1. **[1 punto]** Resuelve la siguiente inecuación de primer grado. Escribe la solución en forma de intervalo.

$$1-\frac{3x-7}{5}>\frac{5x+4}{15}-\frac{x-1}{3}$$

2. **[1 punto]** Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado. Escribe la solución en forma de intervalo.

$$\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}\geq\frac{x(11-x)}{6}$$

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Expresa la solución gráficamente y en forma de intervalo.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{6-x}{4}<x+1\\[2mm] 3-\dfrac{5x-1}{10}\geq\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x-3}{2}\end{cases}$$

4. **[5 puntos; 1 punto por apartado]** Dados el punto $A(3,-4)$, el vector $\vec{u}=(1,-1)$ y las rectas $r\equiv 2y=-x+2$ y $s\equiv\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=1-\lambda\end{cases}$ hallar:

   a) La pendiente de la recta r, su ordenada en el origen y el ángulo que forma con el eje X.
   b) De manera razonada, decidir la posición relativa de las rectas r y s. Si son secantes calcular el punto de corte.
   c) La ecuación explícita de la recta que tiene la dirección de $\vec{u}$ y pasa por el punto A.
   d) La ecuación general de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular a s.
   e) La ecuación punto-pendiente de la recta paralela a s que pasa por el punto A.

5. **[1,5 puntos]** Dado el triángulo de vértices $A(0,2)$, $B(4,-2)$ y $C(3,3)$, hallar la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ y el área del triángulo. ***Nota***: la altura es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Soluciones

1. **[1 punto]** Resuelve la siguiente inecuación de primer grado. Escribe la solución en forma de intervalo.

$$1-\frac{3x-7}{5}>\frac{5x+4}{15}-\frac{x-1}{3}\Rightarrow 15-3\left(3x-7\right)>5x+4-5\left(x-1\right)\Rightarrow 15-9x+21>5x+4-5x+5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x-5x+5x>4+5-15-21\Rightarrow -9x>-27\Rightarrow x<\frac{-27}{-9}\Rightarrow x<3$$. Solución: $x\in\left(-\infty,3\right)$.

2. **[1 punto]** Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado. Escribe la solución en forma de intervalo.

$$\frac{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}{4}-\frac{\left(x-3\right)^2}{3}\geq\frac{x\left(11-x\right)}{6}\Rightarrow\frac{x^2-4}{4}-\frac{x^2-6x+9}{3}\geq\frac{11x-x^2}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left(x^2-4\right)-4\left(x^2-6x+9\right)\geq 2\left(11x-x^2\right)\Rightarrow 3x^2-12-4x^2+24x-36\geq 22x-2x^2\Rightarrow x^2+2x-48\geq 0$$

Las raíces del polinomio de segundo grado son $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+192}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{196}}{2}=\dfrac{-2\pm 14}{2}=\begin{cases}x_1=6\\x_2=-8\end{cases}$

Entonces la inecuación es equivalente a $\left(x-6\right)\left(x+8\right)\geq 0$. Elaboremos una tabla para decidir la solución.

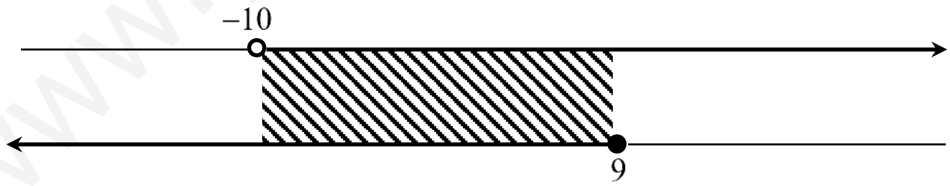
$\left(-\infty,-8\right)$	$\left(-8,6\right)$	$\left(6,+\infty\right)$
+	**−**	**+**

Por tanto, la solución es $x\in\left(-\infty,-8\right]\cup\left[6,+\infty\right)$.

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Expresa la solución gráficamente y en forma de intervalo.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{6-x}{4}<x+1\\3-\dfrac{5x-1}{10}\geq\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x-3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-\left(6-x\right)<4x+4\\30-\left(5x-1\right)\geq 2\left(x-1\right)-5\left(x-3\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-6+x<4x+4\\30-5x+1\geq 2x-2-5x+15\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+x-4x<4+6\\-5x-2x+5x\geq -2+15-30-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x<10\\-2x\geq -18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-10\\x\leq 9\end{cases}$$. La solución gráfica es la siguiente:



La solución en forma de intervalo es $x\in\left(-10,9\right]$.

4. **[5 puntos; 1 punto por apartado]** Dados el punto $A\left(3,-4\right)$, el vector $\vec{u}=\left(1,-1\right)$ y las rectas $r\equiv 2y=-x+2$ y $s\equiv\begin{cases}x=-2\lambda\\y=1-\lambda\end{cases}$ hallar:

a) La pendiente de la recta r, su ordenada en el origen y el ángulo que forma con el eje X.

$2y=-x+2\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$. Por tanto, la pendiente es $m=-\dfrac{1}{2}$ y la ordenada en el origen es $n=1$. Si α es el ángulo que la recta forma con el eje X, sabemos que $m=\operatorname{tg}\alpha$. Entonces:

$\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-26,57^{\circ}\Rightarrow\alpha=153,43^{\circ}$.

b) De manera razonada, decidir la posición relativa de las rectas r y s. Si son secantes calcular el punto de corte.

La ecuación general de r es $x+2y-2=0$ y la de s es $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow -x=-2y+2\Rightarrow x-2y+2=0$. Como $\frac{1}{1}\neq\frac{2}{-2}$, entonces las rectas son secantes. Hallemos el punto de corte resolviendo el sistema correspondiente: $\begin{cases}x+2y-2=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow 4y-4=0\Rightarrow 4y=4\Rightarrow y=1\Rightarrow x=0$. Por tanto, el punto de corte es el $(0,1)$.

c) La ecuación explícita de la recta que tiene la dirección de $\vec{u}$ y pasa por el punto A.

$\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-1}\Rightarrow -x+3=y+4\Rightarrow y=-x-1$.

d) La ecuación general de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular a s.

Un vector director de la recta s es $\vec{u}=(-2,-1)$. Entonces un vector perpendicular a s es $\vec{v}=(1,-2)$. Por tanto, la recta que se pide es la siguiente: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-2}\Rightarrow -2x+6=y+4\Rightarrow 2x+y-2=0$

e) La ecuación punto-pendiente de la recta paralela a s que pasa por el punto A.

Un vector director de s es $\vec{u}=(-2,-1)$ Por tanto, la pendiente de s es $m=\frac{-1}{-2}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$. Entonces la ecuación punto-pendiente de la recta paralela a s que pasa por A es: $y+4=\frac{1}{2}(x-3)$.

5. **[1,5 puntos]** Dado el triángulo de vértices $A(0,2)$, $B(4,-2)$ y $C(3,3)$, hallar la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ y el área del triángulo. ***Nota***: la altura es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

El lado $\overline{AB}$ tiene dirección $\overrightarrow{AB}=(4,-4)$. Un vector perpendicular al anterior es $\vec{v}=(4,4)$. La altura que corresponde al lado $\overline{AB}$ es perpendicular a este lado y pasa por el vértice opuesto $C(3,3)$. Su ecuación general es $\frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{4}\Rightarrow 4x-12=4y-12\Rightarrow 4x-4y=0\Rightarrow x-y=0$.

El área del triángulo es base por altura dividido entre dos. Si hallamos el punto D donde la altura corta al lado $\overline{AB}$ la fórmula del área la podremos escribir así: $\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|}{2}$

Hallemos pues la recta que contiene al lado $\overline{AB}$:

$\frac{x-0}{4}=\frac{y-2}{-4}\Rightarrow -4x=4y-8\Rightarrow 4x+4y-8=0\Rightarrow x+y-2=0$.

Ahora obtenemos el punto de corte de esta recta y la altura hallada anteriormente, al que hemos llamado D:

$\begin{cases}x+y-2=0\\x-y=0\end{cases}\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow D(1,1)$. Por tanto, $\overrightarrow{DC}=(3-1,3-1)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(2,2)$.

Como $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}$ y $\left|\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$, el área del triángulo es la siguiente:

$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{32}\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{256}}{2}=\frac{16}{2}=8\,\text{uds}^2$.