Universidad de Castilla La Mancha – Junio – 2015

Opción A

Problema 1.- La Agencia Espacial Europea lanzó el pasado 27 de Marzo dos satélites del Sistema de Navegación Galileo. Dichos satélites de masa 1,5 toneladas cada uno, orbitan ya a 22322 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

a) El valor de la velocidad orbital y el período de cada satélite.
b) La energía que posee cada satélite en su órbita.
c) La variación de energía potencial que experimentaron al elevarlos desde la superficie de la Tierra hasta situarlos en dicha órbita.

Datos: 1 tonelada = 1000 kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_{TIERRA} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{TIERRA} = 6370$ km

Para que los satélites no se salgan de su órbita: $\left|\vec{F_g}\right| = \left|\vec{F_c}\right|$

$$G\,\frac{m \cdot M}{R^2} = m\,\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 22322) \cdot 10^3}} \rightarrow \mathbf{v = 3728.5\ {}^{m}/_{s}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(6370 + 22322) \cdot 10^3}{3728.5} \rightarrow \mathbf{T = 48351.2\ s = 13.43\ h}$$

La energía mecánica es negativa al ser un sistema ligado:

$$E = -\,G\,\frac{m \cdot M}{2\,R} = -\,6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{1500 \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{2\,(6370 + 22322) \cdot 10^3} \rightarrow \mathbf{E = -1.04 \cdot 10^{10}\ Jul}$$

Para cada satélite, el incremento de energía potencial es la diferencia entre la energía potencial en la órbita y la energía potencial en la superficie:

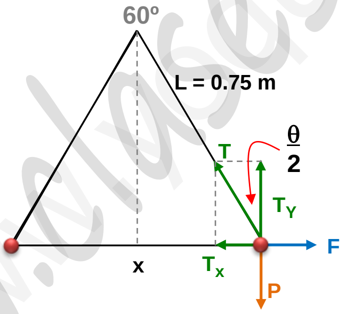
$$E_{P.\ Superficie} = -\,G\,\frac{m \cdot M}{R} = -\,6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{1500 \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3} \rightarrow \mathbf{E_{P.\ Superficie} = -9.39 \cdot 10^{10}\ Jul}$$

$$E_{P.\ Órbita} = -\,G\,\frac{m \cdot M}{R} = -\,6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{1500 \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 22322) \cdot 10^3} \rightarrow \mathbf{E_{P.\ Órbita} = -2.09 \cdot 10^{10}\ Jul}$$

$$\Delta E_P = E_{P.\ Órbita} - E_{P.\ Superficie} \rightarrow \mathbf{\Delta E_P = 7.31 \cdot 10^{10}\ Jul}$$

Problema 2.- Dos pequeñas esferas de 5 g de masa cada una y la misma carga q, se cuelgan suspendidas del mismo punto mediante hilos iguales de masa despreciable e igual longitud L = 75 cm. Calcula cuál debe ser el valor de la carga para que los hilos formen entre sí 60º al alcanzar el equilibrio. ¿Cuál es entonces el valor de la fuerza de repulsión entre las bolitas y la tensión de cada hilo?

Dato: $k = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$; $g = 9{,}8\ m/s^2$



Para que el sistema esté en equilibrio el sumatorio de las fuerzas horizontales y verticales debe ser nulo, para cada esfera. Al ser la figura simétrica, la tensión en ambos hilos es la misma:

Componentes verticales:

$$P = T_y \rightarrow m\,g = T\cos\frac{\theta}{2} \rightarrow T = \frac{m\,g}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}{\cos 30} \rightarrow \mathbf{T = 5.66 \cdot 10^{-2}\ N}$$

Componentes horizontales:

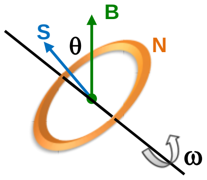
$$F = T_x \rightarrow F = T\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} \rightarrow F = 5.66 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{sen}\,30 \rightarrow \mathbf{F = 2.83 \cdot 10^{-2}\ N}$$

Esta fuerza de repulsión sigue la ley de Coulomb:

$$F = k \cdot \frac{q\,q'}{r^2} = k \cdot \frac{q^2}{x^2} \rightarrow q = x\sqrt{\frac{F}{k}} = 2\,L\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{F}{k}} = 2 \cdot 0.75 \cdot \mathrm{sen}\,30\,\sqrt{\frac{2.83 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9}} \rightarrow \mathbf{q = 1.33 \cdot 10^{-6}\ C}$$

La carga puede ser positiva o negativa, siempre y cuando ambas esferas tenga la carga del mismo signo, al ser la fuerza de repulsión.

Cuestión 1.- Una bobina de 300 espiras circulares de 2 cm de radio gira en un campo magnético uniforme de 0,5 T. ¿Cuál debería ser su frecuencia para inducir una fuerza electromotriz máxima de 12 V?



El flujo magnético a través de la bobina es:

$$\phi_m = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Si giramos la espira con una velocidad angular:

$$\theta = \omega \cdot t \rightarrow \phi_m = N\ B\ S\ \cos(\omega\, t)$$

La *fem* inducida al variar la orientación de la espira en un campo magnético uniforme es:

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\phi_m\phi}{dt} = -\frac{N\ B\ S\ \cos(\omega\ t)}{dt} \rightarrow \varepsilon_{inducida} = N\ B\ S\ \omega \cdot \text{sen}\ (\omega\ t)$$

Será máxima cuando el sen = 1:

$$\varepsilon_{máx} = N\ B\ S\ \omega \rightarrow \omega = \frac{\varepsilon_{máx}}{N\ B\ S}$$

La relación entre la velocidad angular y la frecuencia es:

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon_{máx}}{N\ B\ S} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{12}{300 \cdot 0.5 \cdot \pi\ 0.02^2} \rightarrow \mathbf{f = 10.13\ Hz}\sqrt{2\ m \cdot E_C}$$

Cuestión 2.- Una conocida marca de electrodomésticos, lanza al mercado una nueva lavadora a la que caracterizan como "silenciosa" argumentando que el nivel de intensidad emitido por la misma es de 49dB ¿Cuál será la intensidad de ese sonido en W/m^2? Compara la misma con el sonido de llamada de un teléfono cuyo timbre es de 70dB.
Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Siendo el nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 49 = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 4.9 = \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 10^{4.9} = \frac{I}{I_0} \rightarrow I = 10^{4.9} \cdot I_0 = 10^{4.9} \cdot 10^{-12} \rightarrow \mathbf{I_{lavadora} = 7.9 \cdot 10^{-8}\ W/_{m^2}}$$

En el caso del teléfono:

$$70 = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 10^7 = \frac{I}{I_0} \rightarrow I = 10^7 \cdot I_0 = 10^7 \cdot 10^{-12} \rightarrow \mathbf{I_{teléfono} = 10^{-5}\ W/_{m^2}} \rightarrow \frac{I_{teléfono}}{I_{lavadora}} = \frac{7.9 \cdot 10^{-8}}{10^{-5}} = \mathbf{126}$$

Es decir, la intensidad sonora del teléfono es aproximadamente 100 veces mayor que la de la lavadora.

Cuestión 3.- Se sabe que la frecuencia umbral del potasio es $4{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz. Calcula la velocidad máxima con que los electrones de dicho metal son emitidos, al hacer incidir sobre la placa un haz de frecuencia $6 \cdot 10^{14}$ Hz
Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s; $m_{electrón} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

Según Einstein, la energía de la radiación incidente es igual a la suma del trabajo de extracción y de la energía cinética adquirida por los electrones emitidos:

$$E = W_{extracción} + E_c \rightarrow h\,f = h\,f_0 + \frac{1}{2}\,m\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2h\,(f - f_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34}\,(6 \cdot 10^{14} - 4.5 \cdot 10^{14})}{9.1 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow \mathbf{v = 4.68 \cdot 10^5\ m/_s}$$

Cuestión Experimental.- Se estudia la refracción en el laboratorio, haciendo incidir un rayo de luz desde el aire sobre una superficie de vidrio. Anotamos en una tabla los ángulos de incidencia y de refracción que vamos obteniendo. Calcula el índice de refracción del vidrio. ¿En qué ley física nos basamos para hacerlo?
En el laboratorio de física se dispone de un muelle suspendido de un soporte del que se cuelgan las distintas masas indicadas en

$\hat{\imath}$	$\hat{r}$
20º	12º
30º	18º
40º	23º
50º	29º

Según la ley de Snell, la relación entre los ángulos de incidencia y refracción, cuando la luz pasa de un medio a otro, es:

$$n_i\ \text{sen}\ \hat{\imath} = n_r\ \text{sen}\ \hat{r}$$

En este caso, la luz pasa del aire (n_i = 1) al vidrio:

$$n_r = n_i \frac{\text{sen}\ \hat{\imath}}{\text{sen}\ \hat{r}}$$

i	r	sen i	sen r	$n_{vidrio} = \frac{\text{sen i}}{\text{sen r}}$
20	12	0.3420	0.2079	1.65
30	18	0.5	0.3090	1.62
40	23	0.6428	0.3907	1.65
50	29	0.7660	0.4848	1.58

$$n = \frac{1.65 + 1.62 + 1.65 + 1.58}{4} \rightarrow \mathbf{n = 1.62}$$

Opción B

Problema 1.- Una onda armónica transversal de amplitud 4 cm y longitud de onda 2 cm se propaga a través de un medio elástico a 25 cm/s en el sentido negativo del eje X. La elongación del punto x = 0 en t = 0 es 4 cm.

a) Calcular el periodo y escribir la ecuación de esta onda.
b) ¿Cuál es la máxima velocidad de vibración que alcanza un punto cualquiera del medio elástico en que se propaga la onda?
c) Calcular el desfase entre dos puntos separados 0.5 cm.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \rightarrow \mathbf{T = 0.08\ s}$$

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t \pm kx + \delta_0) \rightarrow \begin{cases} A = 0.04\ m \\ \lambda = 0.02\ m \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \mathbf{k = 100\pi\ m^{-1}} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \mathbf{\omega = 25\pi\ rad/s} \\ \text{Sentido (-) del eje x: } + \end{cases} \rightarrow y(x,t) = 0.04 \cdot \text{sen}\,(25\pi t + 100\pi x + \delta_0)$$

$$\rightarrow 0.04 = 0.04 \cdot \text{sen}\,(\delta_0) \rightarrow \text{sen}\,(\delta_0) = 1 \rightarrow \mathbf{\delta_0 = \frac{\pi}{2}\ rad} \rightarrow \mathbf{y(x,t) = 0.04 \cdot sen\left(25\pi t + 100\pi x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

La velocidad de vibración es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \rightarrow v = A\omega \cdot \cos\,(\omega t + kx + \delta_0)$$

La velocidad será máxima cuando el coseno sea igual a +1:

$$v_{máx} = A\omega = 0.04 \cdot 25\pi \rightarrow \mathbf{v_{máx} = \pi\ m/s}$$

El desfase entre dos puntos separados 0.005 m:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \left|\left(25\pi t_1 + 100\pi x_1 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(25\pi t_2 + 100\pi x_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right| \rightarrow \mathbf{t_1 = t_2} \rightarrow \Delta\delta = 100\pi\,|x_1 - x_2| = 100\pi \cdot 0.005 \rightarrow \mathbf{\Delta\delta = 0.5\pi\ rad}$$

Problema 2.- Un protón es acelerado con una diferencia de potencial de 10^4 V y seguidamente se introduce en el interior de un campo magnético de 5 T donde describe una trayectoria circular en sentido horario.

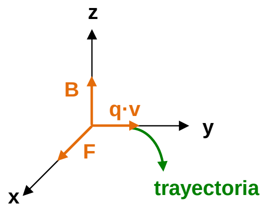
a) Calcular la velocidad del protón a la entrada del campo magnético.
b) Determinar la dirección de la inducción magnética y el valor del radio de la trayectoria.
c) Si hubiéramos introducido un electrón en el mismo acelerador y con las mismas condiciones, ¿qué radio tendría su órbita?

Datos: $m_{protón} = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_{electrón} = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg; $|q_{electrón}| = |q_{protón}| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

La velocidad que lleva el protón cuando se introduce en el campo magnético es (espectrógrafo de masas: la energía adquirida por la ddp se convierte en energía cinética):

$$v = \sqrt{\frac{2\,Q\,\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{1.673 \cdot 10^{-27}}} \rightarrow \mathbf{v = 1.38 \cdot 10^6\ m/s}$$

Si el protón describe una trayectoria circular cuando es introducido en el campo magnético, significa que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. Por otro lado, al ser un protón la carga es positiva, por lo que la fuerza magnética tendrá el mismo sentido del producto vectorial $q\vec{v} \times \vec{B}$.



$$r = \frac{m\,v}{Q\,B} = \frac{1.673 \cdot 10^{-27} \cdot 1.38 \cdot 10^6}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \rightarrow \mathbf{r = 2.88 \cdot 10^{-3}\ m}$$

Si fuese un electrón:

$$v = \sqrt{\frac{2\,Q\,\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{9.1 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow \mathbf{v = 5.92 \cdot 10^7\ m/s} \rightarrow r = \frac{m\,v}{Q\,B} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 5.92 \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \rightarrow \mathbf{r = 6.74 \cdot 10^{-5}\ m}$$

Además, el giro sería antihorario al ser la carga negativa.

Cuestión 1.- Si la masa de un satélite es 100 veces menor que la masa del planeta alrededor del cual orbita, y el radio del satélite es 4 veces más pequeño; ¿qué relación guardan las velocidades de escape de un objeto desde ambas superficies?

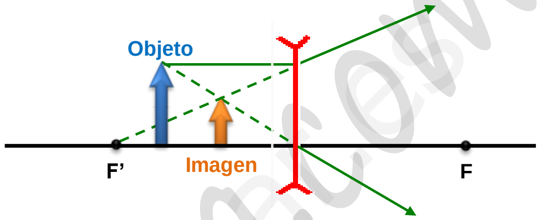
Siendo la velocidad de escape:

$$v=\sqrt{\frac{2\,G\,m}{R}} \rightarrow \begin{cases} v_P=\sqrt{\dfrac{2\,G\,m_P}{R_P}} \\ v_S=\sqrt{\dfrac{2\,G\,m_S}{R_S}} \end{cases} \rightarrow \frac{v_P}{v_S}=\frac{\sqrt{\dfrac{2\,G\,m_P}{R_P}}}{\sqrt{\dfrac{2\,G\,m_S}{R_S}}} \rightarrow \frac{v_P}{v_S}=\sqrt{\frac{m_P\,R_S}{m_S\,R_P}}=\sqrt{100\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{25} \rightarrow \frac{v_P}{v_S}=5$$

Es decir, la velocidad de escape desde la superficie del planeta es 5 veces mayor la desde la superficie del planeta.

Cuestión 2.- Se examina un pequeño objeto a través de una lente divergente. El objeto está colocado entre la lente y el foco. Realizar un esquema de rayos y explicar de qué tipo es la imagen que se forma.

La imagen se forma en el punto, situado a la izquierda de la lente, en que concurren las prolongaciones de los rayos refractados (indicadas con trazo discontinuo). Por lo tanto es una imagen **virtual**, **derecha** (igual orientación que el objeto) y **reducida**.



Cuestión 3.- Se dispone de una muestra de 10^{20} núcleos de un radioisótopo, con un período de semidesintegración de 8,02 días. ¿Cuántos núcleos quedarán después de 20 días?

Al conocer el periodo de semidesintegración, podemos calcular la constante radiactiva:

$$\lambda=\frac{\text{Ln }2}{t_{1/2}}=\frac{\text{Ln }2}{8.02}\rightarrow \lambda=\mathbf{0.0864\ días^{-1}} \rightarrow N=N_0\,e^{-\lambda t}=10^{20}\,e^{-0.0864\cdot 20}\rightarrow \mathbf{N=1.77\cdot 10^{19}\ núcleos}$$

Cuestión Experimental.- Con el objetivo de calcular experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad en el laboratorio del instituto, construimos un péndulo simple colgando una bolita de un hilo de 120 cm de longitud y haciéndola oscilar. Tras separar la bolita de su posición de equilibrio, y una vez estabilizadas las pequeñas oscilaciones, se mide el tiempo que tarda en efectuar 10 oscilaciones completas. Realizada cuatro veces la experiencia, conseguimos los resultados que aparecen la tabla. Determina con ellos el valor de la aceleración de la gravedad.

Experiencia	Tiempo (s)
1	21.8
2	22.1
3	21.9
4	22.0

Siendo el periodo de un péndulo simple (L=1.2m):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g=4\pi^2\,\frac{L}{T^2}$$

Experiencia	Tiempo (s)	T (s)	g(m/s^2)
1	21.8	2.18	9.97
2	22.1	2.21	9.70
3	21.9	2.19	9.88
4	22.0	2.2	9.79

$$g=\frac{9.97+9.70+9.88+9.79}{4}\rightarrow \mathbf{g=9.83\ {}^{m}/_{s^2}}$$