EBAU (18-19)

MATEMATICAS II (JULIO)

OPCION A

1) Dado la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$
Calcular los valores de a, b y c, sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos, se encuentran en los puntos de absisa: $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX, en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

1º Corta el eje OX en $x=1 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1^4 + a1^3 + b1^2 + c + 7 = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c + 7 = 0$

$\Rightarrow a + b + c = -8$

2º Estudiemos extremos relativos de $f(x) \Rightarrow$

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$

Extremo en $x=0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Extremo en $x=-2 \Rightarrow f'(-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(-2)^3 + 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -32 + 12a - 4b + c = 0 \Rightarrow 12a - 4b + c = 32$

Entonces tenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = -8 \\ 12a - 4b = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + \cancel{4b} = -32 \\ 12a - \cancel{4b} = 32 \end{cases}$$

$16a = 0 \Rightarrow a = 0$ // entonces $b = -8$ ✓

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$$

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=-8 \\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=x^4-8x^2+7 \quad \checkmark$$

— Comprobamos premisas:

1° Corte con eje Ox

$x^4-8x^2+7=0$;; $t=x^2 \Rightarrow t^2-8t+7=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\dfrac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\dfrac{8\pm 6}{2}$ ⟨ $\dfrac{14}{2}=7$; $\dfrac{2}{2}=1$ OK

$$\begin{array}{r} 64 \\ -28 \\ \hline 36 \end{array}$$

2° Extremos

$f'(x)=4x^3-16x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Rightarrow 4x(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{OK} \\ x=\pm 2 & \text{OK} \end{cases}$

② Dado el sistema:
2

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+k^2z=3k \end{array}\right\}$$

ⓐ Discutirlo para los distintos valores del parámetro "k".

ⓑ Resolverlo para $k=2$

ⓐ
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & k^2 & 3k \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & -1 & 2k^2-9 & 6k-6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 2k^2-2 & 6k+6 \end{array}\right)$$

Estudiamos: $2k^2-2=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k=\pm 1$

<u>CASO 1</u>: $k=1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$
sistema incompatible
no tiene solucion
$r(A)=2 \quad r(A^*)=3 \quad \boxed{0=12\#}$

CASO 2.- $K=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ sistema compatible indeterminado ✓ infinitas soluciones

$r(A)=r(A^*)<3=$ nº incog.

CASO 3.- $K\neq 1$ y $K\neq -1$; en este caso tendremos $r(A)=r(A^*)=3=$ nº incognitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado con una única solución ✓

ⓑ Resolverlo para $K=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y+3z=2 \\ y+7z=12 \\ z=3 \end{array}\right\}$$ ✓

E_2: $y+7z=12$ con $z=3 \Rightarrow y=12-21 \Rightarrow y=-9$ ✓

E_1: $2x+y+3z=2$ con $\left\{\begin{array}{l} z=3 \\ y=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=2+9-9 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ ✓

— Comprobamos $3x+y+K^2z=3K$ con $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-9 \\ z=3 \end{array}\right.$ y $K=2$

$3+(-9)+2^2\cdot 3 \stackrel{?}{=} 3\cdot 2 \Rightarrow 3-9+12 \stackrel{?}{=} 6 \Rightarrow -6+12 \stackrel{?}{=} 6$

$6=6$ OK

(3) Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1: x-3y+z=0$$
$$\pi_2: 2x-y+3z=5$$

- pasa por el punto $P(2,-1,5)$

Posición de los planos π_1 y π_2: $\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{3}$

π_1 y π_2 no son paralelos $\Rightarrow$ se cortan en una recta.

Para que la recta pedida sea paralela a π_1 y π_2 $\Rightarrow$ la recta pedida tendrá que ser paralela a la recta intersección de π_1 y π_2 $\Rightarrow$ Tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores normales a π_1 y π_2. Lo llamaremos $\vec{v}$

y $\vec{n}_1(1,-3,1)$ y $\vec{n}_2(2,-1,3)$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$
$$= (-9+1)\vec{i} - (3-2)\vec{j} + (-1+6)\vec{k} =$$
$$= -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow \vec{v}(-8,-1,5) \checkmark$$

Ec. recta determinada por $\left\{ \begin{array}{l} P(2,-1,5) \\ \vec{v}(-8,-1,5) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5} \quad \checkmark$$

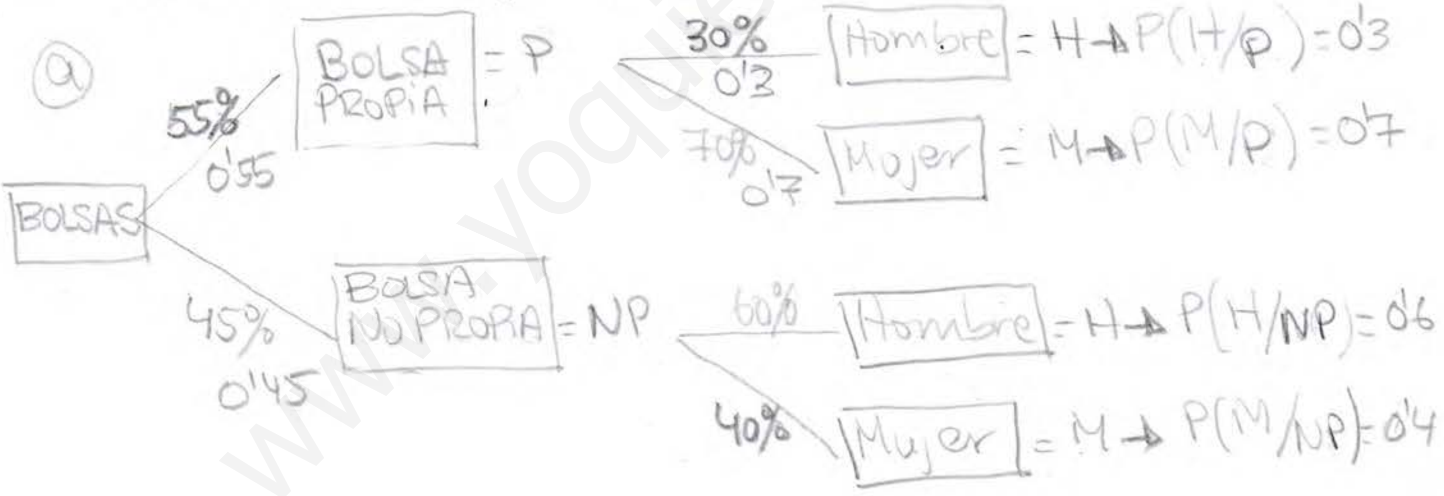
4 En un supermercado se sabe que el 55% de sus clientes se traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.

a) Construir el árbol de probabilidad descrito en el enunciado

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

c) Si un cliente elegido al azar es hombre ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

a)



b) $P(M) = P(P) \cdot P(M/P) + P(NP) \cdot P(M/NP) =$

T. PROBABILIDAD TOTAL

$= (0'55)(0'7) + (0'45) \cdot (0'4) = 0'565$,, EL 56'5% ✓

c) $P(P/H) = \dfrac{P(H/P) \cdot P(P)}{P(H)} = \dfrac{(0'3) \cdot (0'55)}{1 - P(M)} = \dfrac{0'3 \cdot 0'55}{1 - 0'565} =$

TEOREMA DE BAYES

✓

$= 0'379$,, Existe un 37'9% de que un hombre haya traído su bolsa.