

Universidad de Castilla La Mancha - Reserva.1- 2013

Opción A

Problemas

1.- Sea la onda definida por la ecuación $y = 7 \text{ sen} \left(\pi x + \frac{\pi t}{4} \right)$ en unidades del S.I., obtener:

- a) Tipo al que pertenece la onda, y la dirección y el sentido de propagación de la misma.
- b) Frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.
- c) ¿Cuál es la máxima aceleración que experimenta un punto del medio por el que se propaga?

Se trata de una onda armónica plana, es decir, tiene como origen la perturbación mediante el movimiento armónico simple generado por un oscilador armónico, se propagan en una sola dimensión, en un medio sin amortiguamiento y su frente de onda es plano. En este caso, su dirección de propagación es la del eje x y su sentido el negativo de dicho eje.

Si comparamos la ecuación dada con la función de onda de las ondas armónicas planas:

$$y(x, t) = A \text{ sen} (kx \pm \omega t) \quad k = \pi \text{ m}^{-1} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow \lambda = 2\text{m}$$

$$y = 7 \text{ sen} \left(\pi x + \frac{\pi t}{4} \right) \rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow f = 0.125 \text{ s}^{-1}$$

Por último, la velocidad de propagación:

$$v = \lambda \cdot f = 2 \cdot 0.125 \rightarrow v = 0.25 \text{ m/s}$$

La aceleración de vibración la calculamos a partir de la velocidad de vibración:

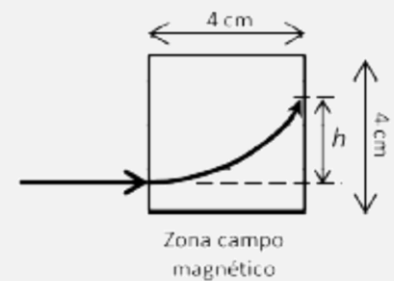
$$v(x, y) = \frac{dx}{dt} = \frac{7\pi}{4} \cos \left(\pi x + \frac{\pi t}{4} \right) \rightarrow a(x, y) = \frac{dv}{dt} = -\frac{7\pi^2}{16} \text{ sen} \left(\pi x + \frac{\pi t}{4} \right)$$

La aceleración máxima se conseguirá para valores de $\text{sen} \left(\pi x + \frac{\pi t}{4} \right) = -1$, es decir:

$$a_{\text{máx}} = -\frac{7\pi^2}{16} (-1) \rightarrow a_{\text{máx}} = 4.32 \text{ m/s}^2$$

2.- Un electrón que se mueve a través de un tubo de rayos catódicos a 10^7 m/s , penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 10^{-3} T que actúa sobre una región de $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ (zona cuadrada en la figura), siguiendo la trayectoria que se indica. Se pide:

- a) La energía cinética del electrón en electronvoltios.
- b) Explicar razonadamente si el campo magnético está dirigido hacia adentro o hacia afuera respecto al plano del papel y determinar el valor de la desviación h que sufre el electrón.
- c) La diferencia de potencial que habrá que establecer entre dos placas conductoras, planas y paralelas, para que el efecto del campo electrostático contrarreste los efectos del campo magnético sobre el electrón y este atraviese la zona cuadrada sin desviarse. Indicar cómo deben situarse las placas y la polaridad (signo) de cada una.



Carga y masa del electrón: $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

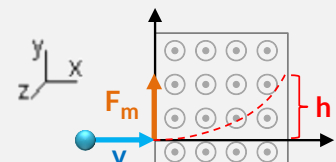
La energía cinética en eV será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 9.11 \cdot 10^{-31} (10^7)^2 = 4.55 \cdot 10^{-17} \text{ Jul} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Jul}} \rightarrow E_c = 284.69 \text{ eV}$$

La fuerza magnética a la que se ve sometida una partícula cargada cuando pasa por una región donde existe un campo magnético sigue la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Según la regla de la mano derecha, y tal como se ve en la figura. Para que el electrón (carga negativa) pueda describir una trayectoria circular en el sentido antihorario, el campo magnético tiene que estar dirigido hacia fuera del papel. De forma analítica:





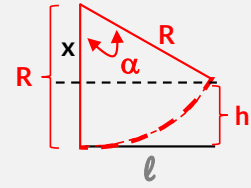
$$\vec{F}_m = -q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -q(0, -1, 0) \rightarrow \vec{F}_m = q(\vec{j}) \text{ N}$$

Según vemos en la figura, la desviación h es igual a:

$$h = R - x$$

Si nos fijamos:

$$\cos \alpha = \frac{x}{R} \rightarrow x = R \cos \alpha$$



Por tanto:

$$h = R - R \cos \alpha \rightarrow h = R(1 - \cos \alpha)$$

Primero calculamos el radio de la trayectoria sabiendo que el electrón describe un MCU donde la fuerza magnética actúa como fuerza central:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_c| \rightarrow q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} \rightarrow R = 0.056 \text{ m} = 5.69 \text{ cm}$$

El ángulo lo calculamos por simple trigonometría:

$$\alpha = \text{arc. sen} \left(\frac{\ell}{R} \right) = \text{arc. sen} \left(\frac{0.04}{0.056} \right) \rightarrow \alpha = 45.58^\circ$$

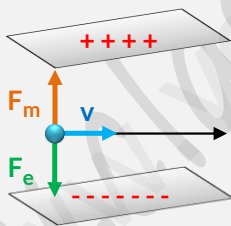
Por tanto, la desviación será igual a:

$$h = R(1 - \cos \alpha) = 0.056(1 - \cos 45.58) \rightarrow h = 0.016 \text{ m} = 1.68 \text{ cm}$$

Para que el electrón no se desvíe, el campo eléctrico superpuesto tiene que hacer una fuerza igual y de sentido contrario a la del campo magnético:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_e| = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} \rightarrow |\vec{F}_e| = 1.6 \cdot 10^{-15} \text{ N}$$

Esto se consigue con un condensador que tenga, como se ve en la figura, la lámina positiva arriba y la negativa abajo. El valor del campo eléctrico en el interior del condensador será:



$$E = \frac{|\vec{F}_e|}{q} = \frac{1.6 \cdot 10^{-15}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \rightarrow E = 10^4 \text{ N/C}$$

Y la diferencia de potencial entre las placas será:

$$\Delta V = E \cdot d \rightarrow \Delta V = 10^4 \cdot d \text{ V}$$

Es decir, 10^4 voltios por cada metro de separación entre placas.

Cuestiones

3. Dos planetas de la misma masa tienen radios R y $4R$, respectivamente. ¿Cuál de los dos tiene mayor velocidad de escape desde su superficie? ¿Cuántas veces mayor comparada con la velocidad de escape del otro planeta?

La velocidad de escape es la velocidad mínima con la que debe lanzarse un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria del planeta, alejándose indefinidamente de manera que su velocidad final tienda a cero cuando la distancia tienda a infinito. Es decir, es la velocidad necesaria para que la energía cinética del objeto situado en la superficie del planeta sea igual a la energía potencial del sistema (planeta + objeto), siendo la energía mecánica total igual a cero.



$$E = U + K = 0 \rightarrow -G \cdot \frac{M \cdot m}{R} = \frac{1}{2} m v_e^2 \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

Por tanto, si las masas son iguales y $R_1 = R$ y $R_2 = 4R$:

$$\begin{cases} v_{e.1} = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} \\ v_{e.2} = \sqrt{\frac{2 G M}{4R}} \end{cases} \rightarrow \frac{v_{e.1}}{v_{e.2}} = \frac{\sqrt{\frac{2 G M}{R}}}{\sqrt{\frac{2 G M}{4R}}} \rightarrow \frac{v_{e.1}}{v_{e.2}} = \sqrt{4} \rightarrow v_{e.1} = 2v_{e.2}$$

Es decir, el planeta de radio menor tiene un valor de la velocidad de escape el doble que el planeta de radio mayor.

4.- El isótopo radio-226 tiene un periodo de semidesintegración $T = 1580$ años. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que una muestra de 100 miligramos de dicho material quede reducida a 1 miligramo?

Primero tenemos que calcular la constante de desintegración:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1580} \rightarrow \lambda = 4.38 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Ahora, según la ley de decaimiento radiactivo:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) = -\lambda \cdot t \rightarrow \ln \left(\frac{1}{100} \right) = -4.38 \cdot 10^{-4} \cdot t \rightarrow t = 10497.3 \text{ años}$$

5.- ¿Qué es la dualidad onda-corpúsculo? Citar y resumir brevemente algún experimento en que se ponga de manifiesto el comportamiento ondulatorio de una partícula.

La dualidad onda-corpúsculo se basa en que un conjunto de partículas, como un chorro de electrones moviéndose a una determinada velocidad puede comportarse como una onda (se puede reflejar, refractar y difractar). Por otro lado, un rayo de luz puede, en determinadas circunstancias, comportarse como un chorro de partículas (llamadas fotones) con una cantidad de movimiento bien definida.

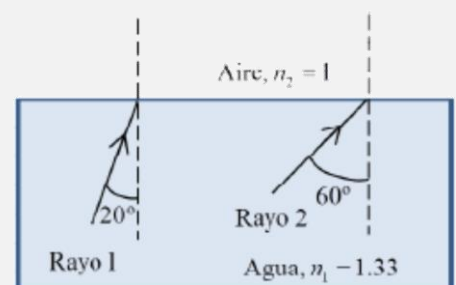
Según la hipótesis de De Broglie, cada partícula en movimiento lleva asociada una onda, de manera que la dualidad onda-partícula puede enunciarse: una partícula de masa m que se mueva a una velocidad v puede, en condiciones experimentales adecuadas, presentarse y comportarse como una onda de longitud de onda

$$p = m v = \frac{h}{\lambda}$$

Los electrones se comportan como una partícula cuando consideramos su movimiento en el seno de un campo magnético, por ejemplo, pero si hacemos incidir un haz de electrones sobre un cristal los espacios existentes entre los iones hacen las veces de minúsculas rendijas de tamaño comparable a la longitud de onda de los electrones y obtenemos un diagrama de difracción análogo al que se obtenía al difractar la luz mediante una rendija estrecha. Esta experiencia, propuesta por el propio de Broglie como posible comprobación de su teoría, fue realizada por Davisson y Germer en 1927.

Cuestión Experimental

6.- Dos rayos de luz, indicados como 1 y 2 en la figura, inciden en la superficie en calma del agua de una piscina procedentes del fondo. Teniendo en cuenta los datos numéricos indicados en la figura, hacer un esquema del camino que seguirá cada uno de dichos rayos después de alcanzar la superficie del agua ¿Sufre alguno de estos rayos el fenómeno de reflexión total?



La reflexión sigue la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \sin \hat{i} = n_2 \cdot \sin \hat{r}$$



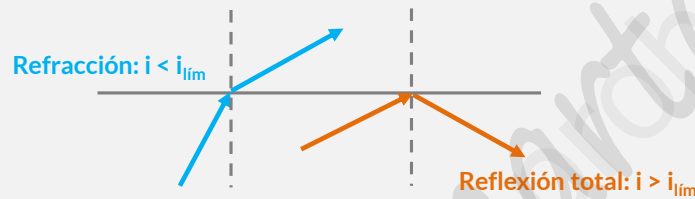
Según los datos de la figura, para cada uno de los rayos tenemos:

$$\hat{r} = \text{arc. sen} \left(\frac{n_1}{n_2} \text{sen } \hat{i} \right) \rightarrow \begin{cases} \hat{r}_1 = \text{arc. sen} \left(\frac{1.33}{1} \text{sen } 20^\circ \right) \rightarrow \hat{r}_1 = 27.05^\circ \\ \hat{r}_2 = \text{arc. sen} \left(\frac{1.33}{1} \text{sen } 60^\circ \right) \rightarrow \hat{r}_2 = \text{arc. sen} (1.15) \rightarrow \nexists \end{cases}$$

La reflexión total, ocurre cuando la luz pasa de un medio ópticamente más denso (mayor índice de refracción $n_1 = 1.33$) a otro medio ópticamente menos denso (menor índice de refracción $n_2 = 1$). El rayo de luz incidente, se refracta de tal modo que no es capaz de atravesar la superficie entre ambos medios reflejándose completamente y quedando confinado totalmente el haz luminoso en el medio ópticamente más denso por cuyo interior se propaga. La condición necesaria para que se de este fenómeno es que el ángulo de incidencia sea mayor o igual al ángulo de incidencia crítica o ángulo límite. Cuando el ángulo del rayo incidente es el ángulo límite, el ángulo de salida del rayo reflejado es de 90° . Para todos los ángulos de incidencia mayores, la luz deja de atravesar la superficie entre ambos medios y es reflejada internamente de manera total. Es lo que ocurre con el rayo 2.

Si calculamos el ángulo límite:

$$\theta_L = \text{arc. sen} \left(\frac{n_2}{n_1} \text{sen } \hat{r} \right) = \text{arc. sen} \left(\frac{1}{1.33} \text{sen } 90^\circ \right) \rightarrow \theta_L = 48.75^\circ$$



Opción B

Problemas

1.- Un satélite de 500 kg describe una órbita circular a 350 km por encima de la superficie de la Tierra.

- Calcular su velocidad y el periodo de revolución.
- Determinar la energía necesaria para colocar el satélite en esa órbita.
- ¿Qué velocidad tendría en el momento de chocar contra el suelo un objeto en caída libre que estuviese inicialmente a la misma altura que el satélite? (Se desprecian las fuerzas de rozamiento en el seno de la atmósfera).

Datos: Masa de la Tierra: $5.98 \cdot 10^{24}$ kg. Radio de la Tierra: 6370 km. Constante gravitación $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²

La velocidad orbital la calculamos sabiendo que el satélite describe una órbita circular donde la fuerza gravitatoria actúa como fuerza central, es decir:

$$|\vec{F}_g| = |\vec{F}_c| \rightarrow G \frac{m M}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 350) \cdot 10^6}} \rightarrow v = 7704.22 \text{ m/s}$$

El periodo de revolución lo hallamos a partir de la velocidad angular y esta a su vez, de la velocidad lineal:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{7704.22}{(6370 + 350) \cdot 10^6} \rightarrow \omega = 1.14 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.14 \cdot 10^{-3}} \rightarrow T = 5480.5 \text{ s} = 1 \text{ h } 31' 20''$$

Para calcular la energía necesaria para colocar al satélite en esta órbita, aplicamos la ley de la conservación de la energía entre la superficie de la Tierra y la órbita del satélite, tenemos que el trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica del satélite:

$$W_{\text{Realizado}} = \Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_P = E_{\text{órbita}} - E_{\text{superficie}}$$

La energía asociada al satélite en órbita es:

$$E_{\text{órbita}} = E_{C,\text{órbita}} + E_{P,\text{órbita}} = \frac{1}{2} m v_{\text{orbital}}^2 + \left(-G \frac{m \cdot M}{R_{\text{órbita}}} \right) = \frac{1}{2} 500 7704.22^2 - 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500 \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 350) \cdot 10^6}$$

$$\rightarrow E_{\text{órbita}} = -1.48 \cdot 10^{10} \text{ Jul}$$



Si se considera que el satélite se lanza siguiendo la vertical, sin aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra, la velocidad inicial en la superficie de la Tierra es igual a cero y la energía asociada a la posición del satélite sobre la superficie de la Tierra es solamente potencial:

$$E_{\text{superficie}} = E_{C.\text{superficie}} + E_{P.\text{superficie}} = 0 + \left(-G \frac{m \cdot M}{R_{\text{órbita}}}\right) = -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{500 \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^6} \rightarrow E_{\text{superficie}}$$

$$= -3.13 \cdot 10^{-10} \text{ Jul}$$

Por tanto, la energía necesaria para poner el satélite en órbita será:

$$W_{\text{Realizado}} = E_{\text{órbita}} - E_{\text{superficie}} = -1.48 \cdot 10^{-10} - (-3.13 \cdot 10^{-10}) \rightarrow W_{\text{realizado}} = 3.13 \cdot 10^{10} \text{ Jul}$$

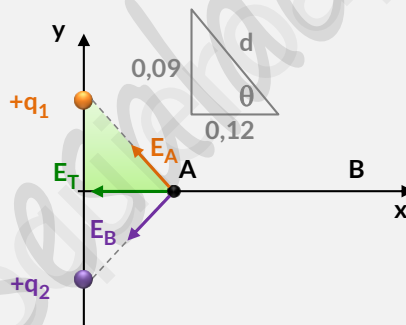
Es positivo, puesto que es un trabajo que hay que suministrar al satélite.

2.- Dos cargas eléctricas positivas e iguales ($q = 92,25 \cdot 10^{-7} \text{ C}$) están fijas en sus posiciones y separadas 18 cm (véase figura). Se pide:

- El campo eléctrico en el punto A de la figura (indicar con un esquema su dirección y sentido).
- El potencial eléctrico en los puntos A y B.
- El trabajo necesario para llevar una carga de $+5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ desde el punto B hasta el punto A. Interpretar el signo de este trabajo.

Constante de la ley de Coulomb: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$

El campo eléctrico en un punto es una magnitud vectorial resultado de la suma de los campos eléctricos producidos por cada carga en dicho punto. Según se aprecia en la figura, el campo eléctrico en el punto A sólo tendrá componente horizontal, ya que por simetría, las componentes verticales se anulan. Además, tendrá la dirección del eje x en su sentido negativo:



La distancia de las dos cargas al punto A es la misma, ya que ambas se encuentran situadas simétricamente respecto al eje x. Lo mismo ocurre con el ángulo:

$$d = \sqrt{0.12^2 + 0.09^2} \rightarrow d = 0.15 \text{ m}$$

$$\theta = \text{arc.tg} \left(\frac{0.09}{0.12} \right) \rightarrow \theta = 36.86^\circ$$

Por tanto:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{q1} + \vec{E}_{q2} = 2 |\vec{E}_q| \text{sen } \theta (-\vec{i}) = 2 \cdot k \frac{|q|}{d^2} \cdot \text{sen } \theta (-\vec{i}) = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{92.25 \cdot 10^{-7}}{0.12^2} \cdot \text{sen } 36.86^\circ (-\vec{i}) \rightarrow \vec{E}_A$$

$$= 6.91 \cdot 10^6 (-\vec{i}) \text{ N/C}$$

El potencial eléctrico en un punto es una magnitud escalar suma de los potenciales debidos a cada carga en dicho punto, por tanto:

$$V_A = V_1 + V_2 = 2k \frac{q}{d} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{92.25 \cdot 10^{-7}}{0.12} \rightarrow V_A = 1383750 \text{ V}$$

$$V_B = V_1 + V_2 = 2k \frac{q}{d} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{92.25 \cdot 10^{-7}}{0.12 + 0.28} \rightarrow V_B = 415125 \text{ V}$$

El trabajo necesario para llevar una carga de $+5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ desde el punto B hasta el punto A, será igual a:

$$W = -q \Delta V = -q (V_A - V_B) = -5 \cdot 10^{-9} (1383750 - 415125) \rightarrow W = -4.84 \cdot 10^{15} \text{ Jul}$$

El signo negativo significa que lo realiza una fuerza externa al campo eléctrico.



Cuestiones

3.- La sirena de un barco es percibida por un receptor con un nivel de intensidad de 55 dB. Si dos sirenas idénticas sonasen al mismo tiempo, ¿cuál sería el nivel de intensidad?

Si suenan dos sirenas idénticas significa que la intensidad se duplica:

$$I' = 2 \cdot I$$

Para una sola fuente:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow \beta = 10(\log I - \log I_0)$$

Para las dos fuentes:

$$\beta' = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{2I}{I_0} \rightarrow \beta' = 10(\log 2I - \log I_0) \rightarrow \beta' = 10(\log 2 + \log I - \log I_0)$$

Como puede observarse, el nuevo nivel de intensidad:

$$\beta' = 10(\log I - \log I_0) + 10(\log 2) \rightarrow \beta' = \beta + 10 \log 2 = 55 + 10 \log 2 \rightarrow \beta' = 58.01$$

4.- Dos hilos conductores rectilíneos y paralelos transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Explicar razonadamente si estos conductores tienden a atraerse o a repelerse entre sí.

Las líneas del campo magnético que son creadas por una corriente rectilínea forman circunferencias concéntricas en el plano perpendicular al conductor. La dirección del campo magnético es tangente en cada punto a dichas líneas, y su sentido es el que determina la regla de la mano derecha (pulgar en dirección de la intensidad).



La fuerza ejercida entre los dos conductores es perpendicular al campo y a los conductores. En este caso, como las dos corrientes tienen sentido opuesto, la fuerza es **repulsiva**:

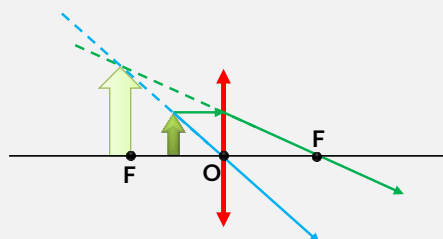
$$\vec{F}_1 = \ell \cdot (\vec{I} \times \vec{B}_2) \rightarrow \frac{\vec{F}_1}{\ell} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\vec{F}_1}{\ell} = +\vec{i} \text{ N/m}$$

$$\vec{F}_2 = \ell \cdot (\vec{I} \times \vec{B}_1) \rightarrow \frac{\vec{F}_2}{\ell} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\vec{F}_2}{\ell} = -\vec{i} \text{ N/m}$$

Es decir, estas fuerzas son opuestas (signos contrarios).

5.- Se observa un objeto a través de una lente convergente, colocándolo en un punto situado entre el foco y la lente. Explicar usando un diagrama de rayos si la imagen formada es real o virtual.

Si el objeto está situado entre el foco y la lente, la imagen estará entre el foco y el infinito y será virtual (la forman las prolongaciones de los rayos), mayor y derecha. Es lo que se conoce como una lupa.





Cuestión Experimental

6.- Un astronauta que ha viajado a otro planeta utiliza sus conocimientos sobre el péndulo simple para determinar la aceleración de la gravedad: toma cuatro péndulos de las longitudes L indicadas en la tabla y mide el tiempo t que cada uno de ellos invierte en completar cinco oscilaciones. Explicar qué tratamiento de datos hay que hacer y calcular la aceleración de la gravedad en ese lugar.

L (cm)	t (s)
105	10.85
145	12.75
180	14.21
210	15.35

El periodo, la longitud y la aceleración de la gravedad, para un péndulo simple, están relacionadas según:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

El periodo de oscilación lo calculamos dividiendo el tiempo que invierte cada péndulo en completar las 5 oscilaciones. Por último, la aceleración de la gravedad será la media aritmética de las aceleraciones calculadas para cada péndulo:

L (m)	t(s)	$T = \frac{t}{5}$	$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$
1.05	10.85	2.17	8.803
1.45	12.75	2.55	8.803
1.80	14.21	2.842	8.798
2.10	15.35	3.07	8.796

$$g = \frac{8.803 + 8.803 + 8.798 + 8.796}{4} \rightarrow g = 8.8 \text{ m/s}^2$$