Universidad de Castilla La Mancha – Junio – 2016

Opción A

Problema 1.- Una onda viajera que se propaga por un medio elástico está descrita por la ecuación

$$y\ (x, t) = 2\cdot10^{-3}\cdot \text{sen}\left(5\pi x - 4000\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Las unidades de x son metros, las de t son segundos y las de la amplitud son milímetros.

a) Calcular su frecuencia, su periodo, su longitud de onda y su velocidad de propagación.
b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos puntos del medio separados una distancia de 10 cm? ¿Cuánto cambia la fase de una partícula del medio al cabo de una milésima de segundo?
c) Calcular la elongación y la velocidad de vibración de una partícula del medio situada en el origen de coordenadas en el instante t = 0.

$$y\ (x, t) = A\cdot \text{sen}\ (\omega t \pm kx + \delta_0) \rightarrow \begin{cases} A = 2\cdot10^{-3}\ \text{mm} = 2\cdot10^{-6}\ \text{m} \\ \omega = 4000\pi\ \text{rad}/\text{s} \\ k = 5\pi\ \text{rad} \end{cases}$$

Frecuencia y periodo:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4000\pi}{2\pi} \rightarrow \mathbf{f = 2000\ Hz} \rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2000} \rightarrow \mathbf{T = 5\cdot10^{-4}\ s}$$

Longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi} \rightarrow \mathbf{\lambda = 0.4\ m}$$

Velocidad de propagación:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{4000\pi}{5\pi} \rightarrow \mathbf{v = 800\ m/s}$$

El desfase entre dos puntos separados 0.1 m:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \left|\left(5\pi x_1 - 4000\pi t_1 + \frac{\pi}{6}\right) - \left(5\pi x_2 - 4000\pi t_2 + \frac{\pi}{6}\right)\right| \rightarrow \mathbf{t_1 = t_2} \rightarrow \Delta\delta = 5\pi\,|x_1 - x_2| = 5\pi\cdot0.1 \rightarrow \mathbf{\Delta\delta = 0.5\pi\ rad}$$

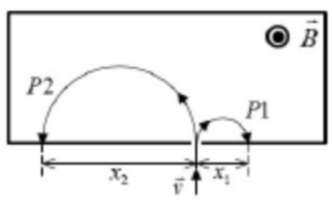
La elongación de una partícula en x = 0 y t = 0:

$$y\ (0, 0) = 2\cdot10^{-6}\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \mathbf{y = 10^{-6}\ m}$$

La velocidad de vibración:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -8\cdot10^{-3}\pi\cdot\cos\left(5\pi x - 4000\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{v\ (0,0)} y\ (0, 0) = -8\cdot10^{-3}\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \mathbf{v = -\ 0.021\ m/s}$$

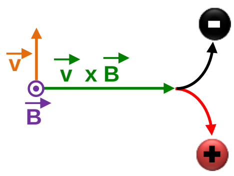
Problema 2.- Dos partículas cargadas, P1 y P2, de masas iguales $m = 3\cdot10^{-6}$ kg, entran en una región donde existe un campo magnético uniforme perpendicular (B = 0.50 T) orientado según se indica en la figura. A su entrada, las dos partículas tienen la misma velocidad, v = 200 m/s. Una vez dentro, las partículas se separan siguiendo las trayectorias semicirculares indicadas, siendo x_1 = 20 cm y x_2 = 50 cm.



a) Explicar razonadamente el signo de la carga de cada partícula y determinar el valor de dichas cargas.
b) Calcular la energía cinética de las partículas y la aceleración debida a la fuerza magnética que actúa sobre cada una de ellas.
c) Calcular el tiempo invertido por cada partícula en recorrer su respectiva trayectoria semicircular.

La fuerza del campo magnético viene dada por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\ \vec{v} \times \vec{B}$$



Esta fuerza es perpendicular al vector velocidad, actuando como fuerza centrípeta que hace curvarse la trayectoria de la partícula en el mismo sentido que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ si la carga es positiva, o hacia el sentido contrario a $\vec{v} \times \vec{B}$ si la carga es negativa.
Es decir, la partícula 1 será positiva (**+q₁**) y la partícula dos será negativa (**-q₂**)

Para que las partículas describan una órbita circular, la fuerza magnética tiene que ser igual a la fuerza centrípeta:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{F_m}| = q\cdot v\cdot B \\ |\vec{F_c}| = m\dfrac{v^2}{R} \end{array}\right\} \rightarrow q\cdot v\cdot B = m\frac{v^2}{R} \rightarrow q = \frac{m\cdot v}{B\cdot R} = \frac{m\cdot v}{B\cdot \frac{x}{2}} \rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{2\cdot m\cdot v}{B\cdot x_1} = \dfrac{2\cdot3\cdot10^{-6}\cdot200}{0.5\cdot0.2} \rightarrow \mathbf{q_1 = 0.012\ C} \\ q_2 = \dfrac{2\cdot m\cdot v}{B\cdot x_2} = \dfrac{2\cdot3\cdot10^{-6}\cdot200}{0.5\cdot0.5} \rightarrow \mathbf{q_2 = -0.0048\ C} \end{cases}$$

Como las masas y las velocidades de ambas partículas son iguales, la energía cinética también lo será:

$$K = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}3\cdot10^{-6}\,(200)^2 \rightarrow \mathbf{K = 0.06\ Jul}$$

Para calcular las aceleraciones empleamos la ley fundamental de la dinámica:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{q_1 \cdot v \cdot B}{m} = \frac{0.012 \cdot 200 \cdot 0.5}{3 \cdot 10^{-6}} \rightarrow \mathbf{a_1 = 4 \cdot 10^5\ m/s^2} \\ a_2 = \frac{q_2 \cdot v \cdot B}{m} = \frac{0.0048 \cdot 200 \cdot 0.5}{3 \cdot 10^{-6}} \rightarrow \mathbf{a_2 = 1.6 \cdot 10^5\ m/s^2} \end{cases}$$

Para calcular los tiempos nos valemos de la velocidad angular:

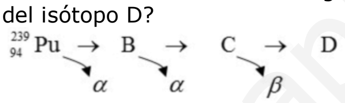
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{\theta}{t} \\ \omega &= \frac{v}{R} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\theta}{t} = \frac{v}{R} \rightarrow t = \frac{\theta \cdot R}{v} = \frac{\theta \cdot \frac{x}{2}}{v} = \frac{\theta \cdot x}{2 \cdot v} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\theta \cdot x_1}{2 \cdot v} = \frac{\pi \cdot 0.2}{2 \cdot 200} \rightarrow \mathbf{t_1 = 1.57 \cdot 10^{-3}\ s} \\ q_2 = \frac{\theta \cdot x_2}{2 \cdot v} = \frac{\pi \cdot 0.5}{2 \cdot 200} \rightarrow \mathbf{t_2 = 3.92 \cdot 10^{-3}\ s} \end{cases}$$

Cuestión 1.- ¿A qué se refiere el concepto de velocidad de escape desde la superficie de un planeta? Deducir su expresión a partir de consideraciones de energía.

La velocidad de escape es la velocidad mínima con la que debe lanzarse un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria del planeta, alejándose indefinidamente de manera que su velocidad final tienda a cero cuando la distancia tienda a infinito. Es decir, es la velocidad necesaria para que la energía cinética del objeto situado en la superficie del planeta sea igual a la energía potencial del sistema (planeta + objeto), siendo la energía mecánica total igual a cero.

$$E = U + K = 0 \rightarrow -G \cdot \frac{M \cdot m}{R} = \frac{1}{2} m v_e^2 \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Cuestión 2.- El isótopo radiactivo plutonio-239 (número atómico 94) se desintegra emitiendo una partícula α y dando lugar al núcleo que llamamos B, éste al C y éste al D. Cada uno de ellos se desintegra a su vez emitiendo la partícula que se indica. ¿Cuál es el número atómico y el número másico del isótopo D?

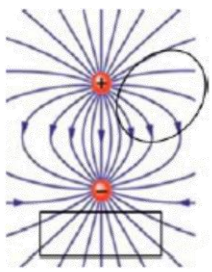


La emisión de una partícula α disminuye en dos unidades el número atómico (Z) y en cuatro unidades el número másico (A). La emisión de una partícula β aumenta en una unidad el Z y no varía el A:

	$^{239}_{94}Pu$	B	C	D
Número Atómico (Z)	94	94 - 2 = 92	92 – 2 = 90	90 + 1 = **91**
Número Másico (A)	239	239 – 4 = 235	235 – 4 = 231	**231**

Cuestión 3.- La figura representa las líneas de un campo eléctrico creado por dos cargas fijas en sus posiciones respectivas. Explíquese razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A. Si una tercera carga se mueve a lo largo de la trayectoria cerrada indicada por el óvalo de la figura, con salida y llegada en el mismo punto, el trabajo total será positivo, ya que dicha trayectoria se encuentra más cerca de la carga positiva.
B. Si una tercera carga se mueve a lo largo de la trayectoria cerrada indicada por el rectángulo de la figura, con salida y llegada en el mismo punto, el trabajo total será negativo, ya que dicha trayectoria se encuentra más cerca de la carga negativa.



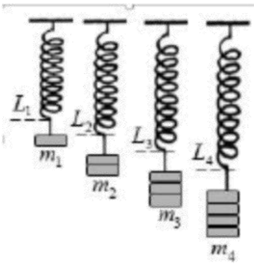
El campo eléctrico creado por las dos cargas positiva y negativa es un campo conservativo ya que las dos cargas están fijas en sus posiciones. Es decir, el trabajo requerido para el movimiento de cualquier otra carga Q dentro del campo entre dos puntos del mismo no depende del camino recorrido, solo depende de la posición inicial y final, siendo su valor el opuesto a la variación de energía potencial electrostática que experimenta la carga que se desplace entre ambos puntos:

$$W = -\Delta U = Q\,(V_0 - V_f)$$

Como en este caso el movimiento de la tercera carga Q ocurre a lo largo de líneas cerradas (origen y final en la misma posición), la diferencia de potencial será cero, la variación de energía potencial electrostática será por lo tanto igual a cero y el trabajo también será nulo, independientemente de la forma de la trayectoria, de su cercanía o lejanía a las cargas que crean el campo, y del signo de la tercera carga Q.
Por tanto, ambas afirmaciones son **falsas**.

Cuestión Experimental.- En el laboratorio de Física se lleva a cabo un experimento para medir la constante elástica de un muelle cargándolo con distintas masas m y midiendo las longitudes indicadas L (datos para longitudes y masas dados en la tabla, en cm y gramos, respectivamente). Determinar la constante elástica del muelle en N/m, explicando cual es el fundamento físico en que nos basamos para hacer este cálculo.

	L (cm)	m (gr)
1	16	117
2	19	234
3	22	351
4	25	468



Según la ley de Hooke, el alargamiento de un cuerpo elástico es proporcional a la fuerza que se ejerce sobre él: es decir, si vamos incrementando sucesivamente la fuerza aplicada sobre el muelle en cantidades iguales, la longitud del mismo se debe incrementar también en cantidades iguales. El cociente entre ambos incrementos es la constante elástica del muelle.

$$F = k \cdot \Delta x \rightarrow k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{\Delta x}$$

A medida que aumenta la masa colgada, la fuerza que actúa sobre el muelle se incrementa en una cantidad F igual al aumento de masa multiplicado por la aceleración de la gravedad:

$$\Delta F = (m - m_1) \cdot g$$

	L (m)	m (kg)	F = m ·g (N)	Δx	ΔF	**k**
1	0.16	0.117	1.146			
2	0.19	0.234	2.293	0.03	1.146	38.22
3	0.22	0.351	3.439	0.06	2.293	38.22
4	0.25	0.468	4.586	0.09	3.439	38.22

$$k = \frac{38.22 \cdot 3}{3} \rightarrow \mathbf{k = 38.22\ ^{N}/_{m}}$$

Opción B

Problema 1.- Ceres es un planeta enano, el mayor objeto del cinturón de asteroides, que tarda 4.60 años terrestres en completar una vuelta alrededor del Sol. El diámetro medio y la masa de Ceres son 952.4 km y $9.43 \cdot 10^{20}$ kg, respectivamente.

a) Admitiendo que describe una órbita circular, calcular la distancia de Ceres al Sol.

b) Calcular la aceleración de la gravedad y la velocidad de escape desde la superficie de Ceres, suponiendo que se trata de un cuerpo esférico homogéneo.

c) Basándonos en datos conocidos de Ceres, calcular la masa del Sol en kg.

Datos. Constante de gravitación $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$. Distancia Tierra-Sol: $d = 149.6 \cdot 10^6$ km. 1 año = 31557600 s.

Para calcular la distancia de Ceres al Sol, empleamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = k \cdot r^3 \rightarrow \left(\frac{T_C}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{r_C}{r_T}\right)^3 \rightarrow r_C = r_T \sqrt[3]{\left(\frac{T_C}{T_T}\right)^2} = 149.6 \cdot 10^6 \sqrt[3]{\left(\frac{4.60}{1}\right)^2} \rightarrow \mathbf{r_c = 4.13 \cdot 10^8\ km}$$

La aceleración de la gravedad en la superficie de Ceres:

$$g_C = -G\frac{m}{r^2} = -G\frac{m}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = -G\frac{4m}{d^2} = -6.67 \cdot 10^{-11}\frac{4 \cdot 9.43 \cdot 10^{20}}{\left(952.4 \cdot 10^3\right)^2} \rightarrow \mathbf{g_c = 0.277\ ^{m}/_{s^2}}$$

Para que Ceres no se salga de su órbita: $\left|\vec{F_g}\right| = \left|\vec{F_c}\right|$

$$G\frac{m \cdot M}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{\frac{d}{2}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M}{d}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.43 \cdot 10^{20}}{952.4 \cdot 10^3}} \rightarrow \mathbf{v_e = 513.97\ ^{m}/_{s}}$$

Para calcular la masa del sol igualamos la fuerza de atracción gravitatoria con la fuerza centrípeta, como hemos dicho anteriormente, tienen que ser iguales en módulo para que Ceres no se salga de su órbita:

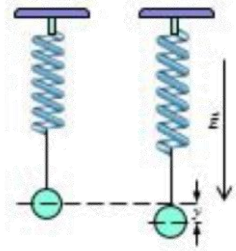
$$\left|\vec{F_g}\right| = \left|\vec{F_c}\right| \rightarrow \begin{cases} \left|\vec{F_g}\right| = G\dfrac{m \cdot M}{R^2} \\ \left|\vec{F_c}\right| = m\,\omega^2 R = m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R \end{cases} \rightarrow G\frac{m \cdot M}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \rightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(4.13 \cdot 10^{11}\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (4.6 \cdot 31557600)^2} \rightarrow \mathbf{M = 2 \cdot 10^{30}\ kg}$$

Bárbara Cánovas Conesa

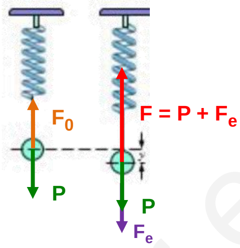
637 720 113

Problema 2.- Un muelle de constante elástica k = 3 N/m sujeta una pequeña esfera cargada eléctricamente. Cuando se establece un campo eléctrico de magnitud E = 4500 V/m dirigido verticalmente hacia abajo, la esfera alcanza una nueva posición de equilibrio situada más abajo que antes, a una distancia y = 2.4 cm (véase figura).

a) Calcular la carga de la esfera y explicar razonadamente qué signo tiene.
b) Cortamos el hilo que sujeta la esfera y se observa que ésta cae (dentro del campo eléctrico) con una aceleración de 13 $m \cdot s^{-2}$. Calcular la masa de la esfera.
c) Si en lugar de cortar el hilo eliminamos repentinamente el campo eléctrico, la esfera empezará a oscilar. Explicar por qué y hallar el periodo de oscilación.



El diagrama de fuerzas que actúan antes y después de la aparición del campo eléctrico sería:



Como el muelle sigue la ley de Hooke, se cumplirá:

$$F - F_0 = k \cdot y$$

Además:

$$F - F_0 = q \cdot E$$

Por lo tanto:

$$k \cdot y = q \cdot E \rightarrow q = \frac{k \cdot y}{E} = \frac{3 \cdot 0.024}{4500} \rightarrow \mathbf{q = 1.6 \cdot 10^{-5}\ C = 16\ \mu C}$$

El campo eléctrico produce un estiramiento (desplaza la esfera cargada en el mismo sentido del campo hasta que la fuerza elástica del muelle lo compensa). Por lo tanto, la carga de la esfera tiene que ser **positiva**, puesto que las cargas positivas son arrastradas en el mismo sentido del campo, mientras que las negativas lo son en sentido contrario.

Al cortar el hilo, la fuerza que actúa sobre la esfera es:

$$F = P + F_e \rightarrow m \cdot a = m \cdot g + q \cdot E \rightarrow m \cdot a - m \cdot g = q \cdot E \rightarrow m\,(a - g) = q \cdot E \rightarrow m = \frac{1.6 \cdot 10^{-5} \cdot 4500}{13 - 9.8} \rightarrow \mathbf{m = 0.0225\ kg = 22.5\ gr}$$

Si se elimina el campo eléctrico desaparece la fuerza eléctrica que mantenía a la esfera en una posición de equilibrio (y=2.4 cm). Por eso la fuerza ejercida por el muelle hacia arriba queda descompensada. En consecuencia, la esfera será impulsada hacia arriba, cuando alcanza la posición de equilibrio en ausencia de campo eléctrico la velocidad adquirida le hace sobrepasar dicha posición y desde ese momento el muelle estará encogiéndose y ejercerá una fuerza hacia abajo que tiende a frenar la esfera. Además, la fuerza ejercida en cada caso por el muelle sobre la esfera es proporcional a la longitud que se estire o se encoja (ley de Hooke). Es decir, la fuerza que el muelle ejerce sobre la esfera es una fuerza recuperadora y por tanto la esfera describirá un movimiento armónico simple de amplitud igual a 2.4 cm y cuyo periodo viene dado por la relación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.0225}{3}} \rightarrow \mathbf{T = 0.54\ s}$$

Cuestión 1.- En la figura se muestran dos cables paralelos, de los cuales el inferior transporta la corriente I en el sentido indicado. Se sabe que los dos cables se atraen entre sí. Explicar razonadamente cuál es el sentido de la corriente que circula por el cable superior (no se valorará una mera afirmación sin justificar).

El sentido del campo magnético creado por la corriente I sigue la regla de la mano derecha, es decir, será saliente respecto al plano del papel donde se encuentra el conductor superior (figura 1).

Como los conductores se atraen, la fuerza que actúa sobre el conductor superior estará dirigida hacia abajo. Esta fuerza es la suma de todas las fuerzas elementales $\left(d\vec{F}\right)$ que el campo magnético ejerce sobre todos los elementos de corriente $\left(i\,d\vec{\ell}\right)$ del conductor superior, siendo i la corriente que circula por él. Ahora bien, el sentido de la corriente tiene que ser de tal, que el producto vectorial $d\vec{\ell} \times \vec{B}$ apunte hacia abajo, ya que $d\vec{F} = i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$. Es decir, el sentido de la corriente en el conductor superior tiene que ser igual al del conductor inferior, ya que producto vectorial de dos vectores es otro vector cuya dirección es perpendicular a los dos vectores (figura 2)..

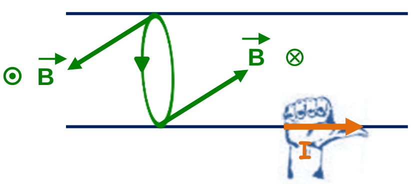


Figura 1

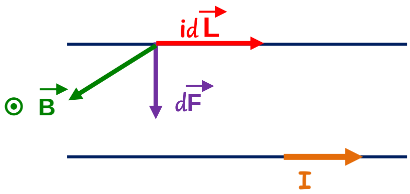


Figura 2

Cuestión 2.- El isótopo iodo-131 tiene una semivida de 8 días, mientras que el isótopo iodo-125 tiene una semivida de 60 días. Si partimos de una mezcla que contiene 1 mg de cada uno de estos isótopos, ¿cuánto iodo-131 quedará en la muestra cuando la masa de iodo-125 se haya reducido a la mitad?

En 60 días (semivida del ^{125}I) el ^{131}I tendrá un número de semividas igual a:

$$\frac{60 \text{ días } ^{125}I}{8 \text{ días } ^{131}I} \rightarrow \mathbf{7.5 \text{ semividas}}$$

La cantidad de ^{131}I transcurridas 7.5 semividas será:

$$m_f = m_0 \cdot \frac{1}{2^{7.5}} = 1 \cdot \frac{1}{2^{7.5}} \rightarrow \mathbf{5.5 \cdot 10^{-3} mg\ ^{131}I}$$

Cuestión 3.- La longitud de onda en el vacío de un fotón azul es 474 nm, y la de un fotón rojo es 632 nm. Calcular el cociente entre la energía del fotón rojo y el azul.

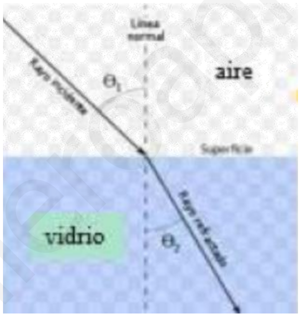
La energía de la radiación electromagnética sigue la Ley de Planck: $E = h \cdot f$. Siendo h la constante de Planck: $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s
Por otro lado, la velocidad de la luz es igual a $c = f \cdot \lambda$. Siendo c una constante: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.
Por tanto:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \frac{E_{Rojo}}{E_{Azul}} = \frac{h \cdot \frac{c}{\lambda_{Rojo}}}{h \cdot \frac{c}{\lambda_{Azul}}} \rightarrow \rightarrow \frac{E_{Rojo}}{E_{Azul}} = \frac{\lambda_{Azul}}{\lambda_{Rojo}} = \frac{474}{632} \rightarrow \mathbf{\frac{E_{Rojo}}{E_{Azul}} = 0.75}$$

Cuestión Experimental.- En el laboratorio de física se monta un experimento para determinar el índice de refracción de una lámina de vidrio, haciendo incidir para ello rayos de luz con distintos ángulos de incidencia θ_1 y midiendo en cada caso el ángulo de refracción θ_2.

a) ¿En qué ley física nos basaremos para hacerlo?
b) Calcular el índice de refracción de la lámina a partir de los datos experimentales mostrados en la tabla.

θ_1 (º)	θ_2 (º)
18	12
24	15
32	20
40	25



Nos basamos en la Ley de Snell, que relaciona los ángulos de incidencia y refracción, cuando la luz pasa de un medio a otro:

$$n_i \text{ sen } \theta_1 = n_r \text{ sen } \theta_2$$

En este caso, la luz pasa del aire ($n_i = 1$) al vidrio:

$$n_r = n_i \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2}$$

θ_1	θ_2	sen i	sen r	$n_{vidrio} = \frac{\text{sen i}}{\text{sen r}}$
18	12	0.309	0.208	1.486
24	15	0.406	0.258	1.572
32	20	0.529	0.342	1.549
40	25	0.642	0.422	1.521

$$n = \frac{1.486 + 1.572 + 1.549 + 1.521}{4} \rightarrow \mathbf{n = 1.532}$$