Universidad de Castilla la Mancha – Septiembre 2.017

Opción A

Problemas:

1.- Un bloque de hielo que forma parte de los anillos de Saturno tiene una masa de 80 kg y describe una órbita circular a 125000 km del centro del planeta.

a) Si la masa de Saturno es 5,685·10^{26} kg, calcular la velocidad del bloque de hielo en su órbita.
b) ¿Cuánto tiempo tardará este bloque en completar una órbita alrededor del planeta?
c) Suponiendo que el bloque de hielo sufre un choque con otro de los componentes del anillo, calcular la energía mínima que deberá aportarle ese choque para que resulte expulsado del anillo, liberándose de la atracción del planeta. Se valorará ilustrar la explicación con una representación gráfica adecuada.

Dato: constante de gravitación G = 6.67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Para que el bloque de hielo no se salga de su órbita: $|\vec{F_g}| = |\vec{F_c}|$

$$\left.\begin{matrix} |\vec{F_g}| = G\dfrac{m\cdot M}{R^2} \\ |\vec{F_c}| = m\dfrac{v^2}{R} \end{matrix}\right\} \rightarrow G\frac{m\cdot M}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.685\cdot 10^{26}}{125\cdot 10^6}} \rightarrow \boldsymbol{v = 1.74\cdot 10^4\ m/s}$$

Para calcular el periodo (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) usamos la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G\,M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(125\cdot 10^6)^3}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.685\cdot 10^{26}}} \rightarrow \boldsymbol{T = 45093.8\ s = 12.52\ h}$$

La energía que se le tiene que aplicar al bloque de hielo para que pueda escapar del campo gravitatorio de Saturno, es la energía de ligadura:

$$E_{ligadura} = \frac{G\,M\,m}{2R} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.685\cdot 10^{26}\cdot 80}{2\cdot 125\cdot 10^6} \rightarrow \boldsymbol{E_{ligadura} = 1.21\cdot 10^{10}\ Jul}$$

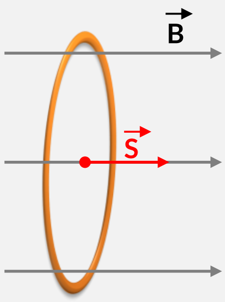
2.- Una espira circular de radio 20 cm está colocada dentro de un campo magnético variable con el tiempo

$$B = 10^{-2}\,sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

donde B se expresa en tesla y t en segundos. El plano de la espira es perpendicular a las líneas del campo magnético. Se pide:

a) Calcular el flujo magnético a través de la espira en el instante t = 0. ¿Cuánto tiempo tarda en repetirse el mismo valor de flujo?
b) Calcular la fuerza electromotriz inducida para t = 0.005 s y para t = 0.010 s.
c) La espira es conductora. ¿Qué sentido tendrá la corriente inducida para t = 0.005 s? Explicar.

El flujo magnético que atraviesa una superficie se define como el producto escalar de la intensidad del campo por el vector que representa a la superficie, perpendicular a ella y de módulo igual a su área. En estas condiciones el flujo magnético será:



$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = |\vec{B}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\theta = |\vec{B}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos(2\pi) == |\vec{B}|\cdot|\vec{S}|$$

$$\phi(t) = 10^{-2}\,sen\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi\cdot r^2$$

Sustituyendo datos:

$$\phi\,(t=0) = 10^{-2}\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi\cdot(0.2)^2 \rightarrow \boldsymbol{\phi\,(0) = 1.25\cdot 10^{-3}\ Wb}$$

El flujo magnético volverá a tener ese valor cuando el campo y la espira vuelvan a estar en una posición perpendicular, es decir, cuando el seno del ángulo vuelva a tomar el valor de 1:

$$sen\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 100\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{1}{100\pi} = 3.18\cdot 10^{-3} seg \rightarrow \boldsymbol{t = 3.18\ ms}$$

La fuerza electromotriz inducida en la espira se calcula aplicando la ley de Faraday:

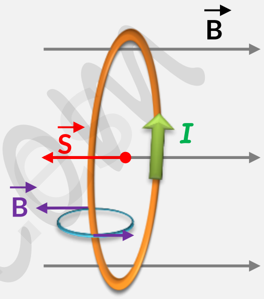
$$\varepsilon(t) = -S \cdot \frac{dB}{dt} = -\pi \cdot r^2 \cdot 10^{-2} \cdot 100\pi \cdot cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon(t) = -0.04\pi^2 cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Para los dos tiempos pedidos, la fem inducida será:

$$\varepsilon(t = 0.005) = -0.04\pi^2 cos(\pi) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon(0.005) = 0.39\ V}$$

$$\varepsilon(t = 0.01) = -0.04\pi^2 cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon(0.01) = 0\ V}$$

Según la ley de Henz: *"el sentido de la corriente inducida es tal que el campo creado por dicha corriente tiende a oponerse a la creación del flujo magnético que la ha originado"*. Es consecuencia del principio de conservación de la energía. Si el sentido de la corriente inducida fuese favorecer la causa que la produce, se generaría energía ilimitada de la nada.



En nuestro caso, el flujo magnético disminuye con el paso del tiempo:

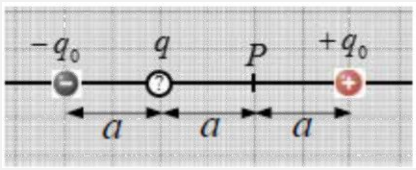
- $\phi\ (t = 0) = 1.25 \cdot 10^{-3}\ Wb$
- $\phi\ (t = 0.005) = 0\ Wb$

Por lo que aplicando la ley de Henz, la intensidad de la corriente inducida debe girar en **sentido antihorario**. Así genera un campo magnético inducido del mismo sentido que el conductor y así se opone a la variación de flujo.

Cuestiones:

3.- Tres cargas están colocadas en fila, siendo negativa la situada a la izquierda y positiva la de la derecha. Ambas son de igual valor q_0. La tercera carga es q y está situada entre las otras dos (véase esquema). Sabiendo que el potencial eléctrico en el punto P es igual a cero:

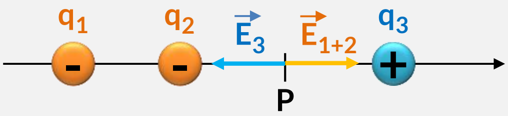
a) Determinar el signo de la carga q y su valor en función de q_0.
b) Explicar qué sentido tiene el campo eléctrico en el punto P.



El potencial en un punto es la energía potencial que posee la unidad de carga positiva colocada en ese punto. Al ser una magnitud escalar, el potencial total en un punto debido a un conjunto de cargas será la suma algebraica de los potenciales creados por cada carga en ese punto, para que el potencial en el punto P sea nulo, la carga q tiene que ser **negativa**:

$$V_P = K\sum \frac{Q}{d} = K\left(\frac{-q_0}{2a} + \frac{-q}{a} + \frac{q_0}{a}\right) \rightarrow 0 = K\left(\frac{q_0}{2a} - \frac{q}{a}\right) \rightarrow 0 = \frac{q_0 - 2q}{2a} \rightarrow \boldsymbol{q = \frac{q_0}{2}}$$

El campo eléctrico en un punto es la fuerza a la que estaría sometida la unidad de carga positiva colocada en dicho punto. Es una magnitud vectorial, cuyo módulo es directamente proporcional a las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Por tanto, en el punto P tendríamos:



$$\vec{E}_P = \vec{E}_{1X} + \vec{E}_{2X} + \vec{E}_{3X} = K\frac{q_1}{4a^2}(\vec{\imath}) + K\frac{q_2}{a^2}(\vec{\imath}) + K\frac{q_3}{a^2}(-\vec{\imath}) = K\left(\frac{q}{4a^2} + \frac{q/2}{a^2} - \frac{q}{a^2}\right)(\vec{\imath}) = K\left(\frac{q}{4a^2} + \frac{q}{2a^2} - \frac{q}{a^2}\right)(\vec{\imath}) \rightarrow \boldsymbol{\vec{E}_P}$$

$$\boldsymbol{= -K\frac{q}{a^2}(\vec{\imath})}$$

Es decir, tiene el **sentido negativo del eje x.**

4.- Las estrellas de tipo solar obtienen su energía durante la mayor parte de su vida fusionando núcleos de hidrógeno para formar helio (cuatro núcleos de hidrógeno originan un núcleo de helio). Explicar brevemente cual es la razón de que estas reacciones de fusión produzcan energía.

La fusión nuclear es el proceso por el cual dos núclidos se fusionan para dar un núclido más pesado, en el caso de las estrellas como el sol:

$$4\,{}^{1}_{1}H + 2\,{}^{0}_{-1}e \rightarrow 4\,{}^{4}_{2}He + Energía$$

La masa del núclido resultado es inferior a la suma de los núclidos que se fusionan, lo que implica la liberación de la energía correspondiente, según la expresión:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

La ecuación plantea la equivalencia entre masa y energía, en palabras del propio Einstein: "*masa y energía son esencialmente análogas, pues sólo son expresiones del mismo ente*". Es decir, establece que la masa y la energía pueden interconvertirse, existiendo un factor de proporcionalidad entre ellas, el cuadrado de la velocidad de la luz (c^2).

5.- Una superficie metálica se ilumina con luz de frecuencia $f_1 = 8 \cdot 10^{14}$ Hz y se observa que emite electrones. Después se ilumina la misma superficie con otra fuente de luz de frecuencia $f_2 = 5 \cdot 10^{14}$ Hz que es 20 veces más intensa que la primera, pero en este segundo caso no se registra la emisión de ningún electrón. Dar una explicación razonada para esta observación. ¿Cómo se llama el fenómeno físico que describe?

Este fenómeno se denomina efecto fotoeléctrico que consiste en la emisión de electrones por algunos metales cuando son iluminados con luz. No depende de la intensidad de la radiación incidente, sino de su frecuencia, teniendo que ser ésta como mínimo de igual valor que la frecuencia umbral que característica para cada metal (f_0):

$$h \cdot f = h \cdot f_0 + \frac{1}{2} m v^2$$

En nuestro caso, al producirse la emisión de electrones con la f_1, pero no con la f_2 (menor), significa que la frecuencia umbral para la superficie metálica es inferior a f_1 y superior a f_2.

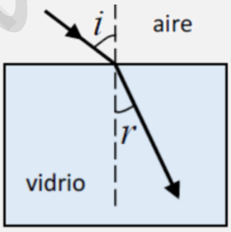
Cuestión Experimental:

6.-

a) ¿Qué es el índice de refracción?
b) Se estudia el fenómeno de la refracción en una lámina de vidrio haciendo incidir un rayo de luz con distintos ángulos sobre la superficie. En la tabla aparecen los ángulos de incidencia y los ángulos de refracción. Calcular el índice de refracción y la velocidad de la luz en este material.

Velocidad luz en aire ≈ velocidad en el vacío $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

i (º)	r (º)
27	16
36	21
48	27
57	31



El índice de refracción de un medio transparente es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio:

$$n = \frac{c}{v}$$

La refracción sigue la Ley de Snell, en nuestro caso: $n_{aire}\ sen\ \hat{\imath} = n_{vidrio}\ sen\ \hat{r}$

Para calcular el índice de refracción del vidrio aplicamos la ley de Snell a los datos de la tabla. Por último, el índice de refracción del vidrio será la media aritmética de los distintos índices calculados:

$$n_{vidrio} = n_{aire} \cdot \frac{sen\ \hat{\imath}}{sen\ \hat{r}} \rightarrow \boldsymbol{n_{vidrio} = \frac{sen\ \hat{\imath}}{sen\ \hat{r}}}$$

$\hat{\imath}$º	$\hat{r}$º	n_{vidrio}
27	16	1.647
36	21	1.640
48	27	1.636
57	31	1.628

$$n_{vidrio} = \frac{1.647 + 1.640 + 1.636 + 1.628}{4} \rightarrow \boldsymbol{n_{vidrio} = 1.637}$$

Para calcular la velocidad de la luz en el vidrio, usamos la definición del índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.637} \rightarrow \boldsymbol{v = 1.83 \cdot 10^8\ ^{m}/_{s}}$$

Opción B

Problemas:

1.- En un medio elástico se propagan simultáneamente dos ondas transversales dadas por las ecuaciones y_1 e y_2 siguientes (las amplitudes de ambas son longitudes, y todos los parámetros se expresan en unidades SI):

$$y_1 = 0.12\ sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t\right) \qquad y_2 = 0.12\ sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ayuda:

$$sen\ a + sen\ b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) sen\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

a) Calcular la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación y el sentido de propagación.
b) Calcular la ecuación de onda resultante de la interferencia de las dos ondas dadas.
c) Determinar la velocidad de vibración transversal y la aceleración del punto x = 0 en el instante t = 0.

Viendo las ecuaciones que nos dan sabemos:

$$\begin{array}{r} y_1 = A\ sen\ (kx \pm \omega t) \\ y_2 = A\ sen\ (kx \pm \omega t \pm \delta) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0.12\ m \\ k = \frac{\pi}{2}\ m^{-1} \\ +: \boldsymbol{sentido\ negativo\ OX} \\ \omega = 32\pi\ {}^{rad}/_{s} \\ \delta = \frac{\pi}{2}\ rad \end{array} \right.$$

La longitud de onda la calculamos a partid del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\pi/2} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 4\ m}$$

La velocidad de propagación a partir del número de onda y la frecuencia angular:

$$k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{32\pi}{\pi/2} \rightarrow \boldsymbol{v = 64\ {}^{m}/_{s}}$$

La frecuencia está relacionada con la longitud de onda y la velocidad de propagación:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{64}{4} \rightarrow \boldsymbol{f = 16\ Hz}$$

La ecuación de onda resultante de la interferencia de las dos ondas será:

$$y = y_1 + y_2 = 0.12\ sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t\right) + 0.12\ sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.12\left[sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t\right) + sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t\right)\right]$$

Según la ayuda tenemos:

$$y = 2 \cdot 0.12\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0.24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \boldsymbol{y = 0.169 \cdot sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

La velocidad de vibración se calcula con la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = 0.169 \cdot 32\pi \cdot cos\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Para x = 0m y t = 01s:

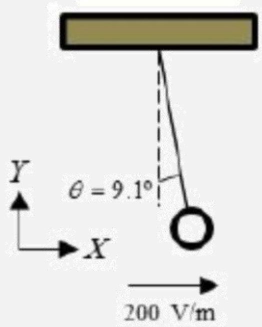
$$v(0,0) = 16.99 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \boldsymbol{v = 12.01\ {}^{m}/_{s}}$$

La aceleración de vibración viene dada por la derivada de la velocidad en función del tiempo:

$$a(x,t) = \frac{dv}{dt} = -0.169 \cdot (32\pi)^2\ sen\left(\frac{\pi x}{2} + 32\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Para x = 0m y t = 01s:

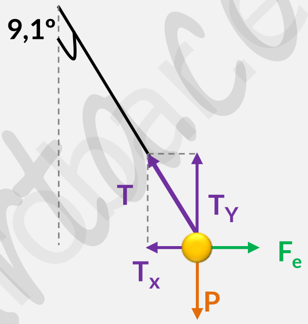
$$a(0,0) = -1707.99 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \boldsymbol{a = 1207.73\ {}^{m}/_{s^2}}$$



2.- En el laboratorio de física tenemos una pequeña bola de 50 g de masa que está cargada eléctricamente con una carga q y se encuentra suspendida del techo mediante un hilo aislante. En este laboratorio se dispone de un sistema que permite establecer un campo eléctrico en la dirección que se prefiera, horizontal o vertical.

a) Cuando establecemos un campo eléctrico de 200 V/m en la dirección del eje X positivo, el ángulo del hilo con la vertical es 9.1° (véase figura). Hallar la carga q de la bola y su signo.
b) Cuando se anula el campo en la dirección horizontal y en su lugar se establece un campo eléctrico en la dirección vertical, la tensión del hilo es igual a la mitad del peso de la bola. Calcular el valor de este campo vertical y su sentido.
c) ¿Qué campo hay que establecer, y en qué sentido, para que la tensión del hilo sea igual a cero?

Tómese la aceleración de la gravedad g = 10 m·s^{-2}



Al estar el sistema en equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Como se observa en la figura, e n el eje x tenemos:

$$\sum \vec{F_x} = 0 \rightarrow |\vec{T_x}| = |\vec{F_e}| \rightarrow \boldsymbol{T \cdot sen\, 9.1 = q \cdot E}$$

En el eje y tenemos:

$$\sum \vec{F_y} = 0 \rightarrow |\vec{T_y}| = |\vec{P}| \rightarrow \boldsymbol{T \cdot cos\, 9.1 = m \cdot g}$$

Si dividimos ambas expresiones:

$$tg\, 9.1 = \frac{q\,E}{m\,g} \rightarrow q = tg\, 9.1 \cdot \frac{m\,g}{E} = tg\, 9.1 \cdot \frac{0.05 \cdot 10}{200} \rightarrow \boldsymbol{q = 4 \cdot 10^{-4} C}$$

La carga es **positiva** puesto que el campo tiene el sentido positivo del eje X, si la carga fuese negativa el sentido del campo eléctrico sería el negativo del eje X. Esto es debido a que el campo eléctrico en un punto es la fuerza a la que estaría sometida la unidad de carga positiva colocada en dicho punto.

Si el campo eléctrico se dirige en el sentido positivo del eje Y, la resultante de las fuerzas será:

$$\sum \vec{F_y} = 0 \rightarrow |\vec{T_y}| + |\vec{F_e}| = |\vec{P}| \rightarrow T + q \cdot E = m \cdot g \rightarrow \frac{m \cdot g}{2} + q \cdot E = m \cdot g \rightarrow E = \frac{m \cdot g}{2\,q} = \frac{0.05 \cdot 10}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \rightarrow \boldsymbol{E = 625\ ^{V}/_{m}}$$

Por tanto, el campo eléctrico va en el **sentido positivo del eje Y**. Si fuera en el sentido contrario, el peso tendría que ser menor que la tensión para que el sistema estuviese en equilibrio.

Para que la tensión del hilo se anulase tendría que cumplirse que:

$$\sum \vec{F_y} = 0 \rightarrow |\vec{F_e}| = |\vec{P}| \rightarrow q \cdot E = m \cdot g \rightarrow E = \frac{m \cdot g}{q} = \frac{0.05 \cdot 10}{4 \cdot 10^{-4}} \rightarrow \boldsymbol{E = 1250\ ^{V}/_{m}}$$

El sentido es el **positivo del eje Y**, ya que la fuerza eléctrica tiene que estar compensada con el peso.

$$=$$

Cuestiones:

3.- El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre es 9.80 m·s^{-2} ¿Cuál será la aceleración de la gravedad a 350 km de altura? Radio terrestre R = 6370 km.

Según la expresión de la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow G \cdot M = g \cdot R^2 \rightarrow G \cdot M = 9.8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \rightarrow \boldsymbol{G \cdot M = 3.976 \cdot 10^{14}\ ^{N \cdot m^2}/_{kg}}$$

A una altura de 350 km, el valor de la intensidad de campo gravitatorio será:

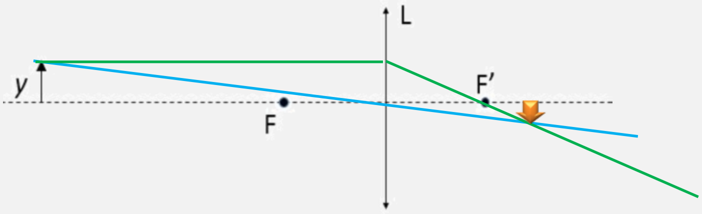
$$g = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2} = \frac{3.976 \cdot 10^{14}}{(6370 \cdot 10^3 + 350 \cdot 10^3)^2} \rightarrow G \cdot M = 9.8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \rightarrow \boldsymbol{g = 8.8\ ^{m}/_{m^2}}$$

Bárbara Cánovas Conesa

637 720 113

4.- Los focos objeto e imagen de una lente L delgada y convergente son F y F', respectivamente. Un objeto y está situado a la izquierda del foco objeto F (véase esquema). Mediante trazado de rayos, indicar razonadamente donde se forma la imagen de este objeto. ¿De qué tipo de imagen se trata?

El diagrama de rayos con una lente delgada y convergente, es el siguiente:



Al encontrarse el objeto a una distancia de la lente mayor que el doble de la distancia focal, la imagen formada será **menor, real e invertida**. Se formará a una distancia del foco imagen menor que el doble de la distancia focal imagen.

5.- Un isótopo radiactivo reduce su actividad a la mitad en un tiempo de 6 h.

a) ¿Cuál es su constante de desintegración radiactiva?
b) Si una muestra de este isótopo consta de N_0 núcleos, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que solo quede una décima parte? Expresar el resultado en horas.

La constante de desintegración radiactiva viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{Ln\ 2}{t_{1/2}} = \frac{Ln\ 2}{6\ h} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0.115\ h^{-1}}$$

Según la ley de decaimiento radiactivo:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N_0}{10} = N_0 \cdot e^{-0.115 \cdot t} \rightarrow Ln\ (0.1) = -0.115 \cdot t \rightarrow \boldsymbol{t = 19.93\ h}$$

Cuestión Experimental:

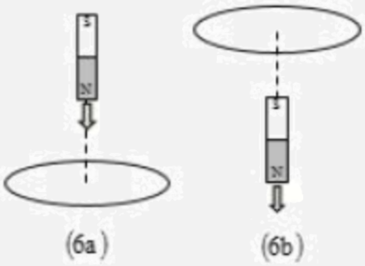
6.- Un imán se acerca a una espira enfrentando con ella su polo norte tal y como indica la figura (6a).

a) ¿Cuál será el sentido de la corriente inducida en la espira?

Consideremos después la situación mostrada en (6b): el imán ya ha atravesado la espira y se aleja de ella como indica la figura.

b) ¿Cuál será ahora el sentido de la corriente inducida? ¿Se mantendrá igual que en el caso anterior o habrá cambiado?

Explicar razonadamente.



Según la ley de Henz: "*la corriente inducida en una espira tiende a oponerse a la causa que la produce*".

En el primer caso, al acercar el polo Norte del imán a la espira, aumenta el flujo que la atraviesa, entonces la corriente inducida irá en el sentido en que las líneas del campo que genera tengan sentido contrario a las del imán para que el flujo tienda a disminuir, es decir el sentido es **antihorario**.

En el segundo caso, cuando el imán se aleja de la espira disminuye el flujo que la atraviesa, entonces la corriente inducida irá en el sentido en que las líneas del campo que genera tengan el mismo sentido que las del imán para que el flujo tienda a aumentar. Como en el polo sur del imán las líneas son entrantes la corriente generada tiene sentido **antihorario**.