CAPÍTULO 10: CUERPOS GEOMÉTRICOS. VOLÚMENES. TEORÍA. Matemáticas 1º y 2º de ESO

1. EL ESPACIO

1.1. El entorno en que nos movemos

Nuestra vida se desarrolla en un entorno tridimensional: cuando vamos a comprar un mueble medimos tres dimensiones, para ver si nos cabe en casa: alto, ancho y largo. Incluso los objetos "planos", como una hoja de papel o un DVD en realidad son tridimensionales, pero su altura es muy pequeña y tendemos a considerarlos planos.

A pesar de que en nuestro día a día nos encontramos objetos tridimensionales, es más difícil estudiarlos porque no caben en un libro, a no ser que sea un libro especial con páginas desplegables (acabamos de decir que las páginas son bidimensionales). Por eso se recurre a fabricar modelos (en plastilina, cartulina, arcilla u otro material) o a utilizar representaciones planas de estos objetos.

Una técnica muy utilizada en matemáticas consiste en aprovechar lo que ya sabemos para aprender los nuevos conceptos. Por ello en este tema nos centraremos fundamentalmente en cuerpos geométricos que se obtienen a partir de figuras planas. Vamos a familiarizarnos con esos objetos.

Actividades resueltas

- Observa un dado. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen sus caras? Mira ahora un paquete de tizas blancas. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen? ¿En qué se parecen el dado y la caja? ¿En qué se diferencian?

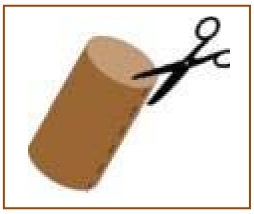
El dado tiene 6 caras. Cada cara tiene la forma de un cuadrado.

El paquete de tizas también tiene 6 caras. Pero las caras tienen forma rectangular.

El dado y la caja se parecen en la forma (si la caja fuera de goma y pudiésemos comprimirla tanto como quisiéramos, podríamos obtener un dado a partir de ella). Se parecen en que tienen ambos 6 caras. Se diferencian en que en un caso las caras son cuadradas y en el otro rectangulares.

Actividades propuestas

1. Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un rollo de papel higiénico.



a) ¿Qué forma tienen las bases de la lata?

b) ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?

c) Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?

d) Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?

1.2. Dimensiones

El espacio involucra tres **dimensiones: ancho, alto y largo**, mientras que el plano involucra solo a dos.

Ejemplo 3:

Una hoja de tamaño A4 mide 21cm x 29,7 cm. Damos 2 números para hablar de su tamaño.

La caja donde vienen los paquetes de 2500 hojas A4 mide 21cm x 29,7 cm x ??? cm. Necesitamos tres números para referirnos a su tamaño. El número que hemos añadido es la altura de la caja.

Ejemplo 4:

Si has visto dibujos hechos por los egipcios te habrá llamado la atención que están dibujados con unas poses muy extrañas. Se debe a que representar en un plano un cuerpo del espacio es muy complejo. Las figuras pierden su volumen.

Leonardo Da Vinci, un genio en todos los campos y que colaboró en muchas actividades matemáticas con Luca Paccioli (que era su profesor) fue uno de los pioneros en conseguir representar lo tridimensional en un cuadro. Esas representaciones utilizan matemáticas.

Actividades propuestas

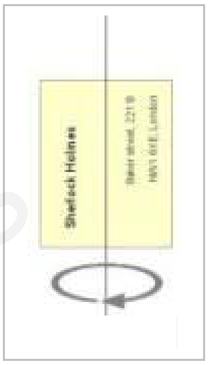
2. Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.
3. Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).
4. Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.

1.3. Poliedros, cuerpos redondos y otras figuras.

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.
Llamamos **cuerpos redondos** a figuras bastante regulares que tienen alguna superficie curva.

Un tipo particular de poliedros son los poliedros regulares, que estudiaremos en otra sección de este capítulo. Los prismas y pirámides también son poliedros.

Los principales cuerpos redondos que estudiaremos son las esferas, conos y cilindros. Un tipo particular de cuerpos redondos es el de los cuerpos de revolución, que se obtienen al girar una figura plana en torno a un eje.



Actividades resueltas

- Si cogemos una tarjeta de visita (rectangular), la atravesamos por un hilo siguiendo su eje de simetría y la hacemos girar, ¿qué figura obtenemos?

La figura que se obtiene es un cilindro. Puedes comprobarlo.

- ¿Qué forma tiene una rosquilla?

La rosquilla no es ni una esfera ni un cilindro ni un cono. Su forma, igual que la de un neumático es otra figura matemática, muy utilizada, denominada toro (no te asustes, es un toro inofensivo, sin cuernos).

Actividades propuestas

5. Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?
6. Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:
   a) esfera b) cilindro c) poliedro regular d) prisma e) pirámide f) cono
7. Aprende a hacer un cubo con papiroflexia:

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67

1.4. Elementos del espacio

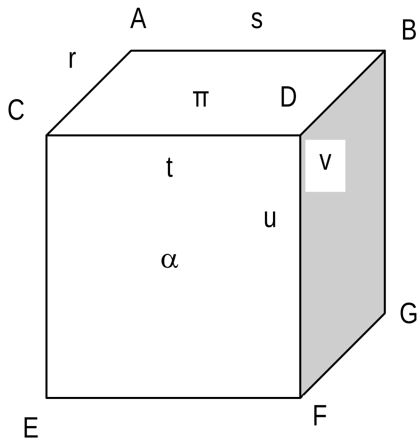
Puntos, rectas y planos

Mira a tu alrededor. Estás en una habitación. Las paredes, el suelo y el techo son planos. Estos planos a veces se cortan en segmentos de rectas. Y la intersección de tres de esos planos o de dos de esas rectas es en un punto.

Actividades resueltas

- En el cubo del margen hemos dado nombre a los puntos con letras mayúsculas: A, B, C, D, E, F, G…; a las rectas con letras minúsculas: *r, s, t, u*…; y a los planos con letras griegas: π, α…

  También se podrían denominar diciendo, recta que pasa por los puntos A y B, o plano que contiene a los puntos A, B y C.



Actividades propuestas

8. Indica la recta que pasa por los puntos D y F.
9. Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E.
10. Indica el plano que contiene a la recta *t* y al punto B.
11. Indica el plano que contiene a las rectas *s* y *t*.

Posiciones relativas de dos planos

En tu habitación el plano del techo y el del suelo son planos paralelos. El plano del techo y el de una pared son planos secantes. Además como forman un ángulo recto son planos perpendiculares.

Dos planos en el espacio son **paralelos** si no tienen ningún punto en común, y son **secantes** si tienen una recta en común.

Actividades resueltas

- Observamos las seis caras del cubo y comprobamos que o son paralelas o son secantes. Las que son secantes también son en este caso perpendiculares.
- El plano π y el plano α son secantes y se cortan en la recta *t*.
- El plano π y el del suelo son paralelos.

Actividades propuestas

12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.
13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Sigue mirando tu aula. Fíjate en una recta del techo. Las otras tres rectas del techo o se cortan con ella, o son paralelas. Sigue fijándote en la misma recta, y mira las cuatro rectas verticales que forman las paredes. ¿Cómo son respecto a esa recta? Observa que dos de ellas la cortan pero las otras dos ni la cortan ni son paralelas. Decimos que esas rectas se cruzan

Dos rectas en el espacio o son **paralelas** o se **cortan** o se **cruzan**.

Actividades resueltas

- Nos fijamos en el cubo anterior en la recta *r*. La recta s la corta (es secante) en el punto A.
- La recta *t* la corta en el punto C. Las tres rectas *r, s* y *t* están en el plano π.
- Las rectas *r* y *v* son paralelas y también están en el plano π.
- Pero las rectas r y u no se cortan en ningún punto, ni son paralelas, ni hay ningún plano que contenga a ambas. Las rectas *r* y *u* se cruzan.

Actividades propuestas

14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
    a) Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran
    b) Tres pares de rectas que se crucen.
    c) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar **contenida** en un plano o ser **paralela** al plano o ser **secante**.

Actividades resueltas

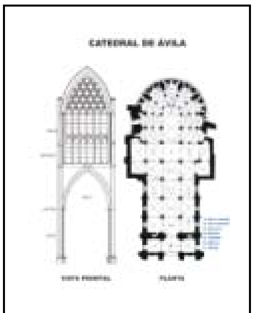
- Seguimos fijándonos en el cubo anterior. El plano π contiene a las rectas r, s, t y v. La recta u corta al plano π en el punto D. La recta que pasa por los puntos E y F es paralela al plano π.

Actividades propuestas

15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α. Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.

1.5. Representación de cuerpos geométricos

Del espacio al plano



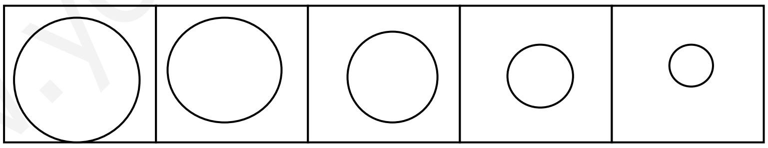
Planta y perfil

Los arquitectos, ingenieros y en otras muchas profesiones, necesitan dibujar en papel los edificios y las piezas que diseñan. Una forma de hacerlo es representarlos desde tres puntos de vista: **planta, perfil** y **alzado**.

Otros profesionales, como los médicos, utilizan otras técnicas, como la **tomografía**, en la que se representan los cortes mediante varios planos paralelos.

Actividades resueltas

- La siguiente tomografía corresponde a un cono con cortes paralelos a su base:



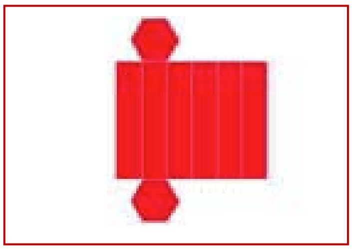
Actividades propuestas

16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:

a) un cubo   b) un cilindro   d) un cono   e) una esfera   f) una pirámide

17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
    a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador
    b) Un cilindro con cortes paralelos a su base
    c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista
    d) Un cubo con cortes paralelos a una cara
    e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.

Del plano al espacio



Muchos cuerpos geométricos podemos construirlos haciendo su desarrollo en un plano. Por ejemplo podemos construir un prisma hexagonal con el desarrollo del margen:

Si quieres construirlo, piensa ¿Dónde pondrías las pestañas para poder pegarlo?

Actividades propuestas

18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.
19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.
20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.

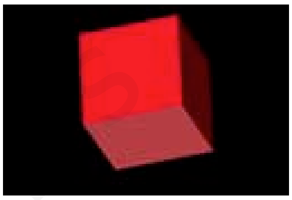
Formas de representación

Hemos visto formas de representar los cuerpos geométricos: tomografías, desarrollo, perfil, planta y alzado… pero existen otras como describirlo con palabras, como por ejemplo: Posee 8 vértices, 12 aristas, 6 caras todas iguales a cuadrados. ¿Sabes ya qué estamos describiendo?

Antes vimos la diferencia entre la forma de dibujar en el Egipto antiguo y la de Leonardo da Vinci. Leonardo ya conocía la perspectiva. Los artistas de Renacimiento consiguieron un gran dominio de la perspectiva.

Una forma de perspectiva es la perspectiva caballera, que consiste en suponer que el ojo que mira la figura está infinitamente lejos. Se tiene entonces, entre otras, las siguientes reglas:

1. Las rectas paralelas en la realidad se mantienen paralelas en el dibujo.
2. Los segmentos iguales sobre rectas paralelos mantienen igual longitud.


Cubo en perspectiva caballera

Actividades propuestas

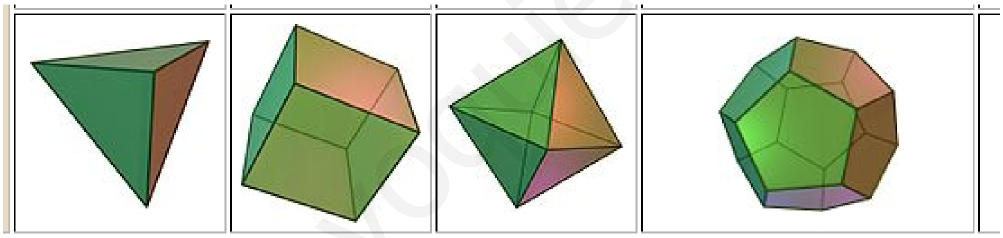
20. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.
21. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.
22. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.
23. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.
24. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.

2. POLIEDROS

2.1. Poliedros regulares

Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solo existen 5 poliedros regulares convexos, que son los que presentamos en la siguiente tabla:



Llamamos **aristas** de un poliedro a los lados de las caras de éste.
Los **vértices** del poliedro son los vértices de sus caras.

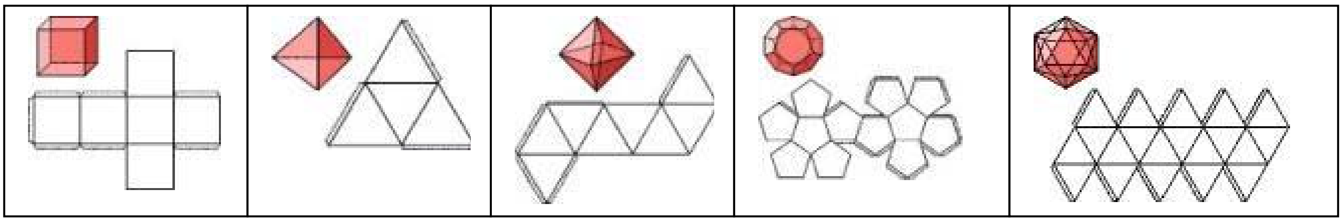
Actividades resueltas

- Cuenta el número de caras, de aristas y de vértices de cada uno de los 5 poliedros regulares.

	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO (HEXAEDRO)	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Actividades propuestas

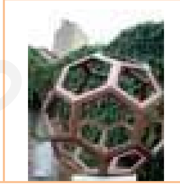
25. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.



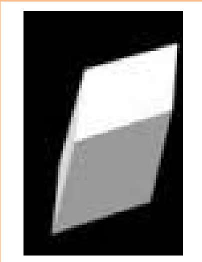
Para cada uno de los cinco poliedros regulares calcula el valor de:

Número de caras + número de vértices – número de aristas.

¿Observas alguna pauta?



26. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?



27. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama *romboedro*. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:

28. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?

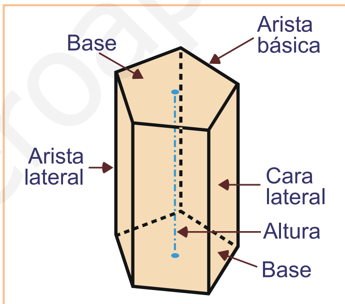
2.2. Prismas

Un **prisma** es un poliedro limitado superior e inferiormente por dos polígonos paralelos e iguales (**bases**) y tantos paralelogramos (**caras laterales**) como lados tienen las bases.

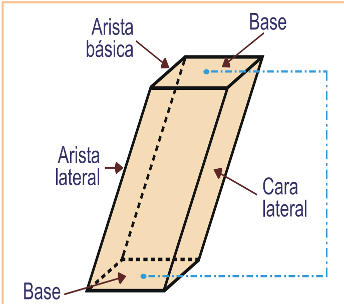
La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.

Cuando todas las caras laterales son rectángulos, se dice que el prisma es un **prisma recto**.

Si algunas caras laterales son romboides, tenemos un **prisma oblicuo**.



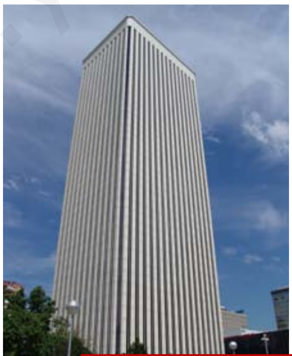
PRISMA RECTO



PRISMA OBLICUO

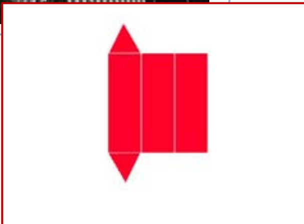
Ejemplo 5:

Casi todos los rascacielos tienen una forma que recuerda a un prisma recto.

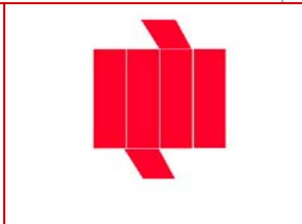


aunque algunos arquitectos tienen ideas más originales y se atreven con prismas oblicuos.

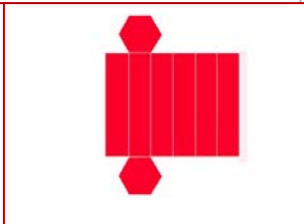
Llamamos **prisma regular** al prisma que tiene por bases a polígonos regulares.



PRISMA TRIANGULAR



PRISMA RÓMBICO



PRISMA HEXAGONAL

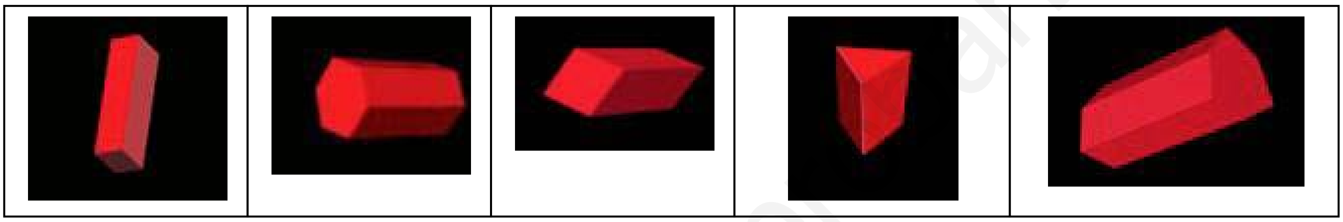
Aún cuando no sea regular, al prisma se le nombra en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un prisma triangular, si es un cuadrilátero el prisma se llamará cuadrangular, si es un rombo, prisma rómbico y cuando la base sea un hexágono, el prisma será hexagonal.

La Calzada de los Gigantes, en Irlanda del Norte, presenta rocas de Basalto que han cristalizado en forma de prismas hexagonales. Las figuras geométricas aparecen también en la naturaleza.

Los prismas cuadrangulares pueden tener otros muchos nombres como paralelepípedo, si todas sus caras son paralelogramos, paralelas dos a dos; ortoedro si sus caras son rectángulos, es decir, es un paralelepípedo rectangular. Además de los que ya conoces como cubo, prisma rómbico…

Actividades propuestas

29. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.
30. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos o oblicuos y del número de lados de sus bases.



31. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!
32. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?
33. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama *caja de zapatos*).

2.3. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado inferiormente por un polígono y superior y lateralmente por triángulos con un vértice común.

Llamaremos **base** de la pirámide al polígono que la limita inferiormente.

Caras laterales a los triángulos que tienen un lado común con la base y un vértice común.

A ese vértice común se le llama **vértice** de la pirámide.

La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una **pirámide regular**.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, ésta puede ser **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**, ...

Ejemplo 6.

Hay unas pirámides muy famosas: las pirámides de Giza, cerca de El Cairo, en Egipto. Son pirámides regulares con base cuadrada.

Ejemplo 7.

Un tetraedro regular puede pensarse como una pirámide triangular regular.

Ejemplo 8.

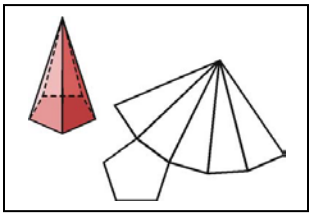
Un octaedro regular se puede cortar con un corte plano, formando dos pirámides cuadrangulares regulares. Por ese motivo se le denomina "bipirámide".

Llamamos **tronco de pirámide** al poliedro que se obtiene al cortar una pirámide por un plano paralelo a su base.

Observación: Al cortar la pirámide por el plano paralelo a su base en realidad quedan dos cuerpos: una pirámide más pequeña, proporcional a la que teníamos originalmente y el tronco de pirámide.

El tronco de pirámide conserva la base de la pirámide original y, en el plano del corte, aparece un nuevo polígono, que es semejante a la base (y que actúa a modo de “tapa” del poliedro). Esta es la llamada **base superior**.

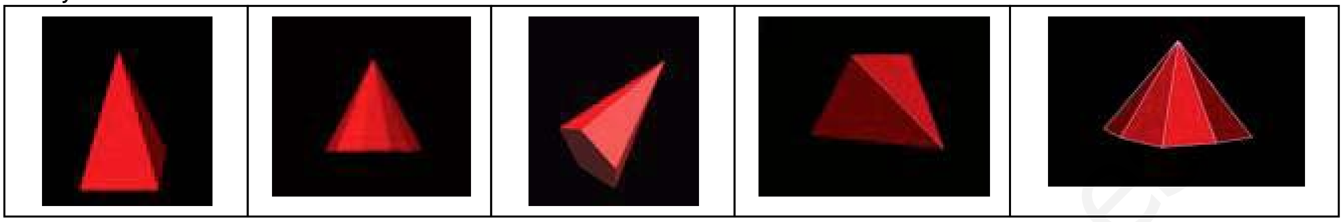
Actividades propuestas



34. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.

35. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.

36. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas o oblicuas y del número de lados de su base.



37. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!

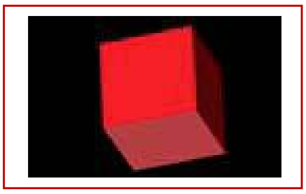
2.4. Superficie de poliedros

La **superficie de un poliedro** es la suma de las áreas de todas sus caras.

Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que **reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras** y sumar.

Ejemplo 9.

a) Superficie de un cubo de 3 cm de arista:

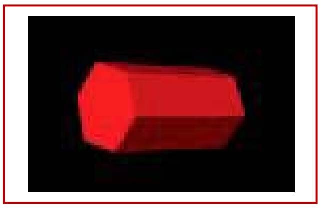


El cubo tiene 6 caras, que son cuadrados. Como el área de cada uno de esos cuadrados es 9 cm^2, el del cubo será 6 · 9 = 54 *cm*^{2}.

b) Superficie de un icosaedro regular de 3 cm de arista:

El icosaedro regular consta de 20 triángulos iguales. Como el área del triángulo es la mitad del producto de la base (3) por la altura ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$), el área de cada uno de los triángulos es 1/2 ·3 · ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$). Así, el área del icosaedro es $45\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

c) Superficie de un prisma hexagonal regular recto de altura 10 *cm* y en el que el lado del hexágono de la base es de 4 *cm*.



Debemos recordar que el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro por su apotema. Así, como el lado mide 4 *cm*, el perímetro mide 24 *cm*. Calculamos la longitud de apotema, utilizando el teorema de Pitágoras podemos deducir que la apotema del hexágono mide $2\sqrt{3}$.

Así el área de una base es 24 · $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ = $24\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

Las caras laterales son rectángulos. El área de cada una de las caras laterales se calcula multiplicando la base por la altura:

4 · 10 = 40 cm^2.

La superficie total del prisma se obtiene sumando el área de las 6 caras laterales rectangulares más el de las dos bases hexagonales: 6 · 40 + 2 · $24\sqrt{3}$ = 240 + $48\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

Actividades propuestas

38. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.

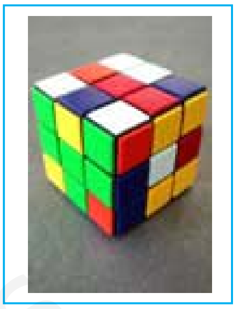
39. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.

40. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?

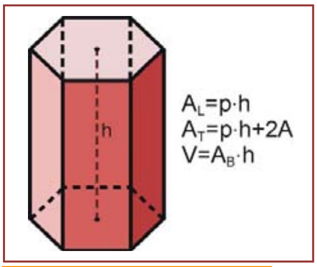
41. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?

2.5. Volumen de prismas y pirámides

El **volumen** de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa este cuerpo en el espacio. Asociado a este concepto está el de **capacidad** de un cuerpo, que es lo que puede contener. En matemáticas muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las "paredes" del cuerpo se suponen sin grosor.



Del mismo modo que el área de un rectángulo es el producto de sus dos dimensiones (base x altura), el volumen del prisma rectangular recto (**ortoedro**) es el producto de sus tres dimensiones:



largo x ancho x alto.

Si pensamos un poco en qué significa largo x ancho, veremos que esto es precisamente el área de la base, con lo que el volumen del ortoedro también puede calcularse multiplicando el área de su base por su altura. Podemos extender esa idea a cualquier prisma:

El **volumen de un prisma** es igual al producto del área de su base por su altura.

Actividades resueltas

- Calcula el volumen de un prisma recto cuya base es un pentágono regular de 10 cm^2 de área y su altura es de 15 cm.

Como nos dan el área de la base no necesitamos calcularla.

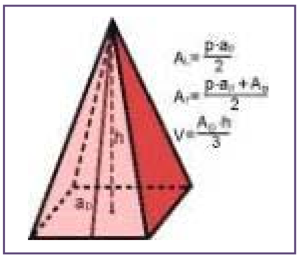
Volumen = Área de la base x altura = 10 · 15 = 150 cm^3

- Halla el volumen de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura es igual a la diagonal mayor.

El área del rombo es la mitad del producto de sus dos diagonales. Así en este caso el área de la base del prisma es 1/2 · 6 · 8 = 24 cm^2.

Para calcular el volumen nos da igual que el prisma sea recto o no, ya que solo nos interesa el área de la base y la altura, que en este caso es de 8 cm, igual a la diagonal mayor.

Volumen = Área de la base x altura = 24 · 8 = 192 cm^3



El **volumen de una pirámide** es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base que la pirámide y la misma altura que ella.

Probar esa propiedad relativa al volumen de una pirámide es complicado: requiere intuición geométrica, aunque te puedes hacer una idea de por qué ese resultado es cierto utilizando papiroflexia para construir un prisma a partir de tres pirámides del mismo volumen (consulta la revista al final del tema).

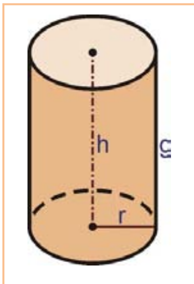
Actividades propuestas

42. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm.

43. Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. *Indicación*: puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.

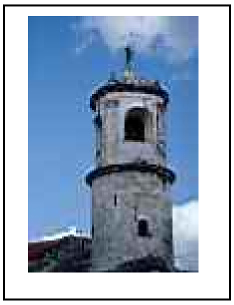
3. CUERPOS REDONDOS

3.1. Cilindros



Del mismo modo que un prisma recto se levanta a partir de una base poligonal, un **cilindro** se construye a partir de una base circular.

Un **cilindro** se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las **bases** del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cilindro.

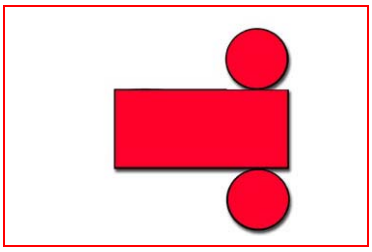


Ejemplo 10:

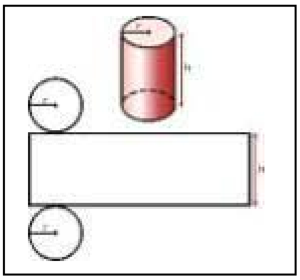
Antes nos hemos referido a rascacielos con forma de prisma, pero también los hay con forma de cilindro. Incluso hay cilindros en torres de iglesias.

Ejemplo 11:

Las latas de conservas son cilindros. Los rollos de papel higiénico tienen forma cilíndrica (de hecho, el nombre cilindro proviene de una palabra griega que se refiere a su forma enrollada). Hay envases de patatas fritas con forma cilíndrica. Las latas de refresco también tienen forma de cilindro. Muchos objetos cotidianos tienen forma de cilindro.



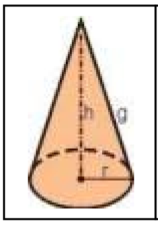
El **desarrollo** de un cilindro nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo. Consta de un rectángulo, que lo limitará lateralmente y de dos círculos, las bases que lo limitan inferior y superiormente.

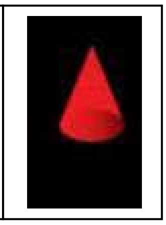


Actividades propuestas

44. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.

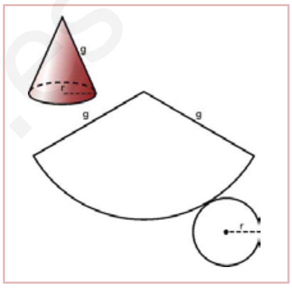
3.2. Conos





Si para hablar del cilindro poníamos como ejemplo a los prismas, para hablar del cono ponemos como ejemplo a las pirámides.

Un **cono** se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la **base** del cono. El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la **generatriz** del cono.

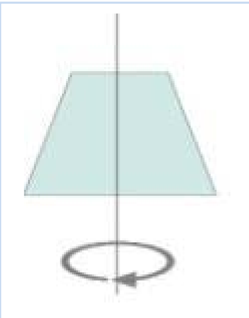


Ejemplo 12:

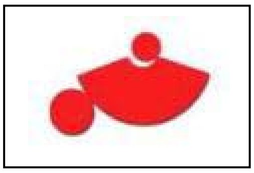
No conocemos rascacielos con forma cónica, pero las tiendas de los indios que estamos acostumbrados a ver en las películas del oeste tienen esa forma.

El **desarrollo** de un cono consta de un sector circular y un círculo. nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo.

Al igual que hacíamos con las pirámides, podemos cortar un cono por un plano paralelo a su base, resultando un cono más pequeño (la parte superior del corte) y otro cuerpo. Ese otro cuerpo, que tiene **dos bases** circulares se denomina **tronco de cono**. Su **altura** es la distancia entre sus dos bases y llamaremos **generatriz** del tronco de cono al segmento que ha de la generatriz del cono original que ha quedado tras cortar la parte superior.



Un tronco de cono se puede obtener haciendo girar un trapecio rectángulo alrededor de su altura.



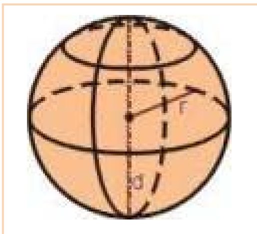
Ejemplo 13:

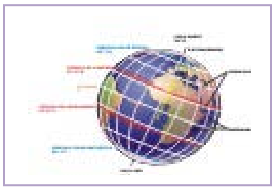
En los circos, los domadores suelen subir a las fieras en "taburetes" con forma de tronco de cono. Una flanera tiene forma de tronco de cono. Los envases de queso fresco también tienen forma de cono. ¿Has pensado por qué?

3.3. Esferas

Es más complicado definir una esfera que poner ejemplos de objetos con forma esférica: una sandía, una pelota, una canica, … La esfera es la generalización natural del círculo (plano) al espacio.

Una **esfera** se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro.
El radio del semicírculo es el **radio** de la esfera.





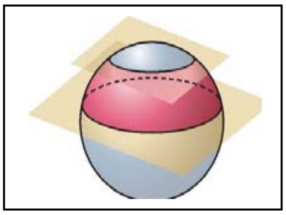
Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que cortamos pasa por el centro de la esfera, obtenemos un **círculo máximo**. Su radio es igual al de la esfera.

Ejemplo 14:

En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que limitan los círculos que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

Actividades resueltas

- Una esfera de 10 *cm* de radio se corta por un plano de modo que el círculo resultante tiene 6 *cm* de radio. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera a ese plano?



Debemos tener en cuenta que el radio de la esfera (*R*) es la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por uno de sus catetos al radio del círculo resultante del corte con el plano (*r*) y por el otro cateto a un trozo del radio de la esfera perpendicular al plano, cuya longitud es la distancia pedida (*d*).
Así, como conocemos dos de los datos, solo tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el tercero (la distancia pedida *d*).
Así $r^2 + d^2 = R^2$ y, despejando obtenemos
$d^2 = R^2 – r^2 = 100 – 36 = 64$. Por lo que $d = \sqrt{64} = 8$ *cm*.

3.4. Superficie de cilindros, conos y esferas

Superficie del cilindro

El procedimiento para hallar la superficie de un cilindro o un cono nos recuerda el modo con el que calculábamos la superficie de un prisma o de una pirámide: no tenemos más que ver qué figuras intervienen en su desarrollo, calcular el área de cada una de ellas y sumarlas.
En algunos textos se utiliza el concepto de **área lateral** tanto para prismas como para cilindros. Con él se refieren al área “de las paredes” de la figura, sin tener en cuenta el de la o las bases. **Este concepto no es necesario si en cada momento sabes qué estás haciendo**. Las fórmulas se deben comprender, pero las matemáticas no son una ristra de fórmulas que se deben aprender de memoria. Entender lo que se debe hacer en cada momento te facilitará el aprendizaje de las matemáticas.
El desarrollo del cilindro consta de 2 círculos y un rectángulo. La altura del rectángulo (*h*) es la altura del cilindro y como el rectángulo se tiene que enrollar alrededor de la base del cilindro, su base tiene que medir lo mismo que la correspondiente circunferencia y ese valor es, siendo *r* el radio de la base del cilindro. Así, el área del rectángulo es $2\pi rh$.
Por otra parte cada una de las bases tiene área πr^2. Así:

Superficie del cilindro = $2\cdot\pi\cdot r\cdot h + \pi\cdot r^2$.

Actividades propuestas

45. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.
46. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.

Superficie del cono

Siguiendo la misma idea anterior, para calcular la superficie de un cono, sumaremos las áreas de las dos piezas que componen su desarrollo: un círculo y un sector circular. (Mira la figura del desarrollo del cono que está en la sección 3.2).
Si la base del cono es un círculo de radio *r,* la longitud de la correspondiente circunferencia es $2\pi r$ y la parte curva del sector circular en el desarrollo del cono debe enrollarse sobre esa circunferencia, luego la medida de esa línea curva es 2 π.
Para calcular el área del sector circular haremos una regla de tres, teniendo en cuenta que el radio de ese sector circular es la generatriz del cono: si a una longitud de $2\pi g$ (circunferencia completa) le corresponde un área de πg^2, a una longitud de $2\pi r$ le corresponderá $2\pi r \cdot \pi g^2 / 2\pi g = \pi\cdot r\cdot g$.
La base del cono es un círculo de radio r, cuyo área es de sobra conocido. Así tenemos que

Superficie del cono = Área del sector circular + Área del círculo = $\pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$.

Para calcular la superficie del tronco de cono debemos calcular las áreas de sus bases, que son círculos (y, por tanto, fáciles de calcular) y la de su pared lateral. El área de esta pared lateral se puede calcular restando el área de la pared del cono original menos el de la pared del cono pequeño que hemos cortado.

Superficie lateral del tronco de cono = Superficie lateral del cono original – Superficie lateral del cono que cortamos

Para calcular la superficie total hay que sumar al área lateral el de las dos bases.
También se puede calcular esto mediante una fórmula, cuya prueba utiliza dos teoremas importantes de la geometría plana: el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.
Supondremos que el radio de la base mayor del tronco de cono es *r*, el de la base menor *r'* y la generatriz *g*. Entonces

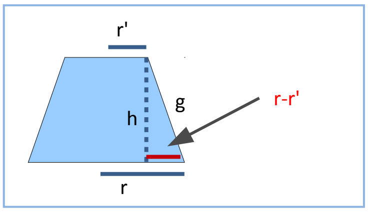
Superficie del tronco **de cono =** $\pi\cdot(r+r')\cdot g + \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r'^2$.

Actividades resueltas

- Queremos construir un taburete para elefantes con forma de tronco de cono, con 75 *cm* de altura y bases de 1,50 y 2,50 metros. Posteriormente forraremos con tela todo el taburete. Si el metro cuadrado de la tela elegida cuesta 3 euros (y se supone no se desperdicia nada en la elaboración) ¿cuánto cuesta forrar el taburete?

Lo primero que debemos hacer es expresar todos los datos con las mismas unidades. Lo expresaremos en metros.

Como nos dan la altura y los radios pero no la generatriz, la calcularemos usando el teorema de Pitágoras:



Así $h^2+(r-r')^2 = g^2$

Retomando los datos tenemos

$r' = 1{,}5\ m$; $r = 2{,}5\ m$; $g = \sqrt{0{,}75^2+1^2} = 1{,}25\ m$.

Con ello calculamos el área:

$\pi\cdot(2{,}5 + 1{,}5)\cdot 1{,}25 + \pi\cdot 2{,}5^2 + \pi\cdot 1{,}5^2 = 42{,}39\ m^2$

y, por tanto, forrar el taburete nos cuesta 42,39 · 3 = 127,17 euros.

Superficie de la esfera

No podemos calcular la superficie de la esfera mediante su desarrollo, ya que solo se podría obtener de forma aproximada. Sin embargo, hay diferentes métodos (más avanzados) que permiten calcularlo. Aunque no somos partidarios de dar fórmulas, esta vez tenemos que avanzar que

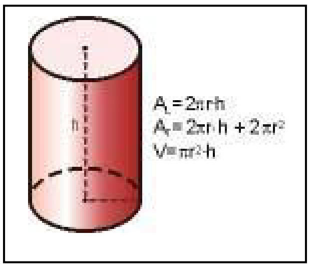
Superficie de la esfera de radio r es igual a $\mathbf{4\pi r^2}$.

Ese valor coincide con el del área lateral del cilindro de radio r y altura $2r$ (que es el que se ajusta por completo a la esfera). Como sabemos deducir el área lateral del cilindro, recordar esto nos evitará tener que recordar la fórmula anterior.

3.5. Volumen de cilindros, conos y esferas

Con el cálculo de volúmenes ocurre algo parecido a lo que ocurre con las áreas: el cálculo del volumen de un cilindro es similar al del volumen de un prisma, mientras que el cálculo del volumen del cono nos recuerda al del volumen de la pirámide. La esfera merece un capítulo aparte.

Volumen del cilindro



El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es r y la altura es h nos queda

Volumen cilindro = $\pi r^2 h$

Ejemplo 15:

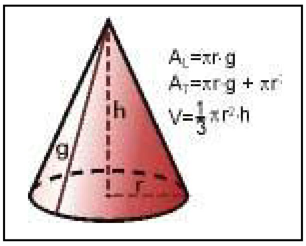
Una lata de tomate frito en conserva tiene un diámetro de 6 *cm* y una altura de 12 *cm*. Vamos a calcular el volumen de la lata, que nos indicará cuánto tomate cabe en su interior.

Hay que tener cuidado con los datos porque nos dan el diámetro en lugar del radio. El radio de la base es 3 *cm*, la mitad del diámetro.

Así el volumen viene dado por

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339{,}12\ cm^3$$

Volumen del cono

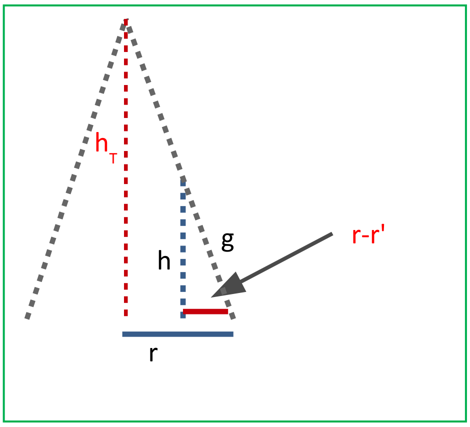


El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura (¿te recuerda eso a algo?). Así, para un cono cuyo radio de la base es r y su altura es h se tiene que

Volumen cono = 1/3 $\pi r^2 h$

Para calcular el volumen de un tronco de cono calcularemos el volumen del cono original y le restaremos la parte superior que hemos cortado.

Ejemplo 16:



- Vamos a calcular el volumen del taburete para elefantes que hemos forrado de tela en una actividad anterior: tiene forma de tronco de cono, con 75 *cm* de altura y bases de 1,50 y 2,50 metros.

Lo primero que haremos es determinar el volumen del cono completo. Para ello necesitamos calcular su altura.

Utilizando semejanza de triángulos y llamando a la altura del cono total h_T tenemos que

$$h_T/h = r / (r - r')$$

de ahí que la altura del cono total sea $h_T = h \cdot r / (r-r') = 0{,}75 \cdot 2{,}5 / 1 = 1{,}875\ m$.

y por ello el volumen del cono total será de $V = h_T\ \pi r^2 = 36{,}8\ m^3$.

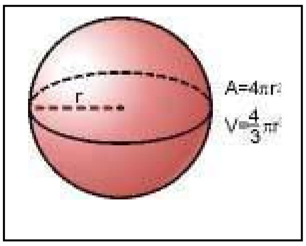
Ahora debemos calcular el volumen del "cono pequeño" (el que hemos eliminado para conseguir el tronco de cono). Su altura es la diferencia entre la altura del cono grande y la del tronco de cono. Su radio es el de la base superior del tronco de cono. Por ello su volumen viene dado por $(h_T - h)\ \pi r'^2 = 7{,}95\ m^3$.

Autor: Fernando Blasco / Revisor: Eduardo Cuchillo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Consecuentemente, el volumen del tronco de cono es 36,8 – 7,95 = 28,85 m^3.

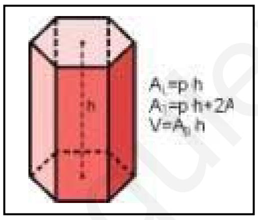
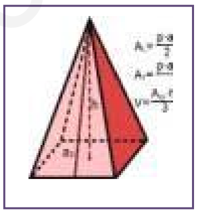
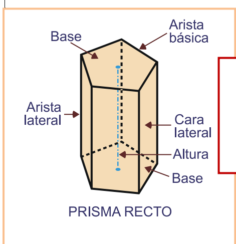
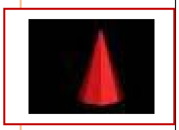
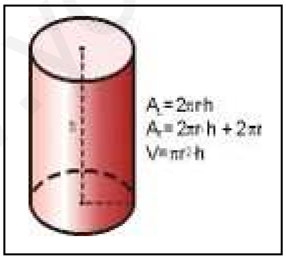
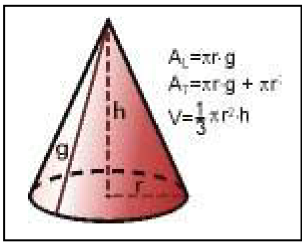
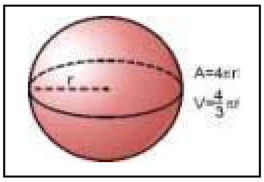
Volumen de la esfera

Al no tener un desarrollo plano, trabajar con la esfera es más difícil y requiere técnicas matemáticas que estudiarás en otros cursos. Simplemente por completar lo expuesto en este tema, damos la fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio *r*.



$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
Elementos del espacio	Puntos, rectas y planos	
Sistemas de representación	Planta, perfil y alzado. Tomografía. Perspectiva caballera.	
Posiciones relativas	Dos planos o se cortan o son paralelos. Dos rectas en el espacio o se cortan o son paralelas o se cruzan. Una recta y un plano o la recta está contenida en el plano, o lo corta o es paralela.	
Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos	
Poliedros regulares	Poliedro con todas las caras polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.	Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.
Prisma. Volumen Pirámide. Volumen.	 	 
Cilindro. Volumen. Cono. Volumen.	 	Un cilindro de radio 3 m y altura 5 m tiene un volumen de 45π m^3, y una superficie lateral de 30π m^2. Un cono de radio 3 m y altura 5 m, tiene un volumen de 15 m^3.
Esfera. Volumen. Superficie		Una esfera de radio 3 tiene un volumen de 36π m^3, y una superficie de 36π m^2.