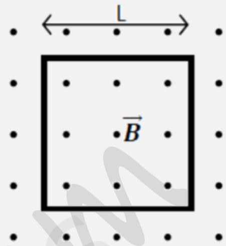
Universidad de Castilla La Mancha – Septiembre– 2009

Opción A

Problemas

1.- Una espira conductora cuadrada, de lado L = 30 cm, está situada en una región donde existe un campo magnético uniforme B = 0'4 T perpendicular al plano de la espira y con sentido saliente.



a) Calcula la f.e.m. media inducida en la espira cuando ésta rota 90º en torno a uno de sus lados en un intervalo de tiempo de 0'1 s.
b) Si la espira permanece fija en su posición inicial, pero el campo magnético se duplica en el mismo intervalo de tiempo indicado, ¿cuál es la f.e.m. inducida?
c) Razona en cada caso el sentido de la corriente inducida que circula por la espira.

Cuando la espira indicada en el enunciado gira un ángulo de 90º se produce una variación del número de líneas de campo (flujo magnético) a través de su superficie. Según la ley de Faraday-Lenz, esa variación de flujo magnético en el tiempo induce una corriente eléctrica en la espira que es proporcional al ritmo en que se produce esa variación. La corriente inducida dura mientras exista la variación de flujo magnético. La expresión de la Ley de Faraday-Lenz es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Por lo que primero tenemos que calcular el flujo magnético a través de la espira:

$$\phi = \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint \vec{B}\cdot d\vec{S}\cdot\cos\theta = \vec{B}\cdot\cos\theta\cdot\oint d\vec{S} \rightarrow \boldsymbol{\phi = B\cdot S\cdot\cos\theta} \rightarrow \begin{cases}\phi_0 = 0.4\cdot 0.3^2\cdot\cos 0 \rightarrow \boldsymbol{\phi_0 = 0.036\ Wb}\\ \phi_F = 0.4\cdot 0.3^2\cdot\cos 90 \rightarrow \boldsymbol{\phi_F = 0\ Wb}\end{cases}$$

Por tanto, la fem inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{\phi_F-\phi_0}{\Delta t} = -\frac{0-0.036}{0.1} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 0.36\ V}$$

Con el mismo razonamiento que en el apartado anterior, se producirá una corriente inducida mientras se esté duplicando el valor del campo magnético:

$$\begin{cases}\phi_0 = 0.4\cdot 0.3^2\cdot\cos 0 \rightarrow \boldsymbol{\phi_0 = 0.036\ Wb}\\ \phi_F = 2\cdot 0.4\cdot 0.3^2\cdot\cos 0 \rightarrow \boldsymbol{\phi_F = 0.072\ Wb}\end{cases} \rightarrow \varepsilon = -\frac{\phi_F-\phi_0}{\Delta t} = -\frac{0.072-0.036}{0.1} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = -0.36\ V}$$

Para determinar el sentido de la corriente se aplica la Ley de Lenz: *"El sentido de la corriente inducida es tal que el campo creado por dicha corriente tiende a oponerse a la creación del flujo magnético que la ha originado"*.
En el primer caso, el número de líneas de campo que atraviesan la superficie de la espira disminuye (se hace nulo) por lo que la corriente inducida en la espira tendrá el sentido necesario para que sus líneas de campo compensen dicha disminución, es decir, tenderán a salir por la cara de la espira que está sobre el papel, por tanto, la corriente inducida tendrá **sentido antihorario**.
En el segundo caso, al duplicarse el valor del campo magnético, se duplicará el número de líneas de campo que salgan por la cara de la espira que está sobre el papel. La corriente inducida en la espira tendrá un sentido tal que sus líneas de campo tiendan a compensar ese aumento; por lo tanto, tenderán a entrar por esa cara de la espira. Para que esto suceda la corriente inducida tendrá **sentido horario**.

2.- Un satélite de 200kg de masa gira en una órbita circular a una altura de 600 km sobre la superficie terrestre. Calcula:

a) La velocidad orbital del satélite
b) El periodo orbital, expresado en horas.
c) La energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica. Basándote en los resultados obtenidos comprueba que la energía mecánica es un medio de la energía potencial

$G = 6'67\cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}, $M_{TIERRA} = 5'98\cdot 10^{24}$ kg, $R_{TIERRA} = 6370$ km

Para calcular la velocidad orbital nos valemos de que la fuerza gravitatoria actúa como fuerza central, es decir:

$$|\vec{F_g}| = |\vec{F_C}| \rightarrow G\frac{M\,m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot\ 5.98\cdot 10^{24}}{(600+6370)\cdot 10^3}} \rightarrow \boldsymbol{v = 7564.79\ ^{m}/_{s}}$$

El periodo está relacionado con la velocidad orbital por medio de la velocidad angular:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{R} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{v/R} = \frac{2\,\pi\,R}{v} = \frac{2\,\pi\cdot(600+6370)\cdot 10^3}{7564.79} \rightarrow \boldsymbol{T = 5789.16\ seg = 1.6\ h}$$

La energía cinética será:

$$E_C = \frac{1}{2} m\cdot v^2 = \frac{1}{2} 200\cdot(7564.79)^2 \rightarrow \boldsymbol{E_C = 5.72\cdot 10^9\ Jul}$$

La energía potencial será:

$$E_P = -G\frac{M\cdot m}{R} = -6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.98\cdot 10^{24}\cdot 200}{(600+6370)\cdot 10^3} \rightarrow \boldsymbol{E_P = -1.14\cdot 10^{10}\ Jul}$$

Y la energía potencial:

$$E_M = E_C + E_P \rightarrow \boldsymbol{E_M = -5.72\cdot 10^9\ Jul}$$

Demostramos que la energía mecánica es la mitad que la energía potencial:

$$E_M = \frac{E_P}{2} = \frac{-1.14\cdot 10^{10}}{2} \rightarrow \boldsymbol{E_M = -5.7\cdot 10^9\ Jul}$$

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} m\cdot v^2 + \left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right) = \frac{1}{2} m\cdot\left(\sqrt{\frac{G\,M}{R}}\right)^2 - G\frac{M\cdot m}{R} = \frac{1}{2} G\frac{M\cdot m}{R} - G\frac{M\cdot m}{R} \rightarrow \boldsymbol{E_M = -\frac{1}{2} G\frac{M\cdot m}{R}}$$

Cuestiones:

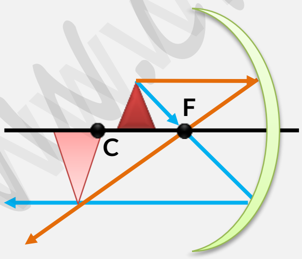
3- En una región del espacio el potencial eléctrico es constante, que podemos decir del campo eléctrico en dicha región del espacio. Justifica tu respuesta

La relación entre el potencial eléctrico y la intensidad de campo eléctrico viene dada por:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\,\vec{\imath}$$

Si el potencial eléctrico es constante, su derivada con respecto a x es nula, por tanto, $\boldsymbol{\vec{E} = 0\ N/C}$

4.- Dado un espejo esférico cóncavo, obtener de forma gráfica la imagen de un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco del espejo. Indicar las características de dicha imagen.



La imagen es **real**, **invertida** y situada a la izquierda del centro de curvatura. Su tamaño es **mayor** que el objeto.

5.- Las longitudes de onda del espectro visible están comprendidas, aproximadamente, entre 390 nm en el violeta y 740 nm en el rojo. ¿Qué intervalo aproximado de energías, en eV, corresponde a los fotones del espectro visible? h=6'626·10^{-34}J s, c=3'00·108 m s^{-1}, 1 eV = 1'602·10^{-19}J , 1nm=10^{-9}m)

La energía de los fotones del espectro viene dada por la ecuación de Planck, teniendo en cuenta la relación que existe entre la longitud de onda y la frecuencia:

$$E = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} E_{violeta} = 6.626\cdot 10^{-34}\cdot\dfrac{3\cdot 10^8}{390\cdot 10^{-9}} \rightarrow \boldsymbol{E_{violeta} = 5.09\cdot 10^{-19}\ Jul}\cdot\dfrac{1\ eV}{1.602\cdot 10^{-19} Jul} = \boldsymbol{3.18\ eV} \\ E_{rojo} = 6.626\cdot 10^{-34}\cdot\dfrac{3\cdot 10^8}{740\cdot 10^{-9}} \rightarrow \boldsymbol{E_{rojo} = 2.68\cdot 10^{-19}\ Jul}\cdot\dfrac{1\ eV}{1.602\cdot 10^{-19} Jul} = \boldsymbol{1.67\ eV} \end{array}\right.$$

Por lo que el intervalo aproximado de energías el espectro visible es **(1.67, 3.18) eV**.

Cuestión Experimental:

6.- En el laboratorio del instituto medimos cinco veces el tiempo que un péndulo simple de 1m de longitud tarda en describir 45 oscilaciones de pequeña amplitud. Los resultados de la medición se muestran en la tabla. Determina el valor de la aceleración de la gravedad

Experiencia	Nº Oscilaciones	Tiempo
1ª	45	89 s
2ª	45	91 s
3ª	45	88 s
4ª	45	90 s
5ª	45	92 s

El periodo de un péndulo simple viene dado en función de la gravedad, por lo que podemos despejar ésta de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2\,\frac{L}{T^2}$$

El periodo de cada péndulo es igual al tiempo invertido por cada uno de ellos entre 5 oscilaciones, por tanto, podemos calcular la gravedad para cada péndulo y luego calcular la media aritmética:

Experiencia	Nº Osc.	Tiempo	T = $\frac{t}{45\ osc.}$	g(m/s^2)
1ª	45	89 s	1.97	10.172
2ª	45	91 s	2.02	9.675
3ª	45	88 s	1.95	10.382
4ª	45	90 s	2	9.869
5ª	45	92 s	2.04	9.486

$$g = \frac{10.172 + 9.675 + 10.382 + 9.869 + 9.486}{5}$$

$$\boldsymbol{g = 9.91\ {}^{m}/_{s^2}}$$

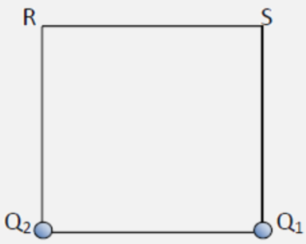
Opción B

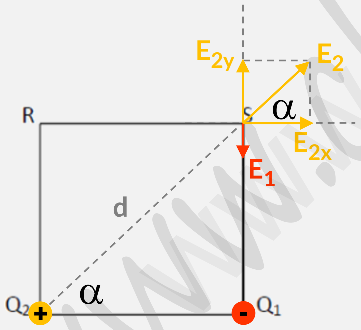
Problemas:

1.- En dos vértices consecutivos de un cuadrado de 3 cm de lado, se sitúan dos cargas puntuales de Q_1=−2 nC y Q_2= +6 nC, respectivamente. Determinar:

a) El campo eléctrico creado en el vértice S
b) El potencial eléctrico en los vértices libres, S y R.
c) El trabajo realizado por el campo cuando otra carga de −8 nC se desplaza entre dichos vértices, desde S hacía R.

k = 9·10^9 N.m^2 / C^2 , 1 nC= 10^{-9} C





El campo eléctrico es una magnitud vectorial que se calcula como la suma de los vectores intensidad de campo debidos a cada carga en un punto dado:

$$\vec{E}_S = \vec{E}_2 + \vec{E}_1$$

La distancia de la carga Q_2 al punto S la calculamos por Pitágoras y el ángulo α lo hallamos por trigonometría:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2(0.03)^2} \rightarrow \boldsymbol{d = 0.042\ m}$$

$$\alpha = arc.tg\left(\frac{0.03}{0.03}\right) \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 45°}$$

Por tanto, el vector intensidad de campo en el punto S es:

$$\vec{E}_S = (E_{2x})\,\vec{\imath} + (E_{2y} - E_1)\,\vec{\jmath} = k\left[\left(\frac{q_2}{d^2}\cos 45°\right)\vec{\imath} + \left(\frac{q_2}{d^2}sen\,45° - \frac{q_1}{l^2}\right)\vec{\jmath}\right]$$

$$= 9\cdot 10^9\left[\left(\frac{6\cdot 10^{-9}}{0.042^2}\cos 45°\right)\vec{\imath} + \left(\frac{6\cdot 10^{-9}}{0.042^2}sen\,45° - \frac{2\cdot 10^{-9}}{0.03^2}\right)\vec{\jmath}\right] \rightarrow \boldsymbol{\vec{E}_S = 21646.12\,\vec{\imath} + 1646.12\,\vec{\jmath}\ {}^{N}/_{C}}$$

Su módulo es de:

$$|\vec{E}_S| = \sqrt{21646.12^2 + 1646.12^2} \rightarrow \boldsymbol{|\vec{E}_S| = 21708.62\ {}^{N}/_{C}}$$

Y su argumento:

$$\alpha = arc.tg\left(\frac{\vec{E}_y}{\vec{E}_x}\right) = arc.tg\left(\frac{1646.12}{21646.12}\right) \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 4.34°}$$

El potencial eléctrico en un punto es una magnitud escalar que es suma de los potenciales debidos a cada carga en dicho punto. En el vértice S es de:

$$V_S = V_1 + V_2 = k\left(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{l}\right) = 9 \cdot 10^9\left(\frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0.03} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{0.042}\right) \rightarrow \boldsymbol{V_S = 685.71\, V}$$

En el vértice R es de:

$$V_R = V_1 + V_2 = k\left(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{l}\right) = 9 \cdot 10^9\left(\frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0.042} + \frac{6 \cdot 10^{-9}}{0.03}\right) \rightarrow \boldsymbol{V_R = 1371.42\, V}$$

El trabajo realizado por el campo al trasladar una carga de -8nC desde S hasta R es de:

$$W = -q\,\Delta V = -q(V_R - V_S) = -(-8 \cdot 10^{-9})(1371.42 - 685.71) \rightarrow \boldsymbol{W = 5.48 \cdot 10^{-6}\, Jul}$$

2.- Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de propagación de 4'8 m/s. El foco emisor vibra con una frecuencia de 12 Hz y una amplitud de 2 mm. Determina:

a) La longitud de onda, frecuencia angular y número de ondas
b) La ecuación de la onda considerando la fase inicial nula
c) La velocidad de vibración de un punto situado en x=2 m en el instante t=0,5 s
d) La velocidad y aceleración máxima de un punto cualquiera del medio

El periodo es el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{12} \rightarrow \boldsymbol{T = 0.083\, s}$$

La longitud de onda es igual a:

$$\lambda = T \cdot v = 0.083 \cdot 4.8 \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0.4\, m}$$

El número de onda lo calculamos mediante la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} \rightarrow \boldsymbol{k = 5\pi\, m^{-1}}$$

La frecuencia angular la hallamos gracias a su relación con el número de onda y la velocidad de propagación:

$$\omega = k \cdot v = 5\pi \cdot 4.8 \rightarrow \boldsymbol{\omega = 24\pi\, {}^{rad}/_{s}}$$

La ecuación de la onda armónica, considerando la fase inicial nula:

$$y(x,t) = A\, sen(\omega t \pm kx + \delta_0) \rightarrow \boldsymbol{y(x,t) = 0.002\, sen(24\pi t - 5\pi x)\quad (m, seg)}$$

La velocidad de vibración de un punto es la derivada de la posición con respecto al tiempo, para x = 2m y t = 0.5s:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\, cos(\omega t - kx) \rightarrow v(2, 0.5) = 0.002 \cdot 24\pi cos(24\pi 0.5 - 5\pi 2) = 0.048\pi \cos(2\pi) \rightarrow \boldsymbol{v = 0.15\, {}^{m}/_{s}}$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el coseno tome el valor de +1:

$$v_{máx.} = A\omega = 0.048\pi \rightarrow \boldsymbol{v_{max} = 0.15\, {}^{m}/_{s}}$$

La aceleración de vibración de un punto es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\, sen(\omega t - kx)$$

Su valor máximo se alcanzará cuando el seno tome el valor de -1:

$$v_{máx.} = A\omega^2 = 0.048\pi \rightarrow \boldsymbol{a_{max} = 11.36\, {}^{m}/_{s^2}}$$

Cuestiones:

3.- El gran colisionador de hadrones (LHC) del CERN posee imanes dipolares superconductores que generan un campo magnético intenso en dirección perpendicular al movimiento de un haz de protones, que por efecto de la fuerza magnética describen una trayectoria circular de 4,3 km de radio. Determina el valor del campo magnético para que la velocidad de los protones sea el 10% de la velocidad de la luz.
e=1'602·10^{-19} C, m_p=1'673·10^{-27} kg, c=3'00·10^{8}m s^{-1}

Las partículas cargadas que penetran en una zona donde existe un campo magnético de forma perpendicular a dicho campo, describen un movimiento circular uniforme, donde la fuerza magnética actúa como fuerza central:

$$\left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_C\right| \rightarrow q \cdot v \cdot B \cdot sen\,90° = m\frac{v^2}{R} \rightarrow B = \frac{m\,v}{R\,q} = \frac{1.673 \cdot 10^{-27} \cdot (0.1 \cdot 3 \cdot 10^8)}{4300 \cdot 1.602 \cdot 10^{-17}} \rightarrow \boldsymbol{B = 7.28 \cdot 10^{-5}\,T}$$

4.-

a) Define el concepto de velocidad de escape y deduce la expresión de velocidad de escape desde la superficie de un planeta de masa M y radio R
b) Determina la velocidad de escape desde la superficie marciana

G = 6'67· 10^{-11} N m^{2}kg^{-2}, M_{MARTE}= 6'42·10^{23} Kg, R_{MARTE}=3'40· 10^6 m)

La velocidad de escape de cualquier objeto en relación a un cuerpo celeste, como un planeta de radio R, es la velocidad a la que es necesario lanzar dicho objeto para que no regrese al planeta, es decir, para que escape a la acción del campo gravitatorio de dicho planeta.
Para deducir su expresión aplicamos la relación entre el trabajo exterior y la variación de energía que tiene lugar desde que el objeto es lanzado a la velocidad de escape hasta que llega hipotéticamente a una distancia infinita con velocidad nula. Los incrementos de energía y el trabajo exterior son:

$$\Delta E_m = W_{ext} = 0$$

Porque no hay fuerzas externas.

$$\Delta E_m = E_{mF} - E_{m0} = (E_{CF} + E_{PF}) - (E_{C0} + E_{P0}) \rightarrow \Delta E_m = (0+0) - \left[\frac{m\,v^2}{2} + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right)\right] \rightarrow \Delta E_m = G\frac{M \cdot m}{R} - \frac{m\,v^2}{2} = 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

La velocidad de escape desde la superficie marciana será:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6.42 \cdot 10^{23}}{3.4 \cdot 10^6}} \rightarrow \boldsymbol{v = 5018.87\,{}^{m}/_{s}}$$

5.-

a) Explica brevemente en qué consiste el efecto fotoeléctrico.
b) Si el trabajo de extracción del sodio es 2,5 eV, ¿cuál es la frecuencia umbral del sodio?

h= 6'626·10^{-34} J s , 1eV=1'602·10^{-19}J

El efecto fotoeléctrico es la emisión de electrones por parte de un metal cuando es iluminado por radiación electromagnética de determinada longitud de onda. Esta radiación electromagnética produce dos fenómenos en el metal:

- Por una parte arranca electrones de la superficie del metal, para lo cual es preciso que sus fotones tengan una energía mínima para vencer las fuerzas que ligan a los electrones en el metal. Dicha energía mínima se conoce como trabajo de extracción, y es característica de cada metal, y la frecuencia mínima necesaria para aportar el trabajo de extracción se conoce como frecuencia umbral (frecuencia mínima de la radiación electromagnética incidente por debajo de la cual no se produce emisión de fotones): $W_{extracción} = h \cdot f_0$
- Por otro lado comunica energía cinética a los electrones liberados (siempre que la frecuencia de la radiación incidente sea mayor que la frecuencia umbral): $E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2$

La ecuación de Einstein para explicar el efecto fotoeléctrico es: $E_i = W + E_C$
El efecto fotoeléctrico se dará siempre y cuando la frecuencia del haz incidente sea mayor que la frecuencia umbral del metal. La frecuencia umbral la calculamos a partir del trabajo de extracción:

$$W = h \cdot f_0 \rightarrow f_0 = \frac{W}{h} = \frac{2.5eV \cdot \frac{1.602 \cdot 10^{-19} Jul}{1\,eV}}{6.626 \cdot 10^{-34}} \rightarrow \boldsymbol{f_0 = 6.04 \cdot 10^{14}\,Hz}$$

Cuestión Experimental:

6.- En un laboratorio se han medido los siguientes ángulos de refracción cuando un haz luminoso incide desde el agua hacía el aire (n_{aire}=1). De acuerdo con las mediciones realizadas responde a las siguientes cuestiones:

a) Determina el índice de refracción del agua
b) ¿A qué llamamos ángulo límite? Determínalo en base a la tabla adjunta
c) ¿Qué condiciones deben cumplir los medios para que se produzca la reflexión total?

Experiencia	Ángulo de Incidencia	Ángulo de Refracción
1ª	20º	26º
2ª	30º	43º
3ª	40º	63º
4ª	48º	90º

La refracción sigue la Ley de Snell: el producto del seno del ángulo de incidencia por el índice de refracción del medio de donde proviene la luz es igual al producto del seno del ángulo de refracción por el índice de refracción del medio al que va la luz.

$$n_1\ sen\ \hat{\imath}\ =\ n_2\ sen\ \hat{r}$$

Para calcular el índice de refracción del agua aplicamos la ley de Snell a los datos de la tabla. Por último, el índice de refracción del agua será la media aritmética de los distintos índices calculados:

$$n_{agua} = n_{aire} \cdot \frac{sen\ \hat{r}}{sen\ \hat{\imath}} \rightarrow \boldsymbol{n_{agua} = \frac{sen\ \hat{r}}{sen\ \hat{\imath}}}$$

Experiencia	$\hat{\imath}$º	$\hat{r}$º	n_{agua}
1ª	20	26	1.281
2ª	30	43	1.364
3ª	40	63	1.386
4ª	48	90	1.346

$$n_{agua} = \frac{1.281 + 1.364 + 1.386 + 1.346}{4} \rightarrow \boldsymbol{n_{agua} = 1.344}$$

El ángulo límite es aquél ángulo incidente para el cual el rayo refractado emerge tangente a la superficie de separación entre los dos medios. Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, el seno del ángulo de refracción resulta mayor que la unidad. Esto indica, que las ondas que inciden con un ángulo mayor que el límite no pasan al segundo medio, sino que son reflejados totalmente en la superficie de separación (reflexión total).

Podemos calcular el valor del ángulo límite con la ley de Snell:

$$n_{agua} \cdot sen\ \hat{\imath} = n_{aire} \cdot sen\ \hat{r} \rightarrow 1.344\ sen\ \theta_C = 1\ sen\ 90° \rightarrow \theta_C = arc.sen\left(\frac{1}{1.344}\right) \rightarrow \boldsymbol{\theta_C = 48.07°}$$

Para que se produzca la reflexión total se deben dar dos condiciones:

1º. La onda debe incidir desde un medio de menor velocidad de propagación (menor índice de refracción) sobre la superficie de separación de otro medio de mayor velocidad de propagación (mayor índice de refracción).
2º. El ángulo de incidencia debe ser mayor que el ángulo límite.