1º ESO

TEMA 13

LONGITUDES Y ÁREAS

PROFESOR: RAFAEL NÚÑEZ NOGALES

1.- PERÍMETRO Y ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Perímetro de una figura

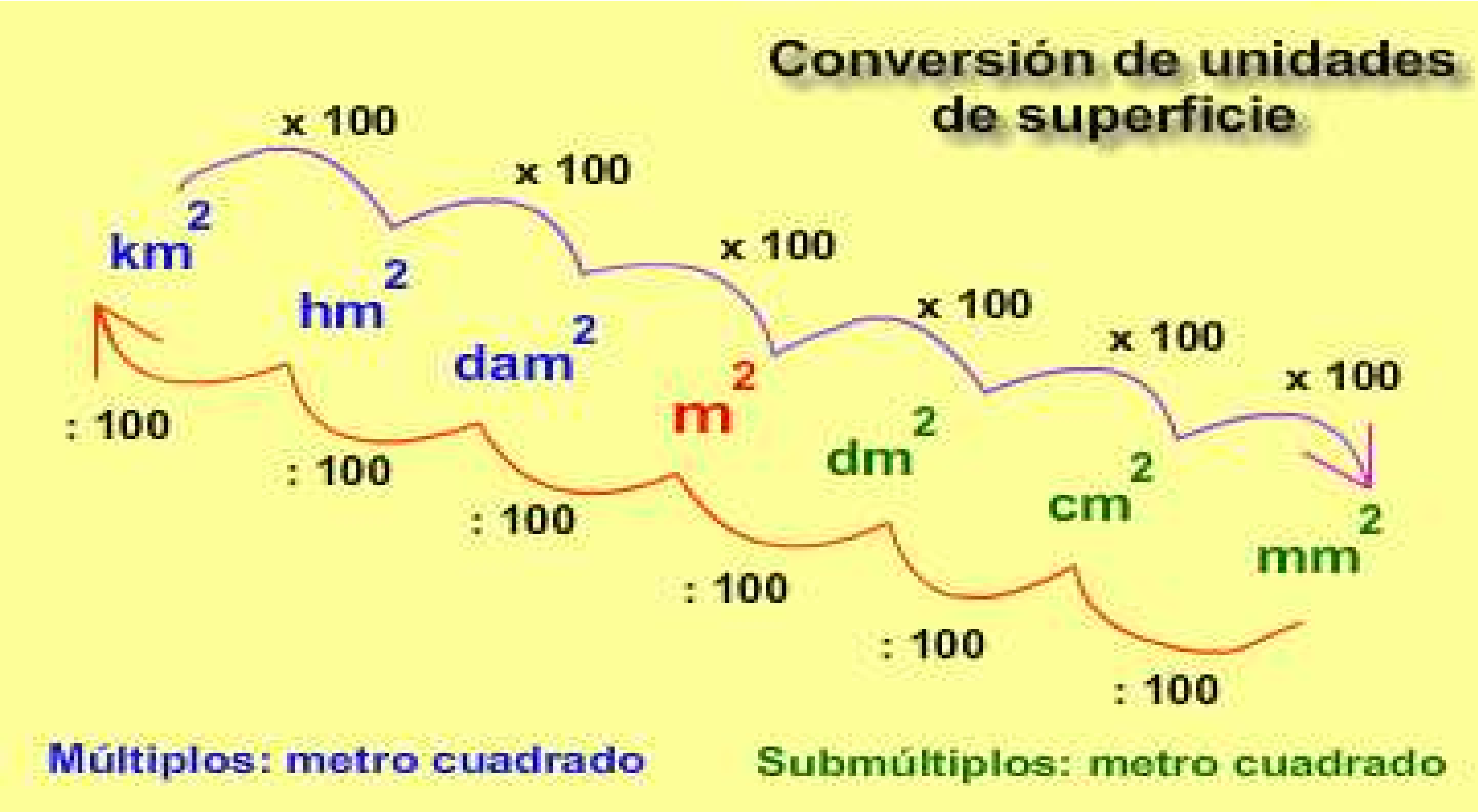
El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

Esa suma representa una medida de longitud. Por ello, las unidades utilizadas son el **metro** y todos sus múltiplos y submúltiplos.

1.- PERÍMETRO Y ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Área de una figura

El **área** de una figura plana es la medida de la superficie que ocupa.



Tareas Ejercicios: 1 , 2 , 3 , 46 y 47

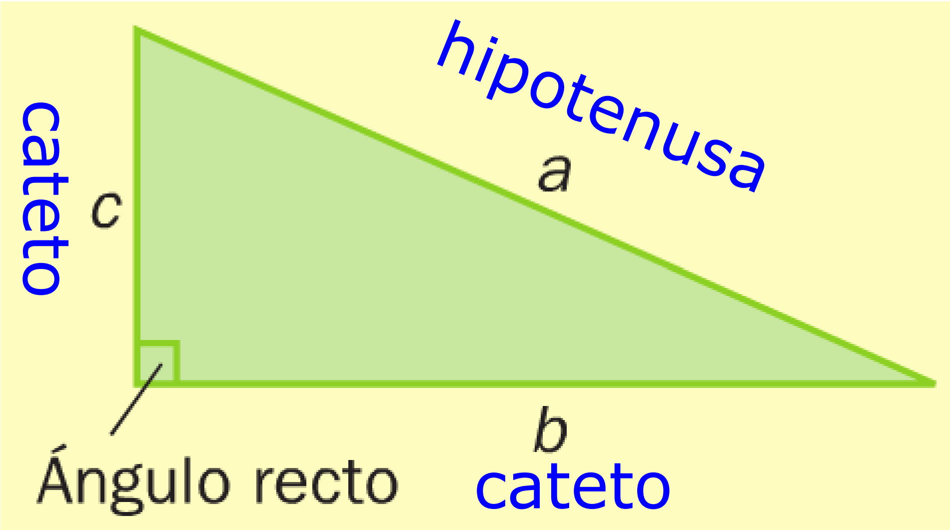
2.- MEDIDAS INDIRECTAS: TEOREMA DE PITÁGORAS

Las **medidas indirectas** son las que no se pueden realizar directamente. Para hallarlas utilizamos relaciones entre estas medidas desconocidas y otras conocidas.

Una de las relaciones que se utilizan para el cálculo de medidas indirectas es el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

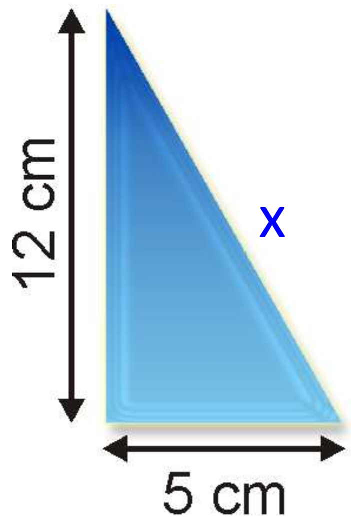
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

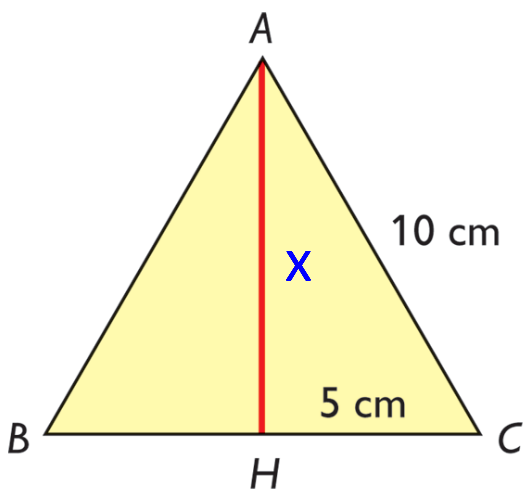
2.- MEDIDAS INDIRECTAS: TEOREMA DE PITÁGORAS

Aplicaciones del teorema de Pitágoras



$$x^2 = 12^2 + 5^2 \longrightarrow x^2 = 144 + 25 \longrightarrow x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169} \longrightarrow x = 13 \text{ cm}$$

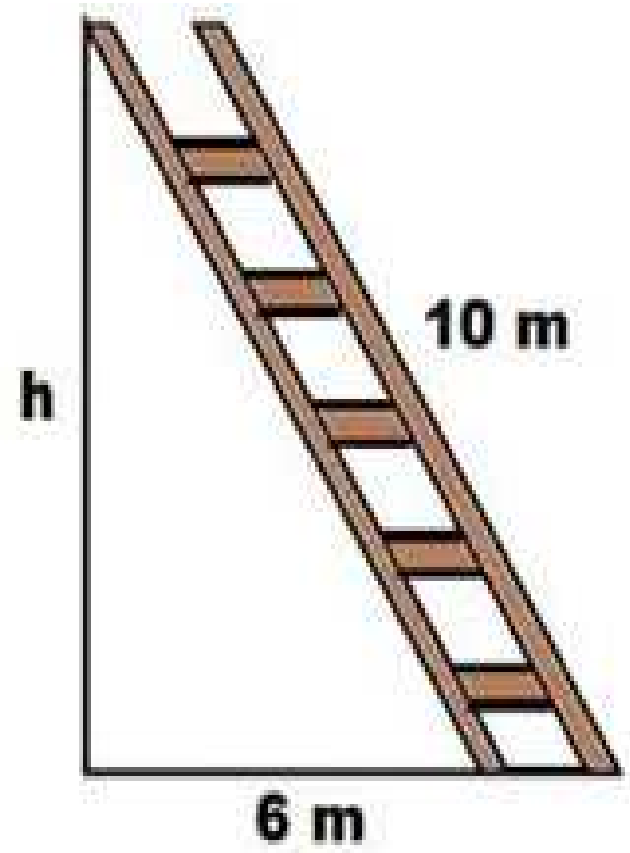


$$10^2 = 5^2 + x^2 \longrightarrow 100 = 25 + x^2$$

$$75 = x^2 \longrightarrow x = \sqrt{75} \longrightarrow x \cong 8{,}66 \text{ cm}$$

2.- MEDIDAS INDIRECTAS: TEOREMA DE PITÁGORAS

Aplicaciones del teorema de Pitágoras (continuación)



$$10^2 = 6^2 + h^2 \longrightarrow \quad 100 = 36 + h^2$$

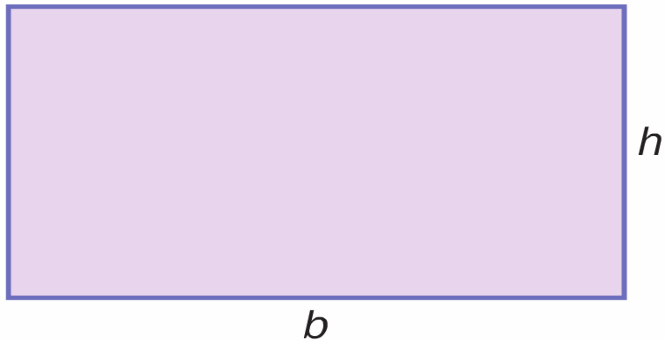
$$64 = x^2 \longrightarrow \quad x = \sqrt{64} \quad \longrightarrow x = 8\ m$$

Tareas Ejercicios: 6 , 7 , 8 , 74 y 77

PROFESOR: RAFAEL NÚÑEZ NOGALES

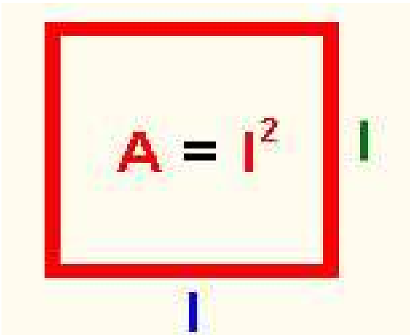
3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del rectángulo y del cuadrado



El **área del rectángulo** es igual al producto de su base por su altura, expresadas en la misma unidad.

$$A = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$



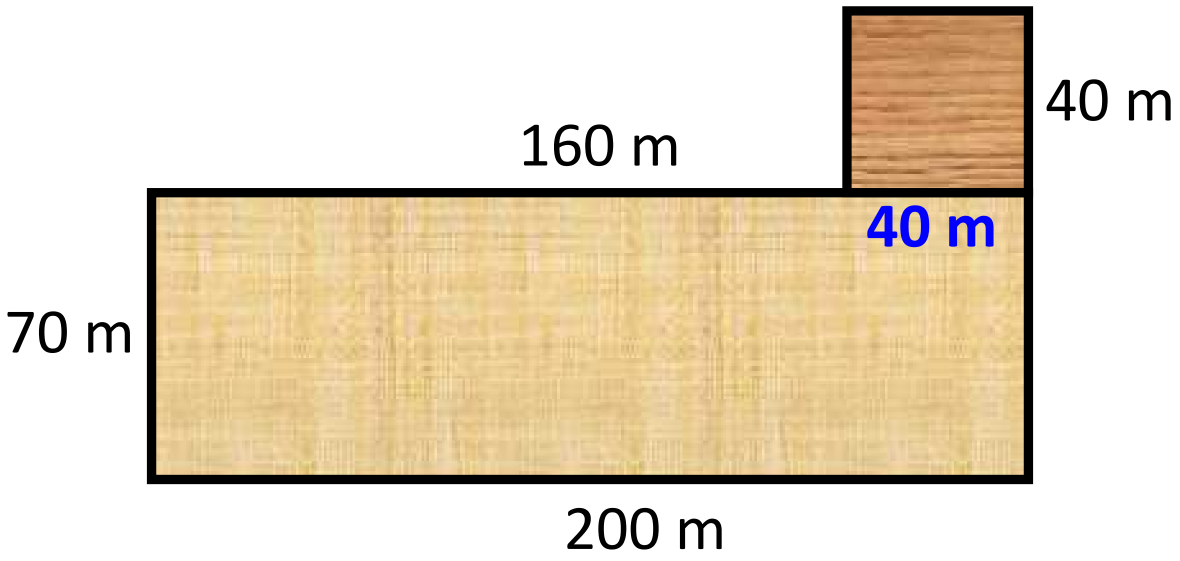
El **área del cuadrado** es igual al producto de su lado por sí mismo, es decir, al lado elevado al cuadrado.

$$A = l \cdot l = l^2$$

3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del rectángulo y del cuadrado (Ejemplo)

Averigua el precio de esta finca a razón de 10,50 €/m^2



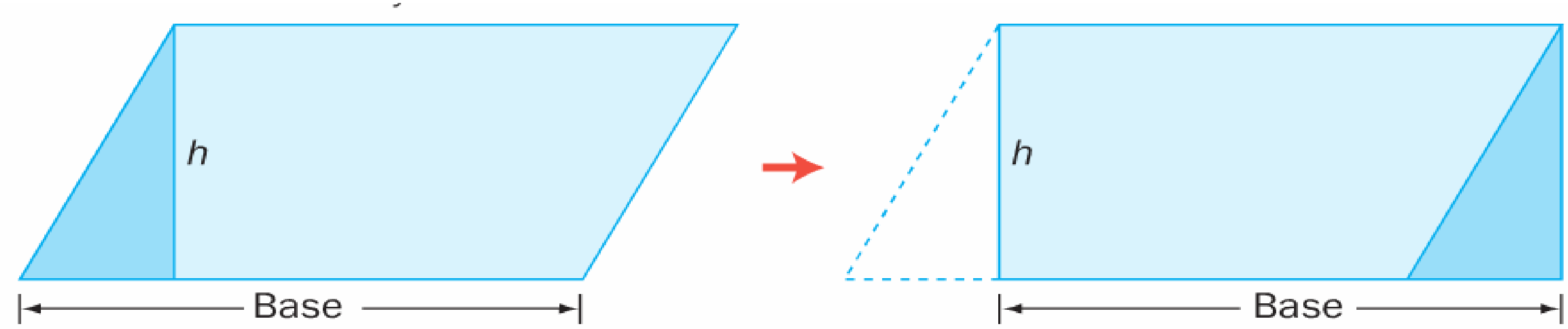
A(finca) = A(rectángulo) + A(cuadrado)

A(finca) = 200 . 70 + 40^2 = 14 000 + 1 600 = 15 600 m^2

Precio de la finca: 15 600 m^2 . 10,50 €/m^2 = 163 800 €

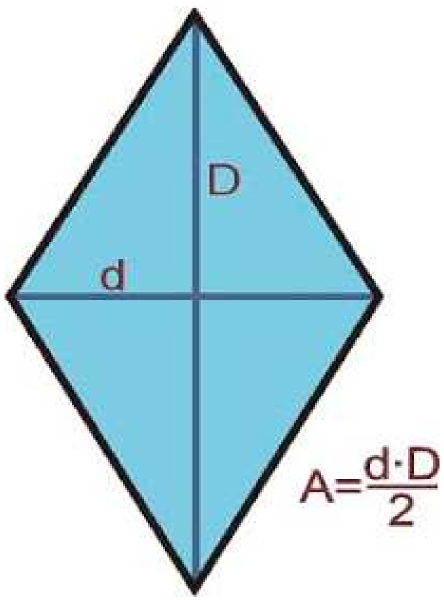
3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del paralelogramo y del rombo



El **área del paralelogramo** es igual a la base por la altura, expresadas en la misma unidad.

$$A = \textbf{base} \cdot \textbf{altura} = b \cdot h$$

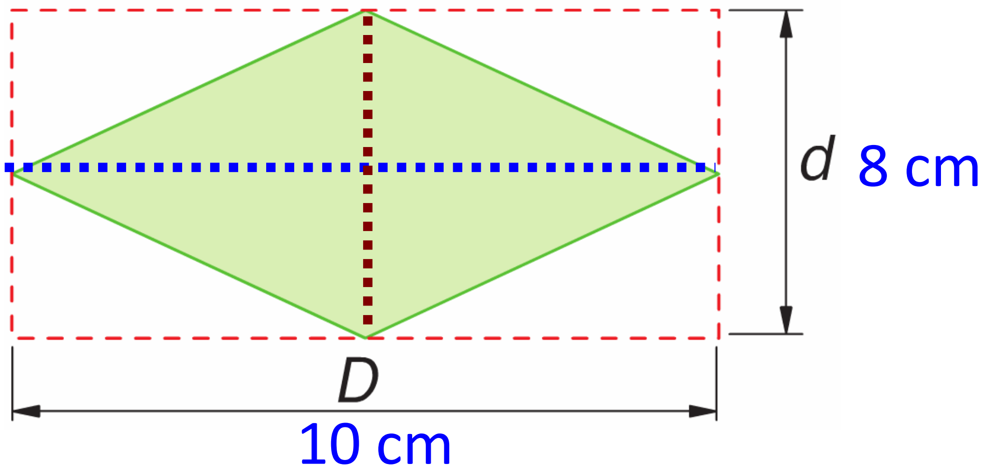


El **área de un rombo** es igual a su diagonal menor por su diagonal mayor partido por dos

$$A(\text{rombo}) = \frac{d \, . \, D}{2}$$

Área del rombo (Ejemplo)

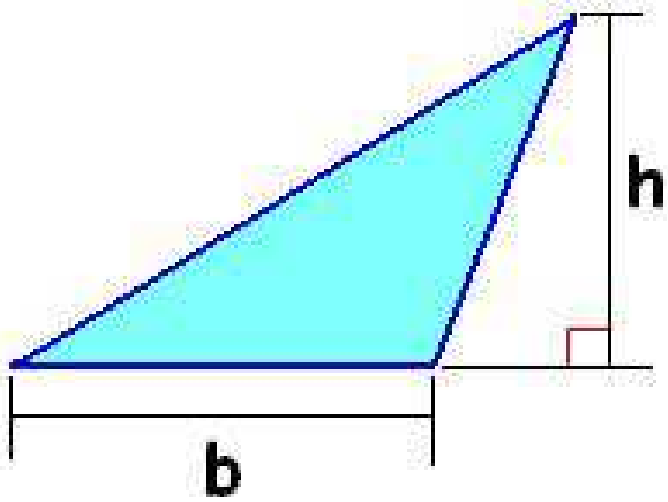
Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 10 y 8 centímetros, respectivamente.



$$A(\text{rombo}) = \frac{d\,.\,D}{2} = \frac{8\,.\,10}{2} = 40\ cm^2$$

3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del triángulo



$$\text{Area Triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

El **área del triángulo** es igual a la mitad del producto de la base por la altura, expresadas en la misma unidad.

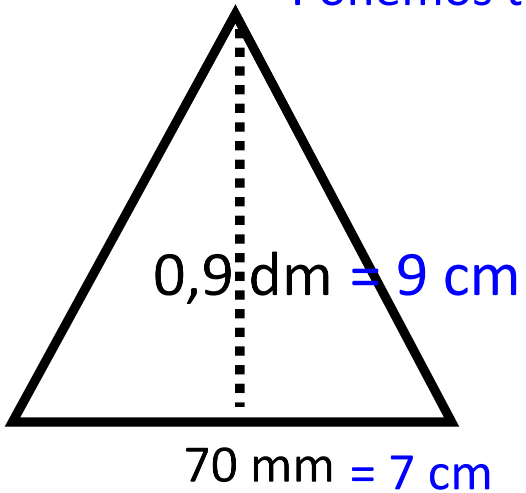
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

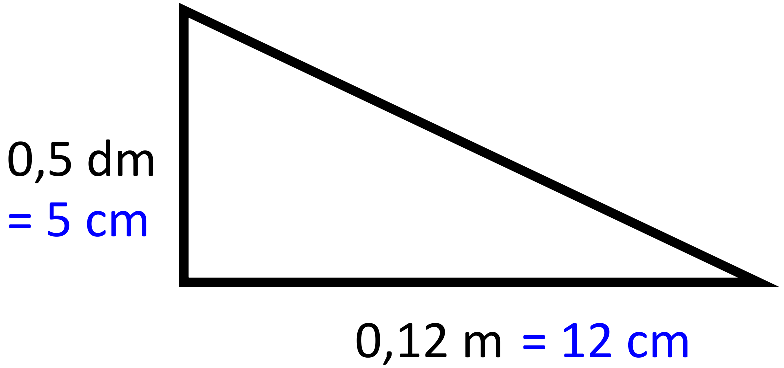
3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del triángulo (Ejemplo)

Averigua qué triángulo tiene mayor superficie

Ponemos todas las medidas en cm





$$A(\text{triángulo}) = \frac{\text{base . altura}}{2}$$

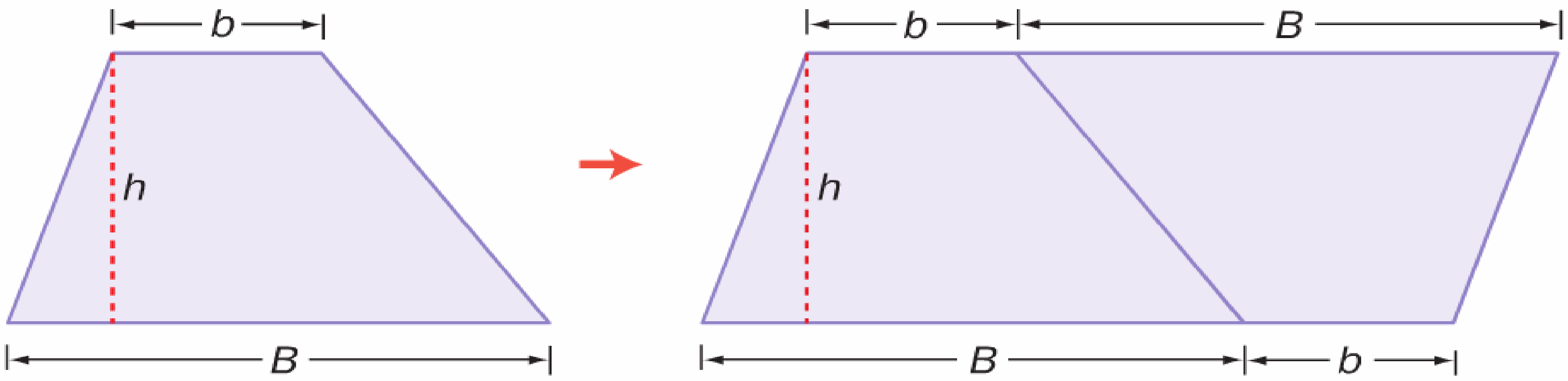
$$A(\text{triángulo isósceles}) = \frac{7\ .\ 9}{2} = 31{,}5\ cm^2$$

$$A(\text{triángulo rectángulo}) = \frac{12\ .\ 5}{2} = 30\ cm^2$$

El de mayor área es el triángulo isósceles

3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del trapecio



El área del paralelogramo es:

$$A = (B + b) \cdot h$$

Y el área del trapecio es la mitad del área del paralelogramo.

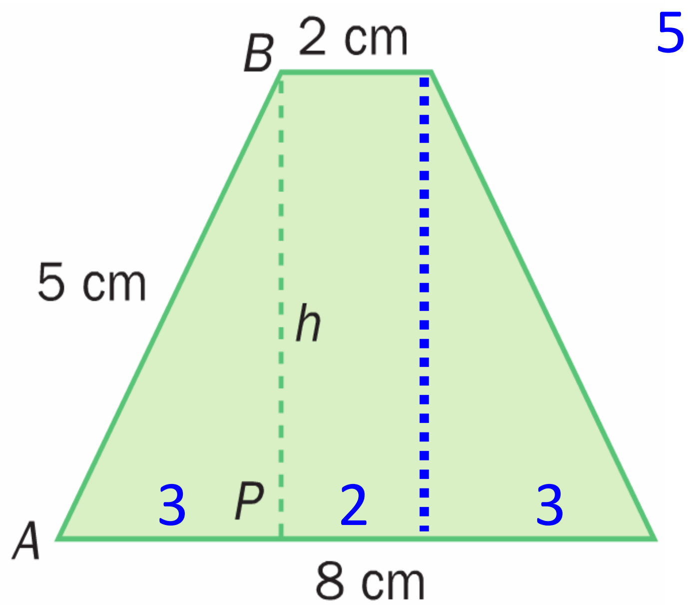
$$A(\text{trapecio}) = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

El **área de un trapecio** es igual a la suma de sus bases multiplicada por la altura y dividida entre dos

3, 4 y 5.- ÁREA DEL RECTÁNGULO, CUADRADO, PARALELOGRAMO, TRIÁNGULO Y TRAPECIO

Área del trapecio (Ejemplo)

Primero se calcula h por el teorema de Pitágoras:



$$5^2 = 3^2 + h^2 \longrightarrow 25 = 9 + h^2$$

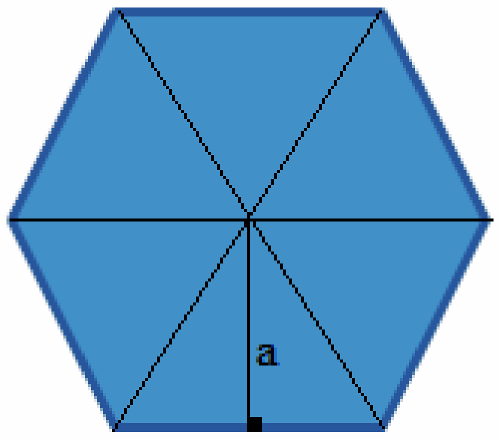
$$16 = h^2 \longrightarrow h = \sqrt{16} \rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

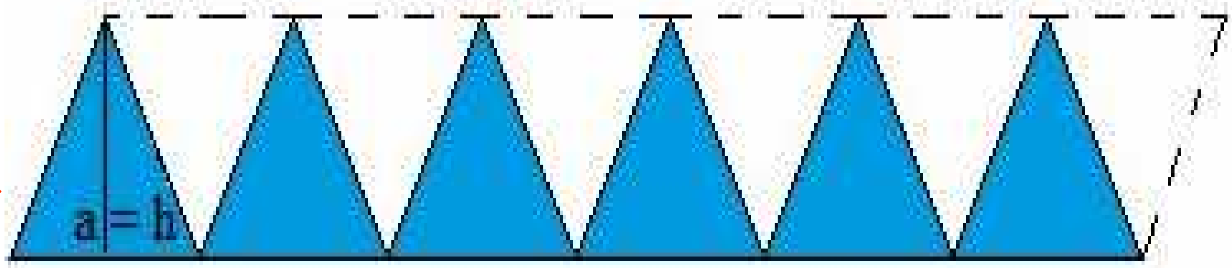
$$A(\text{trapecio}) = \frac{(B + b) \, . \, h}{2}$$

$$A(\text{trapecio}) = \frac{(8 + 2) \, . \, 4}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

Tareas Ejercicios: 14 , 15 , 17 , 18 , 19 y 22

6 y 7.- ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES





base del paralelogramo = perímetro del polígono

$$A(\text{polígono regular}) = \frac{A(\text{paralelogramo})}{2} = \frac{\text{perímetro . apotema}}{2}$$

$$A(\text{polígono regular}) = \frac{P\ .\ a}{2}$$

El **área de un polígono regular** es igual al producto del perímetro por la apotema dividido entre dos

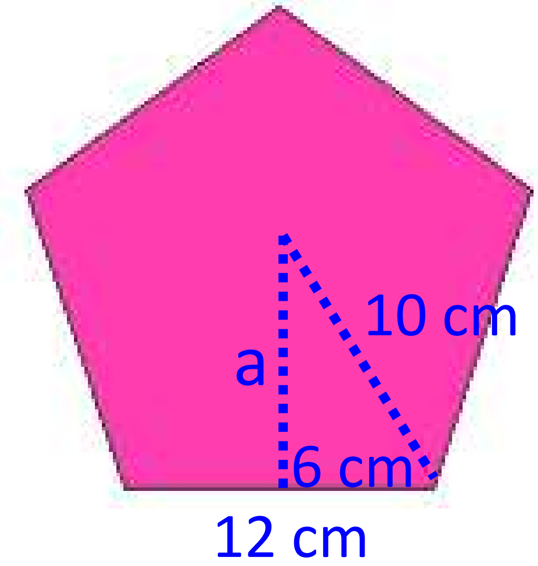
El **área de un polígono irregular** se puede calcular por **triangulación** o por **cuadriculación**.

6 y 7.- ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES

Área del polígono regular (Ejemplo)

Calcula la superficie de un pentágono regular de 12 cm de lado y 1 dm de radio

Ponemos el radio en cm: 1 dm = 10 cm



$$A(\text{polígono regular}) = \frac{P \, . \, a}{2}$$

perímetro = 12 . 5 = 60 cm

La apotema, a, se calcula por el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 6^2 + a^2 \longrightarrow \quad 100 = 36 + a^2$$

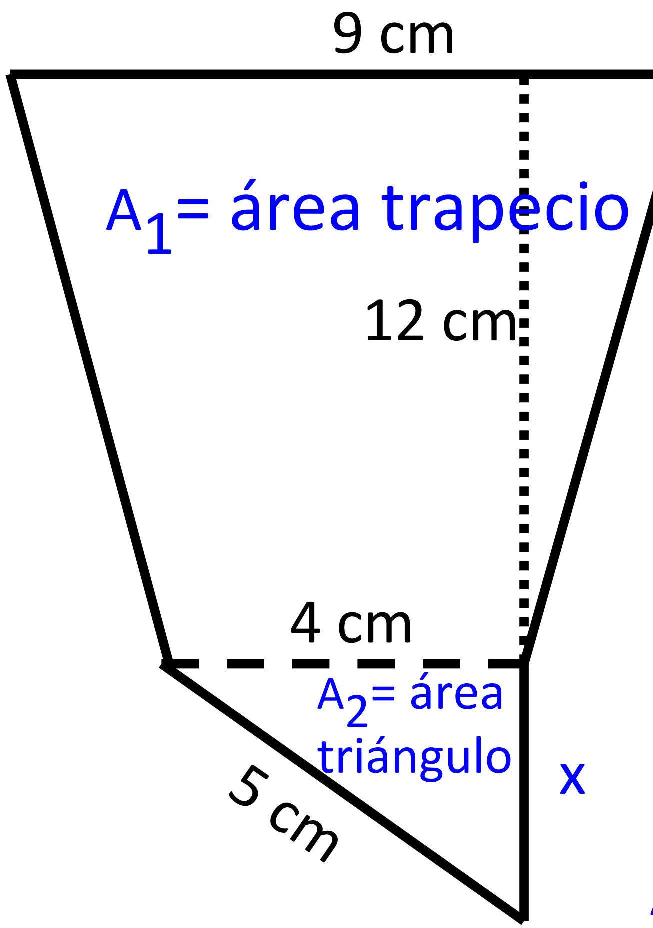
$$64 = a^2 \longrightarrow \quad a = \sqrt{64} \quad \longrightarrow a = 8 \text{ cm}$$

$$A(\text{pentágono regular}) = \frac{60 \, . \, 8}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

6 y 7.- ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES

Área de un polígono irregular (Ejemplo)

Calcula la superficie del siguiente polígono irregular:



$$A_1 = A(\text{trapecio}) = \frac{(9+4) \cdot 12}{2} = 78 \text{ cm}^2$$

$$5^2 = 4^2 + x^2$$

$$25 = 16 + x^2$$

$$9 = x^2$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = 3$$

$$A_2 = A(\text{triángulo}) = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A(\text{polígono irregular}) = A_1 + A_2 = 78 + 6 = 84 \text{ cm}^2$$

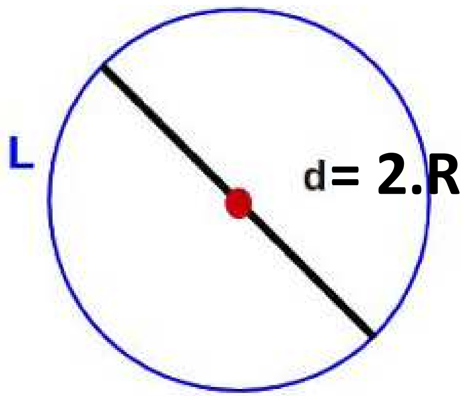
Tareas Ejercicios: 25 , 26 , 62 y 82

PROFESOR: RAFAEL NÚÑEZ NOGALES

8 y 9.- LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

Longitud de la circunferencia

Al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro siempre se obtiene el mismo número. A este número se le llamó pi. El número pi se representa con la letra griega π.
El valor de π es, aproximadamente, 3,14



L: longitud de la circunferencia

d: longitud del diámetro

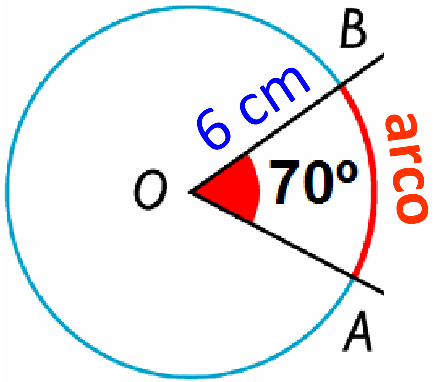
$$\frac{L}{d} = \pi$$

Despejando la longitud, L, se obtiene: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 2 \cdot R$

$$L(\text{circunferencia}) = 2 \cdot \pi \cdot R$$

8 y 9.- LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

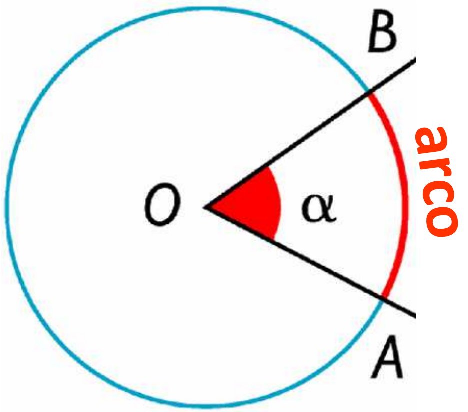
Longitud de un arco de circunferencia



$$L(\text{circunferencia}) = 2 \,.\, \pi \,.\, R \cong 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6 = 37{,}68 \text{ cm}$$

$$\frac{37{,}68 \text{ cm}}{360º} = \frac{\text{longitud del arco}}{70º} \rightarrow \text{longitud del arco} = \frac{70º \,.\, 37{,}68}{360º} \cong 7{,}33 \text{ cm}$$

Caso general



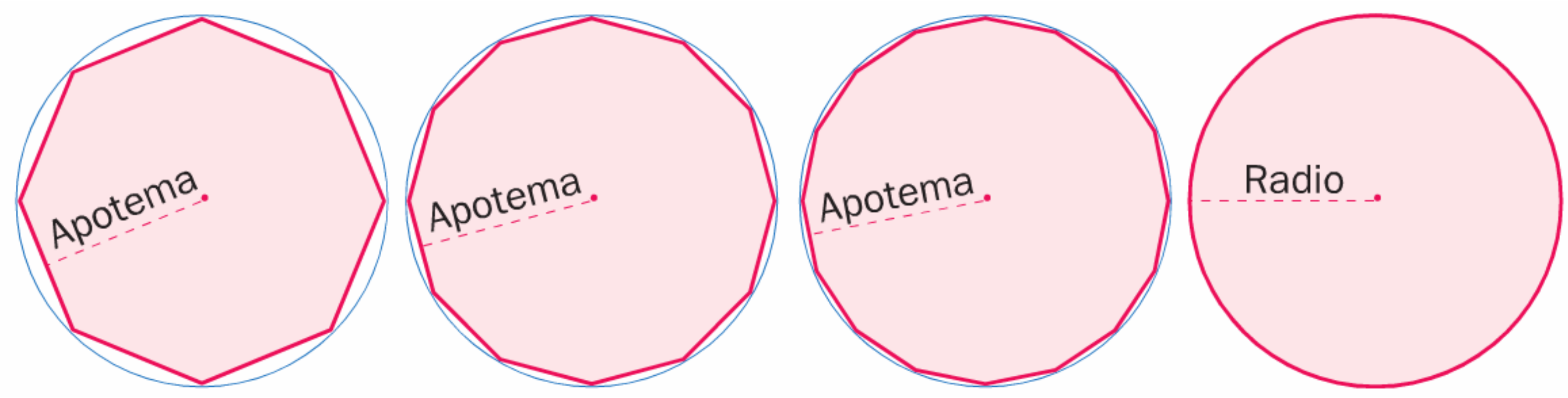
$$\frac{2 \,.\, \pi \,.\, R}{360º} = \frac{\text{arco}}{\alpha º}$$

$$\boxed{\text{arco} = \frac{2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, \alpha º}{360º}}$$

8 y 9.- LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

Área del círculo

Un círculo se puede considerar como un polígono regular de "infinitos lados"



El perímetro sería la longitud de la circunferencia y el radio sería la apotema

$$A(\text{círculo}) = \frac{\text{perímetro . apotema}}{2}$$

$$A(\text{círculo}) = \frac{\text{longitud de la circunferencia . radio}}{2}$$

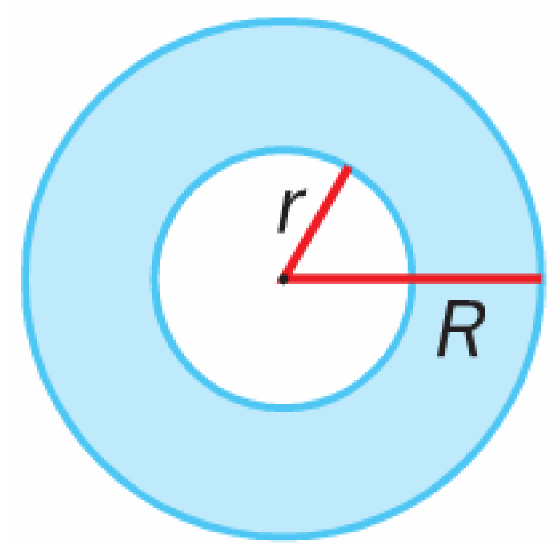
$$A(\text{círculo}) = \frac{2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, R}{2} \rightarrow A(\text{círculo}) = \frac{\cancel{2} \,.\, \pi \,.\, R^2}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{A(\text{círculo}) = \pi \,.\, R^2}$$

PROFESOR: RAFAEL NÚÑEZ NOGALES

8 y 9.- LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

Área de la corona circular



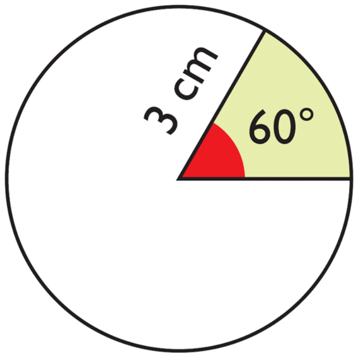
El **área de una corona circular** es igual a la diferencia de las áreas del círculo mayor y del círculo menor.

El área de la corona circular se puede hallar directamente usando la fórmula:

$$A(\text{corona circular}) = \pi.(R^2 - r^2)$$

8 y 9.- LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

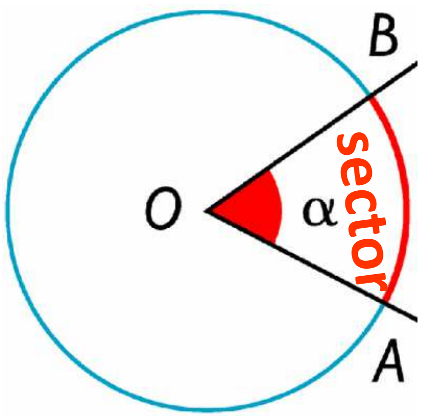
Área del sector circular



$$A(\text{círculo}) = \pi \, . \, R^2 \cong 3{,}14 \, . \, 3^2 = 28{,}26 \text{ cm}$$

$$\frac{28{,}26 \text{ cm}}{360^\text{o}} = \frac{\text{área del sector}}{60^\text{o}} \rightarrow \text{área del sector} = \frac{60^\text{o} \, . \, 28{,}26}{360^\text{o}} = 4{,}71 \text{ cm}$$

Caso general



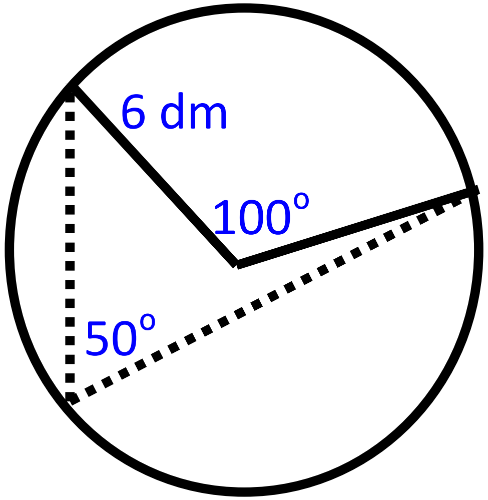
$$\frac{\pi \, . \, R^2}{360^\text{o}} = \frac{\text{área del sector}}{\alpha^\text{o}}$$

$$A(\text{sector circular}) = \frac{\pi \, . \, R^2 \, . \, \alpha^\text{o}}{360^\text{o}}$$

8 y 9.- LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

Longitud del arco y área del sector (Ejemplo)

En una circunferencia de 6 dm de radio, halla la longitud del arco abarcado por un ángulo inscrito de 50°. Calcula también el área del sector del ángulo central que corresponde a dicho ángulo.



$$\text{arco} = \frac{2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, \alpha^{o}}{360^{o}} = \frac{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6 \,.\, 100^{o}}{360^{o}}$$

$$\text{arco} \cong 10{,}47 \text{ dm}$$

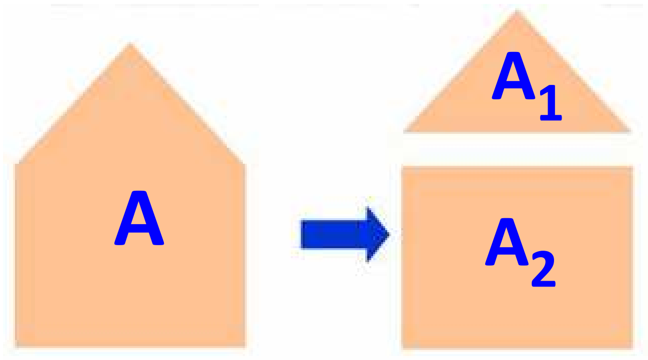
$$A(\text{sector}) = \frac{\pi \,.\, R^2 \,.\, \alpha^{o}}{360^{o}} = \frac{3{,}14 \,.\, 6^2 \,.\, 100^{o}}{360^{o}}$$

$$A(\text{sector}) = 31{,}4 \text{ dm}^2$$

Tareas Ejercicios: 29 , 30 , 31 , 32 , 36 , 37 , 66 , 70 , 71 y 78

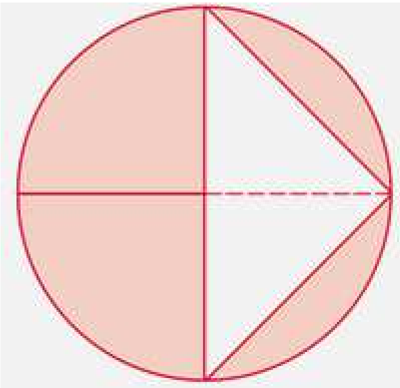
10 y 11.- CÁLCULO DE ÁREAS POR COMPOSICIÓN Y POR DESCOMPOSICIÓN

Si una figura está compuesta por polígonos o figuras circulares, su área puede calcularse sumando las áreas de todos los elementos.



$$A = A_1 + A_2$$

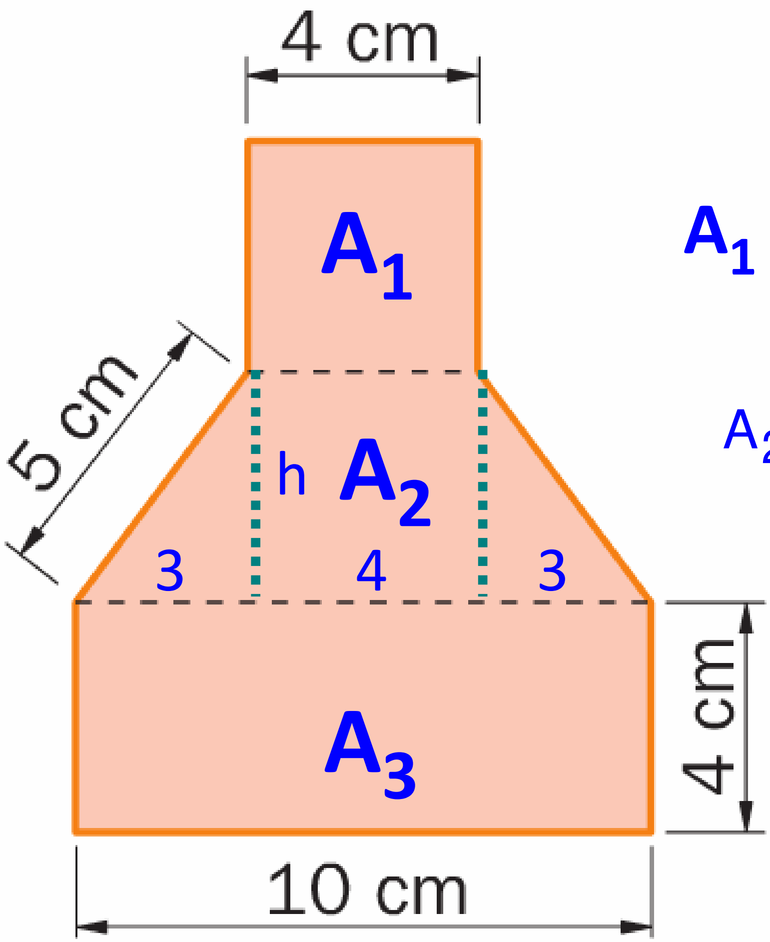
El área de una figura compuesta por un polígono o un círculo al que se le ha quitado otro se calcula restando áreas.



A(zona coloreada) = A(círculo) – A(triángulo)

10 y 11.- CÁLCULO DE ÁREAS POR COMPOSICIÓN Y POR DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo 1



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = A(\text{cuadrado}) = 4^2 = 16\ cm^2$$

$$A_2 = A(\text{trapecio}) = \frac{(10 + 4) \cdot 4}{2} = 28\ cm^2$$

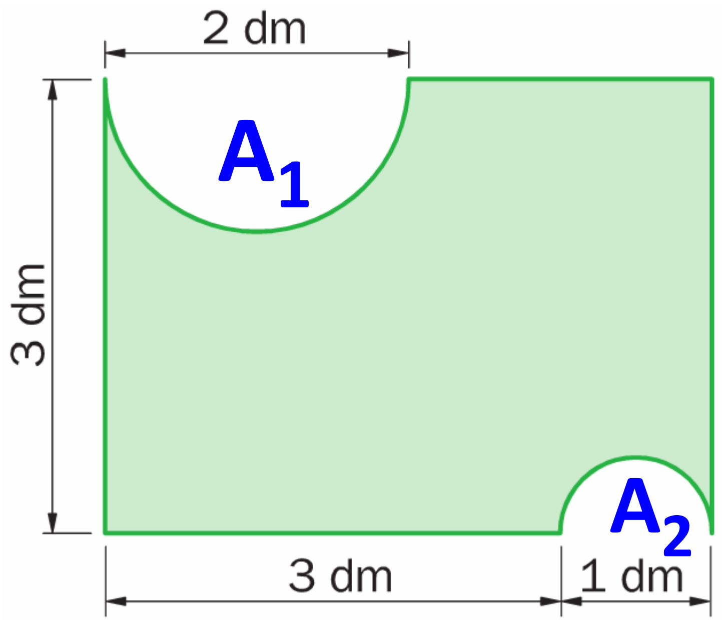
(h = 4, por el teorema de Pitágoras)

$$A_3 = A(\text{rectángulo}) = 10 \cdot 4 = 40\ cm^2$$

$$A = 16 + 28 + 40 = 84\ cm^2$$

10 y 11.- CÁLCULO DE ÁREAS POR COMPOSICIÓN Y POR DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo 2



A(zona coloreada) =
= A(rectángulo) – A_1 – A_2

A(rectángulo) = 4 . 3 = 12 dm^2

A_1 = A(semicírculo de radio 1) = (π . 1^2) : 2 $\cong$ 1,57 dm^2

A_2 = A(semicírculo de radio 0,5) = (π . $0,5^2$) : 2 $\cong$ 0,39 dm^2

A(zona coloreada) = 12 – 1,57 – 0,39 = 10,04 dm^2

Tareas Ejercicios: 40 , 41 , 43 y autoevaluación Pág. 241: 7