1 - p^2$

b) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2) = x^4 - 4$

4.18 Copia las siguientes expresiones y sustituye el símbolo \square por lo que corresponda para que los trinomios sean cuadrados perfectos.

a) $1 + \square p + p^2$

b) $z^2 - 4zx + \square$

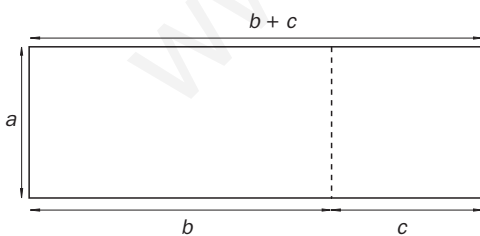
a) $1 + \square p + p^2 = 1 + 2p + p^2$

b) $z^2 - 4zx + \square = z^2 - 4zx + 4x^2$

PROBLEMAS PROPUESTOS

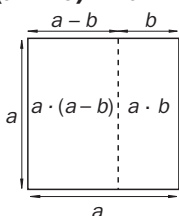
4.19 Justifica mediante un dibujo que se cumple esta igualdad.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



4.20 Justifica mediante un dibujo que se cumple esta igualdad.

$$a \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b$$



4.21 El área de un triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$, siendo b la base y h la altura. Calcula el área de los triángulos de base y altura siguientes.

- a) $b = 4$ cm; $h = 1$ cm
 b) $b = 5$ cm; $h = 4$ cm
 c) $b = 12$ cm; $h = 10$ cm
 d) $b = 1$ m; $h = 0,5$ m

a) $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ cm}^2$

c) $\frac{12 \cdot 10}{2} = 60 \text{ cm}^2$

b) $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$

d) $\frac{1 \cdot 0,5}{2} = 0,25 \text{ m}^2$

4.22 En las siguientes fórmulas, calcula el valor de y para los valores que se indican.

- a) $y = x^2 - x$ para $x = 3$
 b) $y = 4x - 5$ para $x = 1$
 c) $y = 3z^2 - 10$ para $z = 2$
 d) $y = 20 - 2rt^2$ para $r = 1$ y $t = 5$

a) $y = x^2 - x$ para $x = 3 \rightarrow y = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

b) $y = 4x - 5$ para $x = 1 \rightarrow y = 4 \cdot 1 - 5 = 4 - 5 = -1$

c) $y = 3z^2 - 10$ para $z = 2 \rightarrow y = 3 \cdot 2^2 - 10 = 12 - 10 = 2$

d) $y = 20 - 2rt^2$ para $r = 1$ y $t = 5 \rightarrow y = 20 - 2 \cdot 1 \cdot 5^2 = 20 - 50 = -30$

4.23 Realiza las siguientes operaciones.

- a) $5x^3 - x^3$
 b) $ab + 4ab$
 c) $-x + 2x$
 d) $3xy^2z^5 - 2xy^2z^5$
 e) $2xy - xy + xy$
 f) $4a^2 + 5ab$

a) $5x^3 - x^3 = 4x^3$

b) $ab + 4ab = 5ab$

c) $-x + 2x = x$

d) $3xy^2z^5 - 2xy^2z^5 = xy^2z^5$

e) $2xy - xy + xy = 2xy$

f) $4a^2 + 5ab$. (No se puede reducir)

4.24 Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

- a) $xy + 4xz^2 - xy$
 b) $ab - 6ab$
 c) $3by^3 + by^3 + 5by^3$
 d) $-mp - 5pm + 8mp$

a) $xy + 4xz^2 - xy = 4xz^2$

b) $ab - 6ab = -5ab$

c) $3by^3 + by^3 + 5by^3 = 9by^3$

d) $-mp - 5pm + 8mp = 2mp$

4.25 Multiplica los siguientes monomios.

- a) $2ab \cdot 5abc$
 b) $x \cdot x^2$
 c) $2a^3 \cdot a \cdot 5a^2$
 d) $7abc \cdot 4a^4$
 e) $2a^2b^3 \cdot (-3)ab$
 f) $-ab^2 \cdot a \cdot 2c$

a) $2ab \cdot 5abc = 10a^2b^2c$

b) $x \cdot x^2 = x^3$

c) $2a^3 \cdot a \cdot 5a^2 = 10a^6$

d) $7abc \cdot 4a^4 = 28a^5bc$

e) $2a^2b^3 \cdot (-3)ab = -6a^3b^4$

f) $-ab^2 \cdot a \cdot 2c = -2a^2b^2c$

4.26 Haz las siguientes divisiones.

- a) $(2x^3 + 4x^2 + 8x) : x$
 b) $(ab^2 - ab^3 + ab^4) : ab$

a) $(2x^3 + 4x^2 + 8x) : x = 2x^2 + 4x + 8$

b) $(ab^2 - ab^3 + ab^4) : ab = b - b^2 + b^3$

4.27 Expresa verbalmente el resultado de las siguientes operaciones.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $(a + x)^2$ | d) $(y - 1)^2$ |
| b) $(b - y)^2$ | e) $(2b + 1)^2$ |
| c) $(x + 1)^2$ | f) $(1 - 3i)^2$ |

- a) $(a + x)^2 =$ cuadrado de a , más el doble de ax , más el cuadrado de x
b) $(b - y)^2 =$ cuadrado de b , menos el doble de by , más el cuadrado de y
c) $(x + 1)^2 =$ cuadrado de x , más el doble de x , más 1
d) $(y - 1)^2 =$ cuadrado de y , menos el doble de y , más 1
e) $(2b + 1)^2 =$ cuádruplo del cuadrado de b , más cuádruplo de b , más 1
f) $(1 - 3i)^2 =$ 1 menos 6 por i , más el cuadrado de $3i$

4.28 Expresa verbalmente el resultado de las siguientes operaciones.

- | | |
|--|--|
| a) $(x + a) \cdot (x - a)$ | c) $(a + 2x) \cdot (a - 2x)$ |
| b) $(1 - i) \cdot (1 + i)$ | d) $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)$ |

- a) $(x + a) \cdot (x - a) =$ cuadrado de x menos cuadrado de a
b) $(1 - i) \cdot (1 + i) =$ uno menos cuadrado de i
c) $(a + 2x) \cdot (a - 2x) =$ cuadrado de a menos cuadrado de $2x$
d) $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) =$ cuarta potencia de x menos 1

4.29 La igualdad $a + b + 40^\circ = 180^\circ$ expresa la propiedad de la suma de los ángulos del triángulo. Calcula tres pares de valores a , b que cumplan la propiedad.

$$a + b = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$
$$a = 70^\circ \quad b = 70^\circ$$
$$a = 30^\circ \quad b = 110^\circ$$
$$a = 100^\circ \quad b = 40^\circ$$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Números y letras

4.30 Indica la arista de un cubo con la letra a .

- a) ¿Cuál es la expresión del volumen del cubo?**
b) ¿Cuál es el volumen de un cubo de 1 centímetro de arista? ¿Y de 2 centímetros? ¿Y de 10 centímetros?

- a) Volumen del cubo: a^3 .
b) Volumen de un cubo de 1 centímetro de arista: $1^3 = 1 \text{ cm}^3$
Volumen de un cubo de 2 centímetros de arista: $2^3 = 8 \text{ cm}^3$
Volumen de un cubo de 10 centímetros de arista: $10^3 = 1000 \text{ cm}^3$

4.31 Un recipiente contiene 4 litros de agua, y cada hora se vierte en él 0,5 litros de agua. Expresa con lenguaje matemático esta información.

Si indicamos con t el número de horas que se vierte agua, la información la podemos expresar así: $4 + 0,5 \cdot t$.

4.32 Una tienda de confección de cortinas cobra 4,50 euros por metro de cortina confeccionada.

- a) ¿Cuánto cuesta confeccionar una cortina de 5 metros?**
b) Escribe la fórmula que relaciona el número de metros de cortina con el coste de la misma.

- a) Confeccionar una cortina de 5 metros cuesta: $4,50 \text{ €} \cdot 5 = 22,50 \text{ €}$.
b) Si indicamos con n el número de metros de cortina y con c el coste, la fórmula es: $c = 4,50 \cdot n$.

4.33 Expresa con lenguaje matemático la siguiente propiedad: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Si a es la hipotenusa, y b y c son los catetos del triángulo rectángulo, la propiedad se expresa así: $a^2 = b^2 + c^2$. (La propiedad es el teorema de Pitágoras.)

Expresiones algebraicas. Monomios y polinomios

4.34 Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

a) $\frac{2x^2b}{a}$

b) $-5x^2ab$

c) ab^3c^2

d) xy^{-2}

Son monomios las expresiones b y c.

4.35 Indica cuál de estas expresiones es un polinomio.

a) $2x^3 - 3y^2 + 5ab^2 - \frac{2}{3}$

b) $7ab^2 - ac^{-3}d + 6abcd$

a) La expresión es un polinomio.

b) La expresión no es un polinomio porque $ac^{-3}d$ no es un monomio.

Valor numérico de una expresión algebraica

4.36 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las letras que se indican.

a) $2b$ para $b = -1$

b) $1 - 2y$ para $y = -2$

c) $-4bc^2 + 3b^4$ para $b = 1, c = -2$

d) $(x + y)^2$ para $x = 2, y = 5$

a) $2b$ para $b = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1) = -2$

b) $1 - 2y$ para $y = -2 \rightarrow 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$

c) $-4bc^2 + 3b^4$ para $b = 1, c = -2 \rightarrow -4 \cdot 1 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 1^4 = -16 + 3 = -13$

d) $(x + y)^2$ para $x = 2, y = 5 \rightarrow (2 + 5)^2 = 7^2 = 49$

4.37 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para $x = -3$.

a) $x - 8$

b) $3 - x$

c) $4x - 0,5x^2$

d) $11 - x^2$

e) $9 - 3x^2$

f) $-(1 - x^2)$

g) $(x - 3) \cdot (x + 5)$

h) $(x + 3) \cdot (x^3 - 1)$

a) $x - 8 \rightarrow -3 - 8 = -11$

b) $3 - x \rightarrow 3 - (-3) = 6$

c) $4x - 0,5x^2 \rightarrow -12 - 4,5 = -16,5$

d) $11 - x^2 \rightarrow 11 - (-3)^2 = 11 - 9 = 2$

e) $9 - 3x^2 \rightarrow 9 - 27 = -18$

f) $-(1 - x^2) \rightarrow -[1 - (-3)^2] = -1 + 9 = 8$

g) $(x - 3)(x + 5) \rightarrow (-6) \cdot 2 = -12$

h) $(x + 3)(x^3 - 1) \rightarrow 0 \cdot (-28) = 0$

Operaciones con monomios y polinomios

4.38 Haz las siguientes operaciones.

a) $-3pq^2 + 5pq^2 + pq^2$

b) $5b^3 - 4b^3$

c) $14xy^2z \cdot 2z^2$

d) $12x^3a : 6x^2a$

a) $-3pq^2 + 5pq^2 + pq^2 = 3pq^2$

b) $5b^3 - 4b^3 = b^3$

c) $14xy^2z \cdot 2z^2 = 28xy^2z^3$

d) $12x^3a : 6x^2a = 2x$

4.39 Divide en cada caso el polinomio por el monomio.

a) $(2x - x^2) : 2x$

b) $(xy^2 + xyz - 2xy) : xy$

c) $(-4p^2r^3 + p^3r^2 - 6p^2r^2s) : 2p^2r^2$

a) $(2x - x^2) : 2x = 1 - \frac{1}{2}x$

b) $(xy^2 + xyz - 2xy) : xy = y + z - 2$

c) $(-4p^2r^3 + p^3r^2 - 6p^2r^2s) : 2p^2r^2 = -2r + \frac{1}{2}p - 3s$

4.40 Haz las siguientes operaciones y reduce los términos semejantes.

- a) $(x - y) - (y + z - p) + (2y - x)$
 b) $a + [(b - a) - (b - c)]$
 c) $a^2 - (a^2 - b) - (b^2 + c) - (a^2 + c^2) - c^2$
 d) $(p + 2r - 6p) - [3r - (6p - 6r)]$

a) $(x - y) - (y + z - p) + (2y - x) = x - y - y - z + p + 2y - x = -z + p$
 b) $a + [(b - a) - (b - c)] = a + b - a - b + c = c$
 c) $a^2 - (a^2 - b) - (b^2 + c) - (a^2 + c^2) - c^2 = a^2 - a^2 + b - b^2 - c - a^2 - c^2 - c^2 = -a^2 + b - b^2 - 2c^2 - c$
 d) $(p + 2r - 6p) - [3r - (6p - 6r)] = p + 2r - 6p - [3r - 6p + 6r] = p + 2r - 6p - 3r + 6p - 6r = p - 7r$

4.41 Copia y completa las siguientes operaciones.

- a) $b + \square = 2b$
 b) $y \square y = y^2$
 c) $x^2 + x^2 = \square x^{\square}$

a) $b + \square = 2b \rightarrow b + b = 2b$
 b) $y \square y = y^2 \rightarrow y \cdot y = y^2$
 c) $x^2 + x^2 = \square x^{\square} \rightarrow x^2 + x^2 = 2x^2$

- d) $p^2 \cdot \square = p^5$
 e) $\square + c^2 = 2c^2$
 f) $x \square x \square x = x^3$

d) $p^2 \cdot \square = p^5 \rightarrow p^2 \cdot p^3 = p^5$
 e) $\square + c^2 = 2c^2 \rightarrow c^2 + c^2 = 2c^2$
 f) $x \square x \square x = x^3 \rightarrow x \cdot x \cdot x = x^3$

4.42 Realiza las siguientes operaciones y reduce términos semejantes.

- a) $(a + b) \cdot (a + c)$
 b) $(a + x) \cdot (a + x)$
 c) $(a - x) \cdot (a - x)$
 d) $(a + x) \cdot (a - x)$

- e) $(x + y + z) \cdot (x - y)$
 f) $(x + p) \cdot (x - p) \cdot (x - 1)$
 g) $(r + a) \cdot (r - a) \cdot (r - c)$
 h) $(x + y + x) \cdot (x + y - z)$

a) $(a + b) \cdot (a + c) = a^2 + ac + ba + bc$
 b) $(a + x) \cdot (a + x) = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$
 c) $(a - x) \cdot (a - x) = (a - x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$
 d) $(a + x) \cdot (a - x) = a^2 - x^2$
 e) $(x + y + z) \cdot (x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 + zx - zy = x^2 - y^2 + zx - zy$
 f) $(x + p) \cdot (x - p) \cdot (x - 1) = (x^2 - p^2)(x - 1) = x^3 - x^2 - p^2x + p^2$
 g) $(r + a) \cdot (r - a) \cdot (r - c) = (r^2 - a^2)(r - c) = r^3 - r^2c - a^2r + a^2c$
 h) $(x + y + z) \cdot (x + y - z) = (x + y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$

4.43 Desarrolla el cuadrado de este trinomio y reduce los términos semejantes: $(x + y + z)^2$.

$$(x + y + z)^2 = (x + y + z)(x + y + z) = x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

4.44 Desarrolla las siguientes expresiones y reduce los términos semejantes.

- a) $(a + b)^3$
 b) $(a - b)^3$

a) $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 b) $(a - b)^3 = (a - b)^2 \cdot (a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

4.45 Copia y completa las siguientes operaciones.

- a) $-(1 - a + z) = \square 1 \square a \square z$
 b) $\square(x + b) = x^2 + bx$
 c) $(a + b)^2 = \square^2 + b^2 + 2a\square$

a) $-(1 - a + z) = -1 + a - z$
 b) $x(x + b) = x^2 + bx$
 c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

- d) $(a \square 5)^2 = a^2 - 10a + 25$
 e) $a + \square(a + b) = 3a + 2b$
 f) $\frac{-4x - 12}{4} = \square x \square 3$

d) $(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25$
 e) $a + 2(a + b) = 3a + 2b$
 f) $\frac{-4x - 12}{4} = -x - 3$

Igualdades notables

4.46 Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $(p + q)^2$

b) $(a + 1)^2$

c) $(1 + i)^2$

d) $(x^2 - 1)^2$

a) $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$

b) $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$

c) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2$

d) $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

e) $(x + y) \cdot (x - y)$

f) $(x + 1) \cdot (x - 1)$

g) $(3b - c) \cdot (3b + c)$

h) $(1 - a^5) \cdot (1 + a^5)$

e) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

f) $(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$

g) $(3b - c) \cdot (3b + c) = 9b^2 - c^2$

h) $(1 - a^5) \cdot (1 + a^5) = 1 - a^{10}$

4.47 Expresa las siguientes diferencias de cuadrados como productos.

a) $a^2 - x^2$

b) $x^2 - 3^2$

c) $b^2 - 4$

d) $x^2 - 1$

a) $a^2 - x^2 = (a + x) \cdot (a - x)$

b) $x^2 - 3^2 = (x + 3) \cdot (x - 3)$

c) $b^2 - 4 = (b + 2) \cdot (b - 2)$

d) $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

e) $1 - r^2$

f) $49 - x^2$

g) $y^4 - y^2$

h) $16x^2 - 25b^2$

e) $1 - r^2 = (1 + r) \cdot (1 - r)$

f) $49 - x^2 = (7 + x) \cdot (7 - x)$

g) $y^4 - y^2 = (y^2 + y) \cdot (y^2 - y)$

h) $16x^2 - 25b^2 = (4x + 5b) \cdot (4x - 5b)$

4.48 Copia y completa la expresión para que sea un cuadrado perfecto.

a) $a^2 + \square + b^2$

b) $a^2 + 4b^2 - \square$

a) $a^2 + \square + b^2 \rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 + 4b^2 - \square \rightarrow a^2 + 4b^2 - 4ab$

c) $x^2 + 9 + \square$

d) $25a^2 + \square + 1$

c) $x^2 + 9 + \square \rightarrow x^2 + 9 + 6x$

d) $25a^2 + \square + 1 \rightarrow 25a^2 + 10a + 1$

4.49 Copia y completa de modo que la expresión resultante sea equivalente a una diferencia de cuadrados de dos monomios.

a) $(x + y) \cdot (x - \square)$

b) $(\square - b) \cdot (a + b)$

c) $(x + 1) \cdot (\square - \square)$

a) $(x + y) \cdot (x - \square) \rightarrow (x + y) \cdot (x - y)$

b) $(\square - b) \cdot (a + b) \rightarrow (a - b) \cdot (a + b)$

c) $(x + 1) \cdot (\square - \square) \rightarrow (x + 1) \cdot (x - 1)$

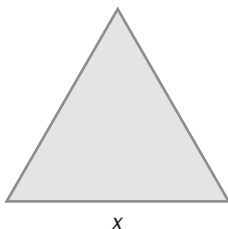
PROBLEMAS PARA APLICAR

4.50 Un viajero hace un trayecto a una velocidad media de 85 kilómetros por hora. Expresa mediante una fórmula la distancia que recorre en función del tiempo.

Si indicamos con t el tiempo en horas y con d la distancia, la fórmula se expresa así: $d = 85 \cdot t$.

4.51 Expresa mediante un monomio el perímetro de las siguientes figuras.

a)



a) Perímetro de este triángulo: $3 \cdot x$

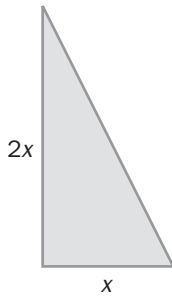
b) Perímetro de este pentágono: $5 \cdot a$

b)

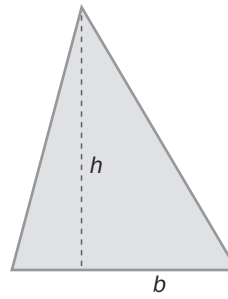


4.52 Expresa el área de cada figura mediante un monomio.

a)



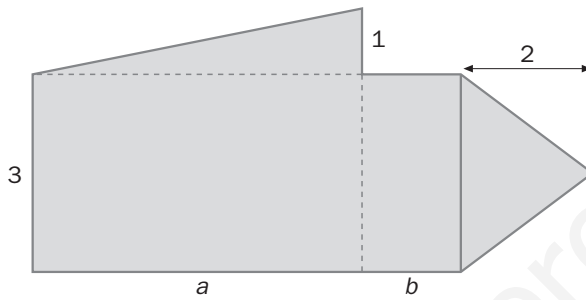
b)



a) Área: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$

b) Área: $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

4.53 Encuentra el polinomio que expresa el área de la siguiente figura.

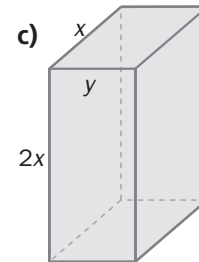
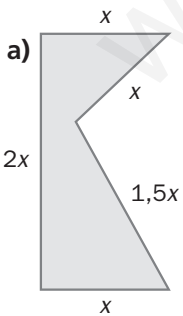


Área de la figura = área del rectángulo de base $(a + b)$ y altura 3 + área del triángulo de altura 2 y base 3 + área del triángulo de base a y altura 1:

$$(a + b) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = 3a + 3b + 3 + \frac{1}{2}a = \frac{7}{2}a + 3b + 3$$

El polinomio es: $\frac{7}{2}a + 3b + 3$.

4.54 Halla la expresión que da el perímetro de la primera figura, el área de la segunda y el volumen de la tercera. Indica el grado de cada una.

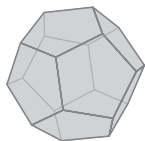
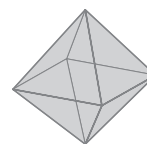
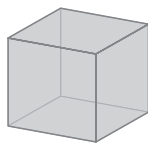
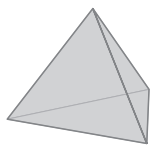


a) Perímetro: $x + 2x + x + x + 1,5x = 6,5x$ Grado: 1

b) Área: $x \cdot 2x = 2x^2$ Grado: 2

c) Volumen. $2x \cdot y \cdot x = 2x^2y$ Grado: 3

4.55 Observa los siguientes cuerpos geométricos.



a) Copia y completa la tabla.

	Vértices	Aristas	Caras	$v - a + c$
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

b) Escribe mediante una fórmula la propiedad que relaciona los vértices, aristas y caras de estos cuerpos.

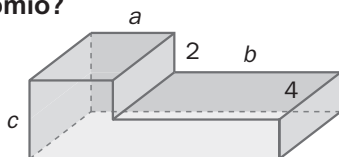
	Vértices	Aristas	Caras	$v - a + c$
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

En estos poliedros, conocidos como sólidos platónicos, el número de vértices (v) menos el de aristas (a) más el de caras (c) es igual a 2. La fórmula es: $v - a + c = 2$

4.56 Un contenedor pesa 200 kilogramos, y cada una de las cajas que se introducen en él, 25 kilogramos. Expresa con una fórmula el peso del contenedor en función del número de cajas que se introduzcan.

Si indicamos con n el número de cajas y con p el peso total, podemos expresarlo con esta fórmula: $p = 200 + 25 \cdot n$

4.57 Halla el polinomio que expresa el volumen de este cuerpo. ¿Cuál es el grado de cada monomio y del polinomio?



Volumen del cuerpo = volumen del ortoedro de aristas a , c , 4 + volumen del ortoedro de aristas b , 4 , $c - 2$.

$$\text{Volumen} = 4ac + 4b(c - 2) = 4ac + 4bc - 8b$$

El polinomio es: $4ac + 4bc - 8b$.

El grado del primer monomio es 2.

El grado del segundo monomio es 2.

El grado del tercer monomio es 1.

El grado del polinomio es 2.

- 4.58 A partir de un cuadrado de hojalata de 10 centímetros de lado, se desea fabricar piezas recortando dos cuadraditos iguales de lado x , en dos esquinas.



- a) Determina el polinomio que permite calcular el área de las piezas.
 b) Si x mide 2 centímetros, ¿cuál será el área de la pieza?

a) Área de las piezas: $10^2 - 2 \cdot x^2 = 100 - 2x^2$

El polinomio que permite calcular el área de las piezas resultantes es $100 - 2x^2$.

b) Si x mide 2 centímetros, el área de la pieza es: $100 - 2 \cdot 2^2 = 100 - 8 = 92 \text{ cm}^2$.

REFUERZO

Números y letras

- 4.59 El volumen del ortoedro es igual al producto de sus aristas. Expresa el volumen utilizando las letras a , b , c para las aristas.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

- 4.60 Un pintor contrata su trabajo del siguiente modo: 50 euros al iniciar el trabajo y 0,85 euros por metro cuadrado pintado.

- a) Expresa mediante una fórmula el coste del trabajo en función del número de metros cuadrados pintados.
 b) Calcula, aplicando la fórmula, cuánto costaría pintar los 300 metros cuadrados de pared de un piso.

a) Designamos con n el número de metros cuadrados pintados y con c el coste: $c = 50 + 0,85 \cdot n$

b) Pintar 300 metros cuadrados cuesta: $c = 50 + 0,85 \cdot 300 = 305$.

El coste es de 305 euros.

Monomios y polinomios

- 4.61 ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios?

a) $\frac{x}{2}$

c) $-4bc^3$

e) $2x + 3y^2$

b) $\frac{2}{y}$

d) $5x^2$

f) $-abc + 1$

Son monomios las correspondientes a los apartados a , c y d .

- 4.62 Halla el grado de los siguientes monomios y polinomios.

a) $5x^2$

c) $1 - x^2 - x^3a$

e) $1 - 4bc$

b) $-6x^2yz$

d) $x(x - 1)$

f) $9ab^2c^3 - 2d^6$

a) 2

c) 4

e) 2

b) 4

d) 2

f) 6

Valor numérico de una expresión algebraica

4.63 Calcula el valor numérico para los valores de las letras que se indican.

- a) x^2 para $x = -1$
b) $3x^2y$ para $x = -2$; $y = 3$
c) $\frac{2}{5}a^5b^4c - ax$ para $a = 1$; $b = 2$; $c = -1$; $x = 4$

a) $(-1)^2 = 1$
b) $3 \cdot (-2)^2 \cdot 3 = 36$
c) $\frac{2}{5} \cdot 1^5 \cdot 2^4 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 = -\frac{2}{5} \cdot 16 - 4 = -\frac{32}{5} - \frac{20}{5} = -\frac{52}{5}$

4.64 Calcula para qué valores de la letra el valor numérico de las siguientes expresiones es cero.

- a) $(a - 1) \cdot (a + 2)$
b) $(2x + 4) \cdot (x - 10)$

a) $a = 1$ ó $a = -2$
b) $x = -2$ ó $x = 10$

Operaciones con monomios y polinomios

4.65 Haz las siguientes operaciones y reduce términos semejantes.

- a) $(x - y) - (x + y - z)$
b) $a - [(b - a) - (b - c)]$
c) $p^2 - (p^2 - q^2) + (q^2 - r^2) + q^2$

a) $(x - y) - (x + y - z) = x - y - x - y + z = -2y + z$
b) $a - [(b - a) - (b - c)] = a - [b - a - b + c] = a - [-a + c] = a + a - c = 2a - c$
c) $p^2 - (p^2 - q^2) + (q^2 - r^2) + q^2 = p^2 - p^2 + q^2 + q^2 - r^2 + q^2 = 3q^3 - r^2$

4.66 Realiza las siguientes operaciones:

- a) $-xy + 2yx$
b) $(2x - y) \cdot (x - 2y)$
c) $(4x^2a - x^5a^2 + 3ba^4x^3) : x^2a$

a) $-xy + 2yx = xy$
b) $(2x - y) \cdot (x - 2y) = 2x^2 - 4xy - yx + 2y^2 = 2x^2 - 5xy + 2y^2$
c) $(4x^2a - x^5a^2 + 3ba^4x^3) : x^2a = 4 - x^3a + 3a^3xb$

4.67 Copia y completa las siguientes operaciones.

- a) $r + r + r = \square r$
b) $3x^2 + 4x^2 = \square x^\square$
c) $d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d = d^\square$
d) $(x + y)^\square = x^2 + y^2 + \square xy$

a) $r + r + r = 3r$
b) $3x^2 + 4x^2 = 7x^2$
c) $d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d = d^5$
d) $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

4.68 La expresión algebraica $(x^3 + 8) \cdot (x - 8)$ es el producto de dos binomios.

- a) Sin hacer operaciones, averigua el grado del polinomio que se obtiene.
 b) Halla los valores que hay que asignar a la letra x para que el valor numérico de la expresión sea nulo.

a) El grado del primer binomio es 3, y el del segundo, 1. Al multiplicar los binomios, uno de los factores que se obtienen es x^4 , que es el monomio de mayor grado, luego el grado del polinomio es 4.

b) Los valores son -2 u 8 :

$$\text{Si } x = -2 \rightarrow ((-2)^3 + 8)(-2 - 8) = (-8 + 8)(-10) = 0 \cdot (-10) = 0$$

$$\text{Si } x = 8 \rightarrow (8^3 + 8)(8 - 8) = 520 \cdot 0 = 0$$

4.69 En los casos siguientes, halla el valor o valores que hay que asignar a las letras para que el valor numérico de la expresión algebraica sea cero.

De acuerdo con lo observado, indica si siempre es posible:

- a) $x - y$
 b) $a^2 - 1$
 c) $x^2 + 1$
 d) $t^3 + 27$

a) El valor numérico es 0 cuando x e y adquieren el mismo valor.

Por ejemplo, si $x = 2, y = 2, x - y = 0$; si $x = -1, y = -1, x - y = 0 \dots$

b) Los valores son $a = 1$ o $a = -1$.

c) No existe ningún número conocido tal que elevado al cuadrado sea igual a -1 ; luego el valor numérico de $x^2 + 1$ no puede ser nulo.

d) El valor es $t = -3$.

Observamos que no siempre es posible encontrar un valor que haga que el valor numérico de la expresión se cero.

4.70 Un fontanero cobra 25 euros por el desplazamiento y 35 por cada hora de trabajo, además del 16 % de IVA por el importe de las horas trabajadas. Indica con t el tiempo trabajado y expresa mediante una fórmula el coste del trabajo realizado.

Indicamos con c el coste:

$$c = 25 + 35 \cdot t + 16\% \text{ de } 35 \cdot t = 25 + 35 \cdot t + \frac{16}{100} \cdot 35 \cdot t = 25 + 35 \cdot t + 5,6 \cdot t = 25 + 40,6 \cdot t$$

La fórmula es:

$$c = 25 + 40,6 \cdot t$$

4.71 Un automóvil cuyo depósito contiene 40 litros de gasolina consume 5 litros por cada 100 kilómetros recorridos.

Expresa mediante una fórmula los litros de gasolina que quedan en el depósito a medida que el automóvil recorre kilómetros.

Consumo de gasolina por kilómetro recorrido: $5 : 100 = 0,05$ litros/kilómetro.

Si designamos con x los kilómetros que se recorren, los litros de gasolina que se consumen son: $0,05 \cdot x$.

Si designamos por y los litros que quedan en el depósito, la fórmula es: $y = 40 - 0,05x$

4.72 Más y más cuadrados

Miguel coloca los azulejos de un modo especial. Observa el modo en que crece la figura según pasan los días.

- a) ¿Cuántos azulejos tiene cada una de las cuatro figuras?
- b) ¿Cuántos azulejos añade Miguel cada día a la figura del día anterior?
- c) Representa la figura correspondiente al quinto día.
- d) Estudia si el número de azulejos que forma cada figura cumple alguna regularidad. Para ello, completa la tabla.

Día	Número de azulejos
1.º	5
2.º	$\square = 4 \cdot 1 + 5$
3.º	$\square = 4 \cdot 2 + 5$
4.º	$\square = 4 \cdot \square + 5$
5.º	$\square = 4 \cdot \square + \square$
6.º	$\square = \square \cdot \square + \square$
7.º	$\square = \square \cdot \square + \square$
8.º	$\square = \square \cdot \square + \square$



- e) Escribe una expresión algebraica que permita determinar cuántos cuadrados hay en el día n .
- f) ¿Cuántos azulejos formarán la figura el duodécimo día?

- a) El primer día hay 5 azulejos.
El segundo, 9.
El tercero, 13.
El cuarto, 17.

- b) Cada día, Miguel añade cuatro azulejos.



d)

Día	Número de azulejos
1.º	5
2.º	$9 = 4 \cdot 1 + 5$
3.º	$13 = 4 \cdot 2 + 5$
4.º	$17 = 4 \cdot 3 + 5$
5.º	$21 = 4 \cdot 4 + 5$
6.º	$25 = 4 \cdot 5 + 5$
7.º	$29 = 4 \cdot 6 + 5$
8.º	$33 = 4 \cdot 7 + 5$

- e) Número de azulejos día $n = 4 \cdot (n - 1) + 5$
- f) Número de azulejos día 12 $= 4 \cdot (12 - 1) + 5 = 44 + 5 = 49$

AUTOEVALUACIÓN

4.A1 Escribe la expresión del perímetro de un decágono regular de lado x .

Perímetro: $10x$

4.A2 A un técnico informático le pagan 50 euros por la revisión de cada ordenador. Por otra parte, le descuentan el 16% de la cantidad que cobra, en concepto de IVA.

Halla la fórmula que relaciona el dinero d que recibe el técnico y el número x de ordenadores revisados.

$$d = 50 \cdot x - \frac{16}{100} \cdot 50 \cdot x = 50 \cdot x - 8 \cdot x = 42 \cdot x$$

La fórmula es: $d = 42x$.

4.A3 Dadas las siguientes expresiones algebraicas, indica las que son monomios o polinomios.

- a) $5x^2\sqrt{y}$ b) $-3ab^6$ c) $2 - x + xy - 3$ d) $4x^4 - x - y - 1$

a) $5x^2\sqrt{y} \rightarrow$ No es un monomio porque contiene la operación radicación.

b) $-3ab^6 \rightarrow$ Es un monomio.

c) $2 - x + xy - 3 \rightarrow$ Es un polinomio.

d) $4x^4 - x - y - 1 \rightarrow$ Es un polinomio.

4.A4 Calcula el valor numérico de $x^2 + 1$ para $x = -1$.

$$x^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

4.A5 Haz las siguientes operaciones y reduce términos semejantes.

a) $(x - y) - (y - z^2) - (z - 2y) + z^2$

b) $(3x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1)$

c) $(az^2 + 12baz^2 - 2z^2ab^2) : 2az^2$

d) $2x - x(a + b + 2) + 4xb^2 : 2x$

a) $(x - y) - (y - z^2) - (z - 2y) + z^2 = x - y - y + z^2 - z + 2y + z^2 = x + 2z^2 - z$

b) $(3x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$

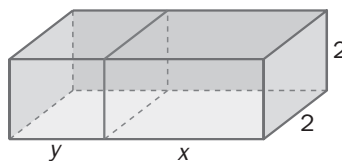
c) $(az^2 + 12baz^2 - 2z^2ab^2) : 2az^2 = \frac{1}{2} + 6b - b^2$

d) $2x - x(a + b + 2) + 4xb^2 : 2x = 2x - xa - xb - 2x + 2b^2 = 2b^2 - xa - xb$

4.A6 Halla el valor o valores de x de modo que el valor numérico del binomio $x^2 - 4$ sea igual a cero.

Son dos valores: $x = 2$ y $x = -2$.

4.A7 Halla el polinomio que expresa el volumen de este cuerpo geométrico.



Lo podemos considerar como un solo ortoedro de aristas $y + x$, 2 , 2 . Luego su volumen es:

$$V = (y + x) \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot (y + x) = 4y + 4x$$

4.A8 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(1 - t)^2$

b) $(2x^3 + y^2)^2$

c) $(1 + x^3) \cdot (1 - x^3)$

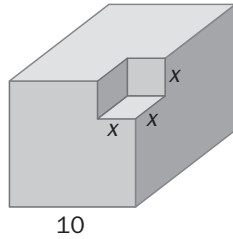
a) $(1 - t)^2 = 1 - 2t + t^2$

b) $(2x^3 + y^2)^2 = 4x^6 + 4x^3y^2 + y^4$

c) $(1 + x^3) \cdot (1 - x^3) = 1 - x^6$

4.A9 A partir de cubos de madera de 10 centímetros de arista se fabrican piezas recortando un cubo de arista x en una esquina.

- Averigua el polinomio que permite calcular el volumen de las piezas dependiendo de x .
- Calcula el volumen de la pieza para $x = 5$.



a) Volumen de la pieza: $V = 1000 - x^3$

b) Para $x = 5$, el volumen es: $1000 - 5^3 = 1000 - 125 = 875 \text{ cm}^3$

MURAL DE MATEMÁTICAS

Jugando con las matemáticas

La magia de los números

- Piensa un número
- Súmale 4
- Multiplica el resultado por 3
- Réstale 12
- Divide el resultado entre el número que has pensado

¿A qué te da 3?

Posiblemente la razón no sea que los números son mágicos. Intenta traducir cada uno de los pasos anteriores al lenguaje algebraico, al número pensado llámale x , y verás dónde está el truco.

Si indicamos las operaciones realizadas con el número x obtenemos la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{(x + 4) \cdot 3 - 12}{x}$$

Operando vemos que el valor numérico de dicha expresión es 3, independientemente del valor de x :

$$\frac{(x + 4) \cdot 3 - 12}{x} = \frac{3x + 12 - 12}{x} = \frac{3x}{x} = 3$$