

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos (1 punto cada apartado).

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Pregunta A.1.-** Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de  $25000 \text{ km h}^{-1}$  y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

- Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.
- Si la densidad del planeta es de  $16150 \text{ kg m}^{-3}$ , calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

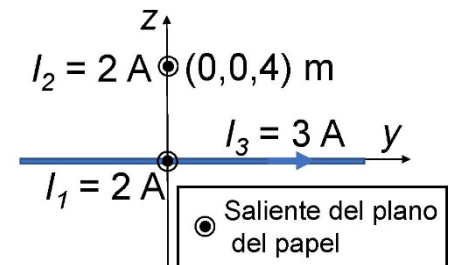
Dato: Constante de Gravitación Universal,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

**Pregunta A.2.-** Anacleto, el agente secreto, está grabando con un teléfono inteligente, a través de una pared, una conversación muy delicada del malvado Vázquez. La distancia entre ambos es de 5 m y, por efecto de la pared, al teléfono solo llega un 2 % de la intensidad que llegaría si no hubiese pared. Se sabe que el nivel de intensidad sonora de una conversación a 1 metro es de 50 dB.

- Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.
- Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?

Dato: Intensidad umbral de audición,  $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ .

**Pregunta A.3.-** Se tienen tres hilos indefinidos de corriente (ver figura). Los hilos de intensidades  $I_1 = 2 \text{ A}$  e  $I_2 = 2 \text{ A}$  son paralelos al eje  $x$  y pasan por los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 4) \text{ m}$ , respectivamente. El tercer hilo, con una intensidad  $I_3 = 3 \text{ A}$  pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al eje  $y$ . En todos los casos la corriente va en el sentido positivo de los ejes. Calcule:



- El campo magnético total creado por los tres hilos en el punto  $(0, 0, 2) \text{ m}$ .
- La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo de intensidad  $I_1$  sobre el hilo de intensidad  $I_2$ . ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

Dato: Permeabilidad magnética del vacío,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ .

**Pregunta A.4.-** Sea un sistema óptico formado por dos lentes convergentes, una lente A de distancia focal  $f_A'$  y otra B, situada 80 cm a la derecha de A, de distancia focal  $f_B' = 30 \text{ cm}$ . Un objeto de 5 cm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la lente A.

- Si la imagen del objeto formada por el sistema de lentes aparece 75 cm a la derecha de la lente B, ¿cuánto vale la distancia focal de la lente A y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes?
- ¿Dónde hay que situar el objeto a la izquierda de la lente A, para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito?

**Pregunta A.5.-** En un experimento realizado en un acelerador de partículas se han originado un electrón relativista de velocidad  $0,75c$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz, y un fotón de 15 MeV de energía.

- Calcule la masa relativista y la energía cinética del electrón.
- Determine la longitud de onda del fotón y la longitud de de Broglie del electrón.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; Masa del electrón en reposo,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ; Constante de Planck,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ ; Velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

**Pregunta B.1.-** Una partícula de masa  $m$  se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia  $(x, y)$ . La componente  $x$  del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto  $(2, 2)$  m es  $-1,18 \cdot 10^{-11} \text{ N kg}^{-1}$ .

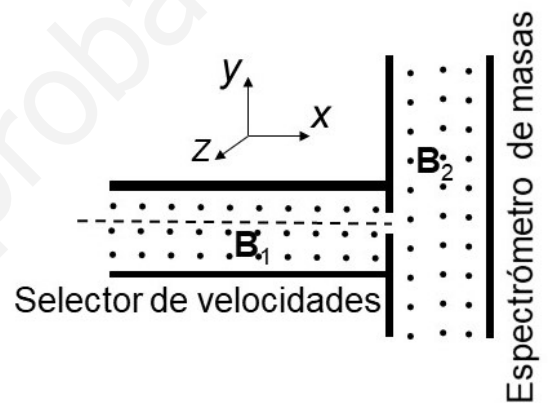
- Calcule el valor de la masa  $m$ .
- ¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa  $M = 5 \text{ kg}$  desde el punto  $(4, 0)$  m al punto  $(2, 2)$  m?

Dato: Constante de Gravitación Universal,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

**Pregunta B.2.-** Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje  $x$ . La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje  $x$ . La expresión matemática de la onda en los instantes  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 2 \text{ s}$  es  $y(x, 0) = 0,1 \cos(\pi - 4\pi x) \text{ m}$  e  $y(x, 2) = 0,1 \cos(11\pi - 4\pi x) \text{ m}$ , respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

- La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.
- La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.

**Pregunta B.3.-** Un espectrómetro de masas es un dispositivo que mide la masa de los iones y cuyo esquema se muestra en la figura. Consta de un selector de velocidades, en el que, mediante un campo eléctrico y un campo magnético mutuamente perpendiculares, se seleccionan únicamente los iones que viajan en línea recta paralela al eje  $x$  de la figura y con un valor determinado de la velocidad. A continuación, los iones pasan a una segunda región con un campo magnético perpendicular a la velocidad de los iones, de forma que éstos realizan una trayectoria circular. En el experimento se usan iones positivos de oxígeno  $^{18}\text{O}^+$  cuya masa es  $2,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  y su carga es  $+e$ . En el



selector de velocidades los campos eléctrico y magnético son  $\vec{E} = 4,0 \cdot 10^5 \vec{j} \text{ V m}^{-1}$  y  $\vec{B}_1 = 2 \vec{k} \text{ T}$ . El campo magnético en la segunda región del espectrómetro de masas es  $\vec{B}_2 = 5 \vec{k} \text{ T}$ . Calcule:

- La velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje  $x$  en el selector de velocidades.
- El radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas donde el campo magnético es  $B_2$ .

Dato: Valor absoluto de la carga de electrón,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

**Pregunta B.4.-** Sean dos medios A y B de índices de refracción  $n_A$  y  $n_B$ , respectivamente. Un rayo de luz de frecuencia  $6,04 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  incide desde el medio A hacia el medio B, verificándose que el ángulo límite para la reflexión total es  $45,58^\circ$ . Sabiendo que  $n_A - n_B = 0,6$ , determine:

- Los índices de refracción  $n_A$  y  $n_B$  de ambos medios.
- Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

**Pregunta B.5.-** El patrón del kilogramo es un cilindro hecho con una aleación de platino-iridio (90 % en masa de Pt) que se encuentra en un museo de París. El platino está formado por diversos isótopos, uno de ellos, el  $^{190}\text{Pt}$ , es radiactivo siendo su tiempo de semidesintegración de  $6,5 \cdot 10^{11}$  años. El porcentaje del isótopo  $^{190}\text{Pt}$  en una muestra de platino es del 0,012 % en masa.

- Calcule la actividad inicial del patrón del kilogramo.
- ¿Cuál será la masa final del platino  $^{190}\text{Pt}$  que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años?

Datos: Masa atómica del isótopo  $^{190}\text{Pt}$ ,  $M = 189,96 \text{ u}$ ; Número de Avogadro,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

### FÍSICA

- \* Las preguntas deben contestarse razonadamente, valorando en su resolución una adecuada estructuración y el rigor en su desarrollo.
- \* Se valorará positivamente la inclusión de pasos detallados, así como la realización de diagramas, dibujos y esquemas.
- \* En la corrección de las preguntas se tendrá en cuenta el proceso seguido en la resolución de las mismas, valorándose positivamente la identificación de los principios y leyes físicas involucradas.
- \* Se valorará la destreza en la obtención de resultados numéricos y el uso correcto de las unidades en el Sistema Internacional.
- \* Cada pregunta, debidamente justificada y razonada con la solución correcta, se calificará con un máximo de 2 puntos.
- \* En las preguntas que consten de varios apartados, la calificación máxima será la misma para cada uno de ellos (desglosada en múltiplos de 0,25 puntos).

FÍSICA  
SOLUCIONES  
**(Documento de trabajo orientativo)**

**Pregunta A.1.-** Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de 25000 km h<sup>-1</sup> y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

- a) Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.
- b) Si la densidad del planeta es de 16150 kg m<sup>-3</sup>, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

Dato: Constante de Gravitación Universal,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.

**Solución:**

- a) En primer lugar, determinamos el radio de la órbita. Dado que la velocidad orbital es constante y la órbita es circular, se cumple:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{Tv}{2\pi} = \frac{25000 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 3600}{2\pi} = 19894,37 \cdot 10^3 \text{ m} \Rightarrow \boxed{r = 19894,37 \text{ km}}$$

Determinamos la masa del planeta. Para que la órbita sea circular debe verificarse:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = \frac{rv^2}{G}$$

Luego:

$$M = 19,89437 \cdot 10^6 \left( \frac{25000 \cdot 10^3}{3600} \right)^2 \frac{1}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,44 \cdot 10^{25} \text{ kg} \Rightarrow \boxed{M = 1,44 \cdot 10^{25} \text{ kg}}$$

- b) Calculamos el radio del planeta. Dado que el planeta es esférico, se cumple:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow R = \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3} = \left( \frac{3 \cdot 1,44 \cdot 10^{25}}{4\pi \cdot 16150} \right)^{1/3} = 5968,60 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5968,60 \text{ km}}$$

Para determinar la constante gravitatoria en la superficie del planeta tenemos en cuenta que, la fuerza atractiva que aparece sobre un cuerpo de masa  $m$  en la superficie del planeta es:

$$F = mg = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

Luego el valor de  $g$  es:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,44 \cdot 10^{25}}{(5968,60 \cdot 10^3)^2} = 26,931 \text{ m s}^{-2} \Rightarrow \boxed{g = 26,93 \text{ m s}^{-2}}$$

**Pregunta A.2.-** Anacleto, el agente secreto, está grabando con un teléfono inteligente, a través de una pared, una conversación muy delicada del malvado Vázquez. La distancia entre ambos es de 5 m y, por efecto de la pared, al teléfono solo llega un 2 % de la intensidad que llegaría si no hubiese pared. Se sabe que el nivel de intensidad sonora de una conversación a 1 metro es de 50 dB.

- Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.
- Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?

Dato: Intensidad umbral de audición,  $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ .

**Solución:**

- a) En primer lugar, calculamos la potencia del sonido para una conversación normal:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{50}{10}} = 10^{-7} \text{ W m}^{-2}$$

Luego:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow P = 4\pi r^2 I \Rightarrow P = 4\pi \cdot 1^2 \cdot 10^{-7} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

La intensidad correspondiente a una conversación a 5 m será:

$$I' = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 5^2} = \frac{10^{-7}}{25} \text{ W m}^{-2}$$

La intensidad real que llega al teléfono inteligente es:

$$I_R = 0,02 \cdot \frac{10^{-7}}{25} = \frac{2}{25} \cdot 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$$

El nivel de intensidad sonora que llega al teléfono es:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left( \frac{\frac{2}{25} \cdot 10^{-9}}{1,0 \cdot 10^{-12}} \right) = 19,03 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 19,03 \text{ dB}}$$

- b) El teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 m. Determinamos la intensidad que llegaría a esa distancia proveniente de una conversación:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 100^2} = 10^{-11} \text{ W m}^{-2}$$

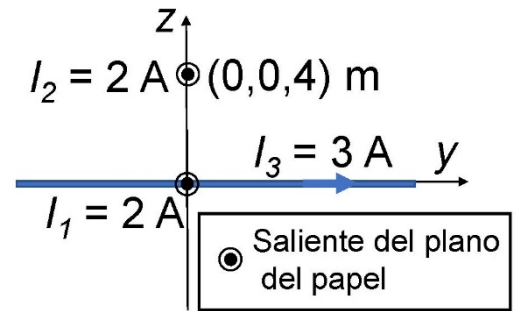
El nivel de intensidad sonora que llega al teléfono es:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left( \frac{10^{-11}}{1,0 \cdot 10^{-12}} \right) = 10 \text{ dB}$$

Luego el nivel de intensidad sonora más bajo que es capaz de medir es:

$$\boxed{\beta = 10 \text{ dB}}$$

**Pregunta A.3.-** Se tienen tres hilos indefinidos de corriente (ver figura). Los hilos de intensidades  $I_1 = 2 \text{ A}$  e  $I_2 = 2 \text{ A}$  son paralelos al eje  $x$  y pasan por los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 4) \text{ m}$ , respectivamente. El tercer hilo, con una intensidad  $I_3 = 3 \text{ A}$  pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al eje  $y$ . En todos los casos la corriente va en el sentido positivo de los ejes. Calcule:



- El campo magnético total creado por los tres hilos en el punto  $(0, 0, 2) \text{ m}$ .
- La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo de intensidad  $I_1$  sobre el hilo de intensidad  $I_2$ . ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

Dato: Permeabilidad magnética del vacío,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ .

**Solución:**

- El campo magnético creado por un hilo indefinido es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

Los campos magnéticos creados por cada uno de los hilos de corriente en el punto  $(0, 0, 2) \text{ m}$  es:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \vec{j} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 2} \vec{j} = -2 \cdot 10^{-7} \vec{j} \text{ T}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \vec{j} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 2} \vec{j} = 2 \cdot 10^{-7} \vec{j} \text{ T}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3} \vec{i} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi \cdot 2} \vec{i} = 3 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}$$

Por tanto, el campo magnético total en el punto  $(0, 0, 2) \text{ m}$  es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -2 \cdot 10^{-7} \vec{j} + 2 \cdot 10^{-7} \vec{j} + 3 \cdot 10^{-7} \vec{i} = 3 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = 3 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}}$$

- La fuerza magnética que ejerce el hilo conductor de intensidad  $I_1$  sobre el conductor  $I_2$ , es

$$\vec{F} = I_2 \vec{L}_2 \times \vec{B}_1$$

Donde  $\vec{B}_1$  es el campo creado por el hilo de corriente  $I_1$  en los puntos del hilo conductor  $I_2$ :

Luego:

$$\frac{\vec{F}}{L} = (2\vec{i}) \times \left( -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 4} \vec{j} \right) = -2,0 \cdot 10^{-7} (\vec{i} \times \vec{j}) = -2,0 \cdot 10^{-7} \vec{k} \text{ N m}^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{\vec{F}}{L} = -2,0 \cdot 10^{-7} \vec{k} \text{ N m}^{-1}}$$

La fuerza es **atractiva**.

**Pregunta A.4.-** Sea un sistema óptico formado por dos lentes convergentes, una lente A de distancia focal  $f'_A$  y otra B, situada 80 cm a la derecha de A, de distancia focal  $f'_B = 30$  cm. Un objeto de 5 cm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la lente A.

- a) Si la imagen del objeto formada por el sistema de lentes aparece 75 cm a la derecha de la lente B, ¿cuánto vale la distancia focal de la lente A y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes?
- b) ¿Dónde hay que situar el objeto a la izquierda de la lente A, para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito?

**Solución:**

- a) Según los datos del problema, para la lente B,  $s'_B = 75$  cm. La ecuación de las lentes delgadas para B es:

$$\frac{1}{s'_B} - \frac{1}{s_B} = \frac{1}{f'_B} \Rightarrow \frac{1}{75} - \frac{1}{s_B} = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{s_B} = \frac{1}{75} - \frac{1}{30} = \frac{30-75}{75 \cdot 30} \Rightarrow s_B = \frac{75 \cdot 30}{30-75} = -50 \text{ cm}$$

Luego la imagen formada por la lente A está 50 cm a la izquierda de la lente B. Como ambas lentes están separadas 80 cm, entonces:

$$s'_A = 80 - 50 = 30 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación de las lentes para la lente A:

$$\frac{1}{s'_A} - \frac{1}{s_A} = \frac{1}{f'_A} \Rightarrow \frac{1}{30} - \frac{1}{s_A} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} = \frac{1}{f'_A} \Rightarrow \frac{1}{f'_A} = \frac{1+2}{30} \Rightarrow f'_A = \frac{30}{3} = 10 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{f'_A = 10 \text{ cm}}$$

Determinamos el tamaño del objeto formado por el sistema de lentes. En primer lugar, el tamaño del objeto formado por la lente A será:

$$M_A = \frac{s'_A}{s_A} = \frac{y'_A}{y_A} \Rightarrow y'_A = \frac{y_A s'_A}{s_A} = \frac{5 \cdot 30}{-15} = -10 \text{ cm}$$

Para la lente B:

$$y'_B = \frac{y_B s'_B}{s_B} = \frac{-10 \cdot 75}{-50} = 15 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{y'_B = 15 \text{ cm}}$$

- b) La imagen formada por el sistema de lentes aparece en el infinito si la imagen formada por la lente A se encuentra en el foco objeto de B. Esto significa que:

$$s'_A = 80 - 30 = 50 \text{ cm}$$

Por consiguiente:

$$\frac{1}{s'_A} - \frac{1}{s_A} = \frac{1}{f'_A}; \Rightarrow \frac{1}{50} - \frac{1}{s_A} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{s_A} = \frac{1}{50} - \frac{1}{10} = \frac{1-5}{50} \Rightarrow s_A = \frac{50}{-4} = -12,5 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{s_A = -12,5 \text{ cm}}$$

**Pregunta A.5.-** En un experimento realizado en un acelerador de partículas se han originado un electrón relativista de velocidad  $0,75c$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz, y un fotón de  $15 \text{ MeV}$  de energía.

- Calcule la masa relativista y la energía cinética del electrón.
- Determine la longitud de onda del fotón y la longitud de de Broglie del electrón.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; Masa del electrón en reposo,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ; Constante de Planck,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ ; Velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

**Solución:**

- La masa relativista del electrón viene dada por la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,75c}{c}\right)^2}} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0,75^2}} = 13,76 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \Rightarrow \boxed{m = 1,38 \cdot 10^{-30} \text{ kg}}$$

La energía cinética del electrón es:

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = 13,76 \cdot 10^{-31} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2 - 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2 = 41,92 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$
$$\Rightarrow \boxed{E_c = 4,19 \cdot 10^{-14} \text{ J}}$$

- Determinamos la longitud de onda del fotón. Se cumple:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda_f} \Rightarrow \lambda_f = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,829 \cdot 10^{-13} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_f = 8,29 \cdot 10^{-14} \text{ m}}$$

Para el electrón debemos utilizar la ecuación de de Broglie:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{13,76 \cdot 10^{-31} \cdot 0,75 \cdot 3,0 \cdot 10^8} = 0,2142 \cdot 10^{-11} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_e = 2,14 \cdot 10^{-12} \text{ m}}$$



**Pregunta B.1.-** Una partícula de masa  $m$  se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia  $(x, y)$ . La componente  $x$  del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto  $(2, 2)$  m es  $-1,18 \cdot 10^{-11} \text{ N kg}^{-1}$ .

- Calcule el valor de la masa  $m$ .
- ¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa  $M = 5 \text{ kg}$  desde el punto  $(4, 0)$  m al punto  $(2, 2)$  m?

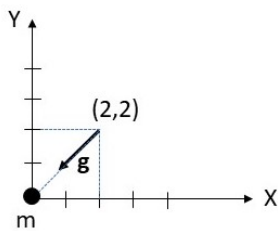
Dato: Constante de Gravitación Universal,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

**Solución:**

- El campo gravitatorio creado por la masa  $m$  es:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$$

Según la figura, el vector está dirigido a lo largo de la diagonal del cuadrado de lado 2 m.



La componente  $x$  del campo gravitatorio es:

$$g_x = -\frac{Gm}{r^2} \cos \theta \Rightarrow m = -\frac{g_x r^2}{G \cos \theta} = -\frac{(-1,18 \cdot 10^{-11}) \cdot (2^2 + 2^2)}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \cos(45)} = \frac{1,188}{6,67} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 2,0015 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 2 \text{ kg}}$$

- El trabajo que realiza el campo es:

$$W = -[E_p(B) - E_p(A)] = -[MV(B) - MV(A)]$$

Donde B es el punto  $(2, 2)$  m y A es el punto  $(4, 0)$  m. El potencial gravitatorio creado por la masa  $m$  situada en el origen es:

$$V = -\frac{Gm}{r}$$

Para los puntos A y B:

$$V(A) = -\frac{Gm}{r_A} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{4} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{2} \text{ J kg}^{-1}$$

$$V(B) = -\frac{Gm}{r_B} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \sqrt{2}}{2} \text{ J kg}^{-1}$$

Luego el trabajo será:

$$W = -5 \left[ -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \sqrt{2}}{2} + \frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{2} \right] = -5 \left[ \frac{6,67 \cdot 10^{-11} (1 - \sqrt{2})}{2} \right] = 6,907 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = 6,91 \cdot 10^{-11} \text{ J}}$$

**Pregunta B.2.-** Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje  $x$ . La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje  $x$ . La expresión matemática de la onda en los instantes  $t = 0$  s y  $t = 2$  s es  $y(x, 0) = 0,1 \cos(\pi - 4\pi x)$  m e  $y(x, 2) = 0,1 \cos(11\pi - 4\pi x)$  m, respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

- La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.
- La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.

**Solución:**

- La expresión matemática de una onda transversal que se propaga en el eje  $x$  es:

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Según el enunciado del problema:

$$y(x, 0) = 0,1 \cos(\pi - 4\pi x) = A \cos(\omega \cdot 0 - kx + \phi)$$

$$y(x, 2) = 0,1 \cos(11\pi - 4\pi x) = A \cos(\omega \cdot 2 - kx + \phi)$$

Por tanto, se cumple que:

$$A = 0,1 \text{ m y } k = 4\pi \text{ rad m}^{-1}.$$

Además, debe cumplirse:

$$\pi - 4\pi x = \omega \cdot 0 - kx + \phi = -kx + \phi$$

$$11\pi - 4\pi x = \omega \cdot 2 - kx + \phi = 2\omega - kx + \phi$$

Teniendo en cuenta que  $k = 4\pi \text{ rad m}^{-1}$ , se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\pi - 4\pi x = -4\pi x + \phi \Rightarrow \phi = \pi$$

$$11\pi - 4\pi x = 2\omega - kx + \phi = 2\omega - 4\pi x + \pi \Rightarrow 2\omega = 10\pi \Rightarrow \omega = \frac{10\pi}{2} = 5\pi \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow \boxed{\omega = 5\pi \text{ rad s}^{-1}}$$

La expresión matemática de la onda es:

$$\boxed{y(x, t) = 0,1 \cos(5\pi t - 4\pi x + \pi) \text{ m}}$$

- La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\left(\frac{2\pi}{k}\right)}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = \frac{\omega}{k} = \frac{5\pi}{4\pi} = 1,25 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow \boxed{v = 1,25 \text{ m s}^{-1}}$$

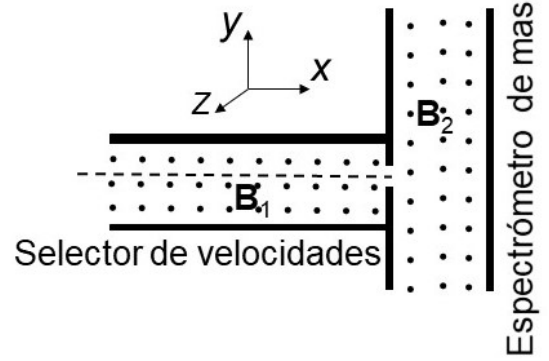
La aceleración máxima de un punto de la cuerda se obtiene si se tiene en cuenta que:

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \phi) \Rightarrow a(x, t) = \frac{dv(x, t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

El valor máximo de la aceleración es:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0,1(5\pi)^2 = 24,674011 \Rightarrow \boxed{a_{\max} = 24,67 \text{ m s}^{-2}}$$

**Pregunta B.3.-** Un espectrómetro de masas es un dispositivo para medir la masa de los iones y cuyo esquema se muestra en la figura. Consta de un selector de velocidades, en el que, mediante un campo eléctrico y un campo magnético mutuamente perpendiculares, se seleccionan únicamente los iones que viajan en línea recta paralela al eje  $x$  de la figura y con un valor determinado de la velocidad. A continuación, los iones pasan a una segunda región con un campo magnético perpendicular a la velocidad de los iones, de forma que éstos realizan una trayectoria circular. En el experimento se usan iones positivos de oxígeno  $^{18}\text{O}^+$  cuya masa es  $2,7 \cdot 10^{-26}$  kg y su carga es  $+e$ . En el selector de velocidades los campos eléctrico y magnético son  $\vec{E} = 4,0 \cdot 10^5 \vec{j}$  V



$\text{m}^{-1}$  y  $\vec{B}_1 = 2 \vec{k}$  T. El campo magnético en la segunda región del espectrómetro de masas es  $\vec{B}_2 = 5 \vec{k}$  T.

Calcule:

- La velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje  $x$  en el selector de velocidades.
- El radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas donde el campo magnético es  $B_2$ .

Dato: Valor absoluto de la carga de electrón,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

**Solución:**

- En el selector de velocidades, para que la carga se mueva en línea recta debe cumplirse que:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{mag} = 0 \Rightarrow q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}_1 = 0 \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{v} \times \vec{B}_1|$$

Como  $\vec{v}$  y  $\vec{B}_1$  son perpendiculares, sólo los iones cuya velocidad sea paralela al eje  $x$  saldrán del selector de velocidades. Por tanto:

$$|\vec{E}| = |\vec{v}| |\vec{B}_1| \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}_1|} = \frac{4 \cdot 10^5}{2} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow \boxed{v = 2,0 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}}$$

- A la salida del selector de velocidades se cumple:

$$F_{mag} = |q|vB_2 = ma_n = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B_2}$$

Para el  $^{18}\text{O}^+$ , su masa es  $2,7 \cdot 10^{-26}$  kg, luego el radio de la órbita será:

$$r = \frac{mv}{|q|B_2} = \frac{2,7 \cdot 10^{-26} \cdot 2 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5} = 0,675 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \boxed{r = 0,67 \text{ cm}}$$

**Pregunta B.4.-** Sean dos medios A y B de índices de refracción  $n_A$  y  $n_B$ , respectivamente. Un rayo de luz de frecuencia  $6,04 \cdot 10^{14}$  Hz incide desde el medio A hacia el medio B, verificándose que el ángulo límite para la reflexión total es  $45,58^\circ$ . Sabiendo que  $n_A - n_B = 0,6$ , determine:

- Los índices de refracción  $n_A$  y  $n_B$  de ambos medios.
- Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3 \cdot 10^8$  m s<sup>-1</sup>.

**Solución:**

- Determinamos los índices de refracción de ambos medios. Como el ángulo límite para la reflexión total para un rayo que va de A hacia B es de  $45,58^\circ$ , se cumple, según la ley de Snell:

$$n_A \sin \theta_i = n_B \sin \theta_r \Rightarrow n_A \sin(45,58^\circ) = n_B \sin(90^\circ) = n_B \Rightarrow n_B = n_A \sin(45,58^\circ)$$

Por otro lado, sabemos que:

$$n_A - n_B = 0,6$$

Por consiguiente:

$$n_A - n_B = n_A - n_A \sin(45,58^\circ) = n_A [1 - \sin(45,58^\circ)] = 0,6$$

$$\Rightarrow n_A = \frac{0,6}{[1 - \sin(45,58^\circ)]} = 2,10 \Rightarrow \boxed{n_A = 2,10}$$

Luego:

$$n_B = n_A - 0,6 = 2,10 - 0,6 = 1,5 \Rightarrow \boxed{n_B = 1,5}$$

- Para calcular la longitud de onda del rayo de luz en ambos medios tenemos en cuenta las siguientes relaciones:

$$n_i = \frac{c}{V_i}; V_i = \lambda_i f \Rightarrow n_i = \frac{c}{\lambda_i f} \Rightarrow \lambda_i = \frac{c}{n_i f}$$

Donde,  $V_i$  y  $\lambda_i$  son la velocidad y la longitud de onda del rayo de luz en el medio  $i$ . La frecuencia es independiente del medio. Por tanto:

$$\lambda_A = \frac{c}{n_A f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,1(6,04 \cdot 10^{14})} = 236,518 \cdot 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_A = 236,52 \text{ nm}}$$

$$\lambda_B = \frac{c}{n_B f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5(6,04 \cdot 10^{14})} = 331,126 \cdot 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_B = 331,13 \text{ nm}}$$

**Pregunta B.5.-** El patrón del kilogramo es un cilindro hecho con una aleación de platino-iridio (90 % en masa de Pt) que se encuentra en un museo de París. El platino está formado por diversos isótopos, uno de ellos, el  $^{190}\text{Pt}$ , es radiactivo siendo su tiempo de semidesintegración de  $6,5 \cdot 10^{11}$  años. El porcentaje del isótopo  $^{190}\text{Pt}$  en una muestra de platino es del 0,012 % en masa.

- Calcule la actividad inicial del patrón del kilogramo.
- ¿Cuál será la masa final del platino  $^{190}\text{Pt}$  que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años?

Datos: Masa atómica del isótopo  $^{190}\text{Pt}$ ;  $M = 189,96$  u; Número de Avogadro,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**Solución:**

- La actividad inicial de una muestra radiactiva es:

$$A = \lambda N$$

$\lambda$  es la constante de desintegración y  $N$  el número de átomos. Calculamos la constante de desintegración y el número de isótopos radiactivos en el patrón del kilogramo.

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

En el patrón del kilogramo hay 0,9 kg de Pt y  $0,9 \cdot 0,012 \cdot 10^{-2}$  kg del isótopo  $^{190}\text{Pt}$ . Luego el número de átomos será:

$$N = \text{moles} \cdot N_A = \frac{m(\text{g})}{P_M} N_A = \frac{0,9 \cdot 0,012 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3}{189,96} (6,02 \cdot 10^{23}) = 3,42 \cdot 10^{20} \text{ isótopos}$$

Por consiguiente:

$$A = \frac{\ln 2 \cdot (3,42 \cdot 10^{20})}{6,5 \cdot 10^{11} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 11,573 \text{ Bq} \Rightarrow \boxed{A = 11,57 \text{ Bq}}$$

- Calculamos la masa del platino  $^{190}\text{Pt}$  que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años. La masa inicial correspondiente a los isótopos de  $^{190}\text{Pt}$  es:

$$m_0 = 0,9 \cdot 0,012 \cdot 10^{-2} = 108 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

La masa del platino  $^{190}\text{Pt}$  que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años será:

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow m = 108 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{\ln 2}{6,5 \cdot 10^{11}} \cdot 1,0 \cdot 10^9} = 108 \cdot 10^{-6} e^{-0,106638 \cdot 10^{-2}} = 107,885 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 1,07 \cdot 10^{-4} \text{ kg}}$$