1. **[2 puntos]** Sea la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3a}{10} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2x+1}{7x+5} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

   a) Halla el valor de $a$ para que $f$ sea continua en $x=0$.
   b) Estudiar la continuidad de $f$ en $x=1$.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)$ ; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$ ; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}}{x-1}$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcular el dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas. Hacer una representación gráfica aproximada de la misma.

$$f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-2x-15}$$

4. **[1 punto]** Hallar, usando la definición, la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x-3x^2}{1-2x^2}$ en el punto $x=1$.

5. **[2 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

   a) $f(x)=\dfrac{5x^2+2x^3-10x+1}{5}$ ; b) $f(x)=\dfrac{x-3x^2}{1-2x^2}$ ; c) $f(x)=x^2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)$ ; d) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot x^2$

## Soluciones

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3a}{10} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2x+1}{7x+5} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+3a}{10}=\dfrac{3a}{10} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+1}{7x+5}=\dfrac{1}{5}=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow$ para que $f$ sea continua en $x=0$ debe de ocurrir que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow \frac{3a}{10}=\frac{1}{5}\Rightarrow a=\frac{10}{15}\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{7x+5}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

Como los límites laterales son iguales, entonces existe el límite: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{4}$. Además $f(1)=\dfrac{1}{4}$. Por tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\dfrac{1}{4}$, y $f$ es continua en $x=1$.

2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-12x^2+7x+1}{-8x^2-2x+1}=\dfrac{-12}{-8}=\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2(x+1)-3x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x+2}{x(x+1)}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=-\infty$

Pero es más fácil hacerlo así: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)=-\infty-3=-\infty$

c) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\left(x\sqrt{x}-1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}{x(x-1)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x(x-1)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x(x-1)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{3}{2}$

3. $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-15}$.

Las soluciones de $x^2-2x-15=0$ son $x=-3$ y $x=5$. Por tanto $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-3\,,\,5\}$.

$\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-15}=0\Rightarrow x^3-27=0\Rightarrow x^3=27\Rightarrow x=\sqrt[3]{27}=3$. Punto de corte con el eje $X$: $(3,\,0)$.

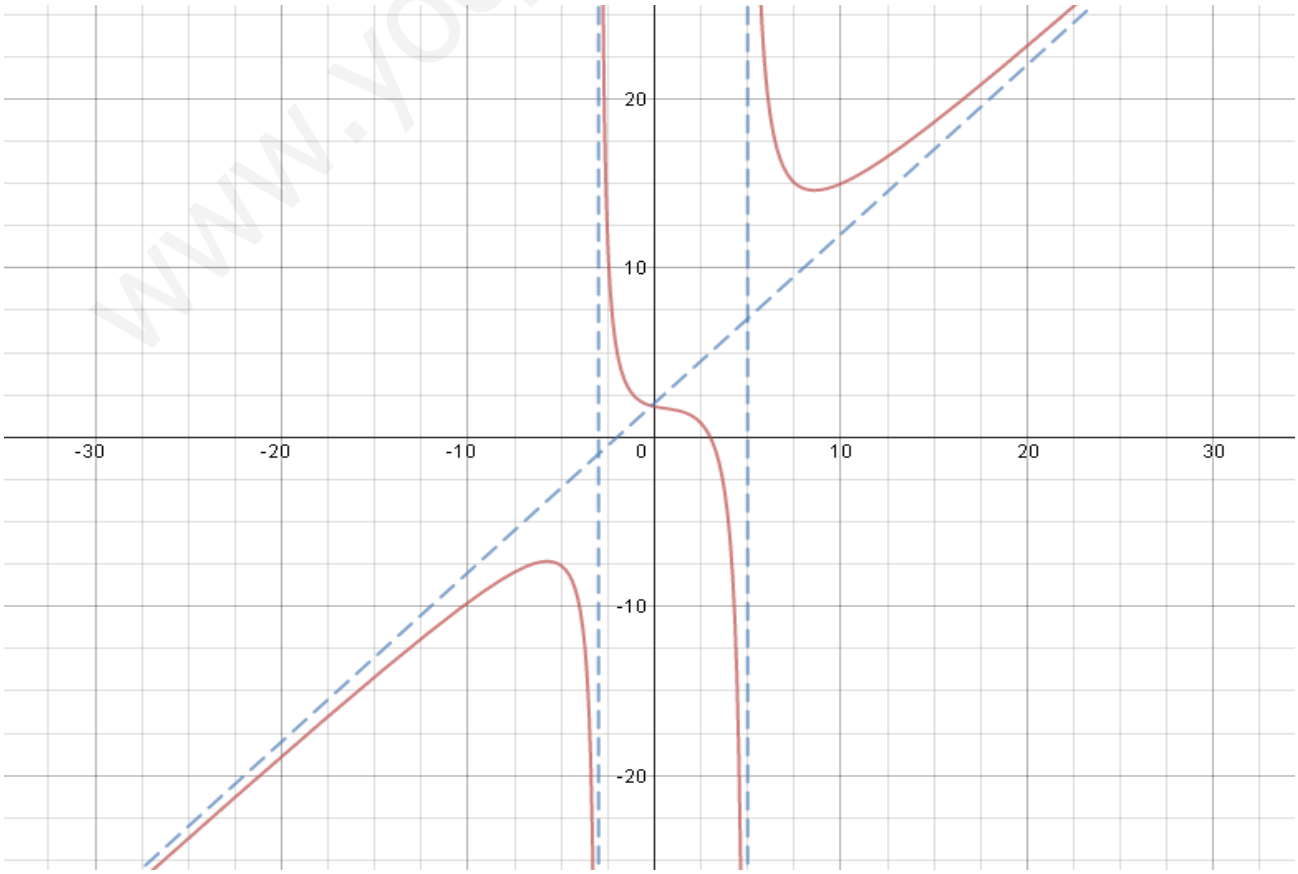
$\dfrac{0^3-27}{0^2-2\cdot 0-15}=\dfrac{-27}{-15}=\dfrac{9}{5}$. Punto de corte con el eje $Y$: $\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$.

$\lim_{x\to -3}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-15}=\left[\dfrac{-54}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to -3^-\\ +\infty & \text{si } x\to -3^+\end{cases}$ ; $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-15}=\dfrac{98}{0}=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 5^-\\ +\infty & \text{si } x\to 5^+\end{cases}$

De lo anterior se deduce que $x=-3$ y $x=5$ son asíntotas verticales.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-15}=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to +\infty\\ -\infty & \text{si } x\to -\infty\end{cases}\Rightarrow f$ no tiene asíntotas horizontales.

Al dividir $x^3-27$ entre $x^2-2x-15$ se obtiene de cociente $x+2$, lo que significa que $y=x+2$ es una asíntota oblicua.



4. $f(x)=\dfrac{x-3x^2}{1-2x^2}$ ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x-3x^2}{1-2x^2}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x-3x^2-2\left(1-2x^2\right)}{1-2x^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3x^2-2+4x^2}{(x-1)\left(1-2x^2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\left(1-2x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(1-2x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1-2x^2}=\dfrac{3}{-1}=-3$. Entonces $f'(1)=-3$.

5. Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

a) $f(x)=\dfrac{5x^2+2x^3-10x+1}{5}=\dfrac{1}{5}\left(5x^2+2x^3-10x+1\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{5}\left(10x+6x^2-10\right)=2x+\dfrac{6}{5}x^2-2$

Otra forma (más enrevesada, usando la regla de derivación de un cociente):

$$f'(x)=\frac{\left(10x+6x^2-10\right)\cdot 5-\left(5x^2+2x^3-10x+1\right)\cdot 0}{5^2}=\frac{50x+30x^2-50}{25}=2x+\frac{6}{5}x^2-2$$

b) $f(x)=\dfrac{x-3x^2}{1-2x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1-6x)\left(1-2x^2\right)-\left(x-3x^2\right)(-4x)}{\left(1-2x^2\right)^2}=$

$$=\frac{1-2x^2-6x+12x^3+4x^2-12x^3}{\left(1-2x^2\right)^2}=\frac{2x^2-6x+1}{\left(1-2x^2\right)^2}$$

c) $f(x)=x^2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)\Rightarrow f'(x)=2x\left(\sqrt{x}-1\right)+x^2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}-2x+\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}=$

$$=\frac{4x^2-4x\sqrt{x}+x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2\sqrt{x}-4x^2}{2x}=\frac{5x\sqrt{x}-4x}{2}$$

Otra forma, expresando previamente la función de otra manera equivalente:

$$f(x)=x^2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=x^2\sqrt{x}-x^2=x^2\cdot x^{1/2}-x^2=x^{5/2}-x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2}x^{3/2}-2x=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}-2x=\frac{5x\sqrt{x}}{2}-2x=\frac{5x\sqrt{x}-4x}{2}$$

d) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot x^2=\dfrac{2x^2}{x}-\dfrac{x^2}{x^3}=2x-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=2-\dfrac{-1}{x^2}=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$

Otra forma:

$$f(x)=\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\cdot x^2=\frac{2x^2-1}{x^3}\cdot x^2=\frac{\left(2x^2-1\right)x^2}{x^3}=\frac{2x^2-1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\cdot x-\left(2x^2-1\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{4x^2-2x^2+1}{x^2}=\frac{2x^2+1}{x^2}$$