FÍSICA
SEPTIEMBRE 2008

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN. La prueba consta de dos partes.
La primera parte consiste en un conjunto de cinco cuestiones de tipo teórico, conceptual o teórico-práctico, de las cuales el alumno debe responder solamente a tres.

La segunda parte consiste en dos repertorios A y B, cada uno de ellos constituido por dos problemas. El alumno debe optar por uno de los dos repertorios y resolver los dos problemas del mismo.

TIEMPO: Una hora treinta minutos.

CALIFICACIÓN: Cada cuestión debidamente justificada y razonada con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos.
Cada problema debidamente planteado y desarrollado con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos.
En aquellas cuestiones y problemas que consten de varios apartados, la calificación será la misma para todos ellos, salvo indicación expresa en los enunciados.

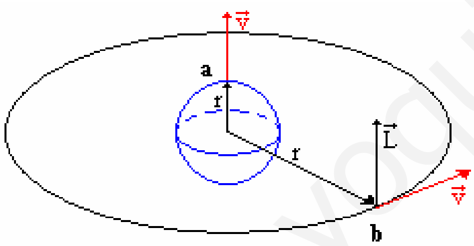
PRIMERA PARTE

Cuestión 1.-

Calcule el momento angular de un objeto de 1000 kg respecto el centro de la tierra en los siguientes casos:

a) Se lanza desde el polo norte perpendicularmente a la superficie de la tierra con una velocidad de 10 Km/s.
b) Realiza una órbita alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 Km de la superficie. Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

Solución.



El movimiento angular se define como el producto vectorial del radiovector por la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\,\vec{v})$$

Su modulo, viene dado por:

$$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,\alpha$$

a) En este caso el ángulo que forman el vector posición r con el vector velocidad es cero por lo que el modulo del momento angular es nulo.

$$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,0^\circ = 0\left(\text{kg m}^2\text{s}^{-1}\right)$$

b) En este caso el ángulo que forma el vector posición r y la velocidad orbital es 90º.

$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,90^\circ = r\,m\,v$

La velocidad de orbita se calcula teniendo en cuenta que debe ser tal que la fuerza de atracción gravitatoria sea la fuerza centrípeta necesaria para describir la órbita de radio r.

$$r = R + h = 6{,}37.\ 10^6 + 600000 = 6{,}97.\ 10^6\ \text{m}:$$

$$F_G = F_c\ :\ G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} = m\cdot\frac{v^2}{r}\ :\ v = \sqrt{G\cdot\frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}}{6{,}97\times10^6}} = 7565\ \text{m}/\text{s}$$

Conocida la velocidad orbital se calcula el módulo del momento angular.

$$L = m\cdot r\cdot v\cdot\text{sen}\,90^\circ = 6{,}97\times10^6\cdot1000\cdot7565\cdot1 = 5{,}27\times10^{13}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

El vector L es perpendicular a al plano orbital.

Cuestión 2.

Una partícula que realiza un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud tarda 2 s en efectuar una oscilación completa. Si en el instante t = 0 su velocidad era nula y la elongación positiva, determine:

a) La expresión matemática que representa la elongación en función del tiempo.

b) La velocidad y la aceleración de oscilación en el instante t = 0,25 s.

Solución.

a. La elongación x, velocidad v y aceleración a, vienen dadas por las ecuaciones:

$$x = A\cdot \text{sen}\,(\omega\, t+\varphi)\ :\ \ v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cdot\cos(\omega\, t+\varphi)\ :\ \ a = -A\omega^2\cdot\text{sen}\,(\omega\, t+\varphi)$$

Conocido el periodo (T = 2 s), se calcula la pulsación o velocidad angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ {}^{rad}\!/_{s}$

El desfase (φ) se puede calcular con el dato de la velocidad a t = 0.

Si cuando t = 0 la velocidad es nula: $v = A\omega\cdot\cos(\omega\cdot 0+\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 : \begin{cases}\varphi = \frac{\pi}{2}\\ \varphi = -\frac{\pi}{2}\end{cases}$

- Para $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ en t = 0: $x = A\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right) = -A < 0$
- Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en t = 0: $x = A\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = A > 0$

Teniendo en cuenta que para t = 0, la elongación (x) es positiva, el desfase deberá ser $\varphi = {}^{\pi}\!/_{2}$, la elongación viene expresada por : $x = 0{,}1\cdot\text{sen}\left(\pi\, t + \frac{\pi}{2}\right)$

b. Las expresiones para la velocidad y la aceleración de la partícula son: $\begin{cases} v = 0{,}1\,\pi\cdot\cos\left(\pi\, t+\frac{\pi}{2}\right)\\ a = -0{,}1^2\ \pi\cdot\text{sen}\left(\pi\, t+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

t = 0,25 s:

- $v = 0{,}1\,\pi\cdot\cos\left(\pi\, 0{,}25+\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\,\pi\cdot\cos\frac{3\pi}{4} = -0{,}22\ {}^{m}\!/_{s}$
- $a = -0{,}1^2\ \pi\cdot\text{sen}\left(\pi\, 0{,}25+\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1\,\pi^2\cdot\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -0{,}698\ {}^{m}\!/_{s^2}$

Cuestión 3.

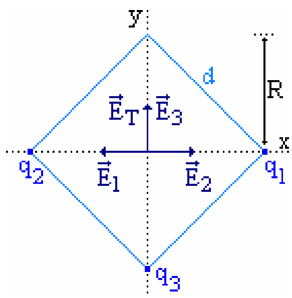
Se disponen tres cargas de 10 μC en 'tres de los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determine en el centro del cuadrado:

a) El módulo, la dirección y el sentido del vector campo eléctrico.

b) El potencial eléctrico. -,

Dato: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times 10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$

Solución.



a. La representación del sistema puede hacerse en la orientación que más nos interese, en este caso como aparece en la figura adjunta.

La distancia entre el centro y cualquier vértice (R) es:

$$R^2 + R^2 = d^2\ :\ \ 2R^2 = d^2\ :\ \ R = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

El módulo del campo eléctrico creado por una carga a una distancia r es:

$$E = k\cdot\frac{q}{r^2}$$

En el centro del cuadrado, por ser las tres cargas iguales y las distancias a los vértices iguales, los módulos de los tres campos son iguales:

$$E_1 = E_2 = E_3 = k \cdot \frac{q}{R^2} = 9 \times 10^9 \cdot \frac{10 \times 10^{-9}}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2} = 180 \frac{N}{C}$$

El vector intensidad del campo eléctrico total es la suma vectorial de los vectores intensidad de campo creados por cada una de las cargas.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -180\,\vec{i} + 180\,\vec{i} + 180\,\vec{j} = +180\,\vec{j}\,\frac{N}{C}$$

b. El potencial eléctrico es la suma escalar de los potenciales creados por cada una de las cargas, que son también iguales:

$$V_1 = V_2 = V_3 = k \cdot \frac{q}{r} = 10 \times 10^9 \cdot \frac{10 \times 10^{-9}}{1/\sqrt{2}} = 127{,}3 \text{ Voltios}$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 3 \cdot 127{,}3 = 381{,}9 \text{ Voltios}$$

Cuestión 4.

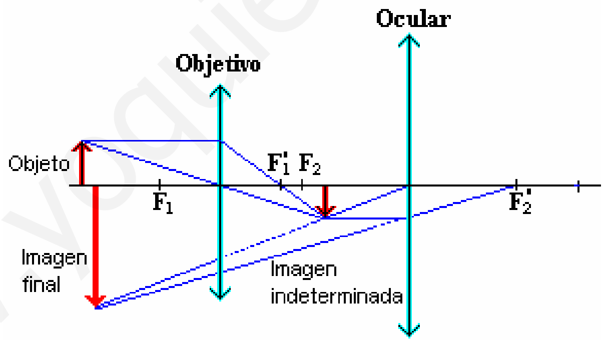
Un microscopio consta de dos lentes convergentes (objetivo y ocular).

a) Explique el papel que desempeña cada lente.
b) Realice un diagrama de rayos que describa el funcionamiento del microscopio.

Solución.

a. El microscopio óptico consta de dos lentes convergente de pequeña distancia focal. La lente más próxima al objeto se denomina objetivo, se encarga de formar una imagen real invertida y de mayor tamaño que el objeto. La lente más próxima al ojo se denomina ocular y es la que permite observar la imagen formada por el objetivo. La imagen final es virtual, invertida y de mayor tamaño que el objeto.

b. Diagrama de rayos



Cuestión 5.

La longitud de onda umbral de la luz utilizada para la emisión de electrones en un metal por efecto fotoeléctrico es la correspondiente al color amarillo. Explique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Iluminando con la luz amarilla umbral, si duplicamos la intensidad de luz duplicaremos también la energía cinética de los electrones emitidos.
b) Iluminando con luz ultravioleta no observaremos emisión de electrones.

Solución.

a) Falso. La luz amarilla umbral sólo arranca los electrones, no los aporta energía cinética, por definición de Umbral. En general, para una onda que produzca efecto fotoeléctrico sobre un metal, un aumento de intensidad no afecta a la energía cinética de los electrones emitidos, sino a la cantidad de los mismos.

b) Falso. Menor longitud de onda implica mayor frecuencia. La luz Ultravioleta tiene mayor frecuencia que la luz amarilla, por lo que la energía de un fotón ultravioleta, E = h. F, es mayor que la energía de un fotón Amarillo. Al iluminar con Ultravioleta se arrancarán electrones con energía cinética.

Luz	Longitudes de onda
Violeta	380 - 450 nm
Azul	450 - 495 nm
Verde	495 - 570 nm
Amarilla	570 - 590 nm
Naranja	590 - 620 nm
Rojo	620 - 750 nm

Segunda parte

REPERTORIO A

Problema 1.- En una muestra de azúcar hay $2{,}1\times10^{24}$ átomos de carbono. De éstos, uno de cada 10^{12} átomos corresponden al isótopo radiactivo ^{14}C. Como consecuencia de la presencia de dicho isótopo la actividad de la muestra de azúcar es de 8,1 Bq.

a) Calcule el número de átomos radiactivos iniciales de la muestra y la constante de desintegración radiactiva (λ) del ^{14}C.

b) ¿Cuántos años han de pasar para que la actividad sea inferior a 0,01 Bq?

Nota: 1 Bq = 1 desintegración/segundo

Solución.

a. El número de átomos radioactivos (^{14}C) es una proporción de la muestra tal como indica el enunciado.

$$\frac{^{14}C}{C}=\frac{1}{10^{12}} \Rightarrow \text{n}^{\text{o}}\text{ at } {}^{14}C=\frac{1}{10^{12}}\text{n}^{\text{o}}\text{ at C}=\frac{1}{10^{12}}\cdot 2{,}1\times10^{24}=2{,}1\times10^{12}$$

Con el número de átomos radioactivos iniciales y la actividad inicial de la muestra (A_o = 8,1 Bq) se calcula la constante de desintegración (λ).

$$A=\left|\frac{dN}{dt}\right|=\lambda N\ :\ \lambda=\frac{A_o}{N_o}=\frac{8{,}1\,{}^{at}\!/_{s}}{2{,}1\times10^{12}\text{ at}}=3{,}86\times10^{-12}\,s^{-1}$$

b. Teniendo en cuenta la relación existente entre el número de núcleos existentes y la actividad, para que la actividad sea menor a 0,01 Bq, el número de núcleos debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{r}A=\lambda N\\ A<0.01\end{array}\right\}:\lambda N<0{,}01\ :\ N<\frac{0{,}01}{3{,}86\times10^{-12}}=2{,}59\times10^{9}$$

El tiempo necesario para que el número de núcleos radioactivos se reduzca al nivel que marca la actividad pedida se puede obtener a partir de la expresión que relaciona el número de núcleos con el tiempo.

$$N=N_o\cdot e^{-\lambda t}\ :\ \frac{N}{N_o}=e^{-\lambda t}\ :\ \text{Ln}\frac{N}{N_o}=\text{Ln}\,e^{-\lambda t}\ :\ -\lambda t=\text{Ln}\frac{N}{N_o}\ :\ t=-\frac{1}{\lambda}\text{Ln}\frac{N}{N_o}$$

$$t=-\frac{1}{3{,}86\times10^{-12}}\text{Ln}\frac{2{,}59\times10^{9}}{2{,}1\times10^{12}}=1{,}74\times10^{12}\,s\approx 55175\text{ años}$$

Problema 2.- Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita

b) La energía potencial del satélite.

c) La energía mecánica del satélite.

d) La energía que habría que suministrar al satélite para que describa una órbita circular con radio doble que el de la órbita anterior.

Datos: Constante de Gravitación Universal. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

Solución.

a. Para que un satélite orbite en torno a un planeta, la fuerza de atracción gravitacional a la que se ve sometido debe ser igual a la fuerza centrípeta que desarrolla el satélite al girar en la órbita.

$$F_G = F_c \;:\; G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \;:\; r = G\frac{M}{v^2} = 6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}}{\left(7{,}5\times10^3\right)^2} = 7{,}09\times10^6\,\text{m}$$

b. La energía potencial de un satélite en órbita viene dada por la expresión:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot100}{7.09\times10^6} = 5{,}625\times10^9\,\text{J}$$

c. La energía mecánica del satélite es la suma de su energía potencial y de su energía cinética del en la órbita.

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = \left\{\begin{matrix} F_G = F_c \\ v^2 = G\frac{M}{r}\end{matrix}\right\} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2}6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot100}{7{,}09\times10^6} = -2{,}813\times10^9\,\text{J}$$

d. La energía que habrá que suministrar al satélite para que describa una órbita de doble radio es la diferencia de energía mecánica existente entre las dos órbitas.

$$\Delta E = E_m(2r) - E_m(r) = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{2r} - \left(-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{r} =$$

$$= -\frac{1}{4}6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot100}{7{,}09\times10^6} = 1{,}406\times10^9\,\text{J}$$

REPERTORIO B

Problema 1.- Una carga de +10 nC se distribuye homogéneamente en la región que delimitan dos esferas concéntricas de radios $r_l = 2$ cm y $r_2 = 4$ cm. Utilizando el teorema de Gauss, calcule:

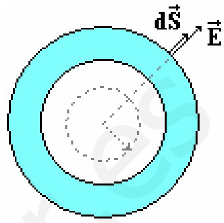
a) El módulo del campo eléctrico en un punto situado a 6 cm del centro de las esferas.

b) El módulo del campo eléctrico en un punto situado a 1 cm del centro de las esferas.

Dato: Permitividad eléctrica del vacío $\varepsilon_o = 8{,}85\times10^{-12}\ N^{-1}\ m^{-2}\ C^2$.

Solución.

Teorema de Gauss: El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.



Dada la simetría del sistema, en todos los puntos que equidistan del centro el campo eléctrico será radial y del mismo valor, por lo que interesa coger como superficie de integración una esfera centrada en el origen.

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\circ d\vec{S} = \left\{\begin{matrix}\vec{E}\ \text{paralelo}\ d\vec{S}\\ \cos 0 = 1\end{matrix}\right\} = \oint_S E\, dS = \left\{\begin{matrix}\text{Ley de Coulomb}\\ E = K\dfrac{Q}{r^2}\end{matrix}\right\} = K\frac{Q}{r^2}\oint_S dS = K\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = 4\pi K Q = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

a. El flujo a través de una superficie esférica es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\circ d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2$$

Según el teorema de Gauss, el flujo tiene un valor:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

De ambas expresiones se deduce:

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}\ :\ E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{Q}{r^2}$$

Utilizando los datos del enunciado:

$$r = 0{,}06\ \text{m.} \qquad q_{encerrada} = 10\times10^{-9}\,C$$

$$E = \frac{1}{4\pi\, 8{,}85\times10^{-12}}\,\frac{10\times10^{-9}}{0{,}06^2} = 24977\,\frac{N}{C}$$

b. $r = 0{,}02$ m $\qquad q_{encerrada} = 0$

$$E = \frac{1}{4\pi\, 8{,}85\times10^{-12}}\,\frac{0}{0{,}06^2} = 0\,\frac{N}{C}$$

Problema 2.- Una onda armónica transversal se propaga en una cuerda tensa de gran longitud y está representada por la siguiente expresión:

$$y = 0{,}5 \text{ sen } (2\pi\, t - \pi\, x + \pi) \qquad \text{(x e y en metros y t en segundos)}$$

Determine:

a) La longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) La diferencia de fase en un mismo instante entre las vibraciones de dos puntos separados entre sí $\Delta x = 1$ m.

c) La diferencia de fase de oscilación para dos posiciones de un mismo punto de la cuerda cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.

d) La velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

Solución.

a. La longitud de onda se obtiene a partir del número de onda, y este por comparación de la ecuación general $\left(y = A \text{ sen } (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_o)\right)$ con la ecuación de la onda.

$$\left.\begin{array}{r} y = A\text{sen}\left(\omega\, t - k\, x + \varphi_o\right) \\ y = 0{,}5\text{ sen}\left(2\pi\, t - \pi\, x + \pi\right) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1} \\ k = \pi \text{ m}^{-1} \\ \varphi_o = \pi \text{ rad} \end{array}\right.$$

El número de onda (k) se define como el número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ : \ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ m}$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

El periodo se calcula a partir de la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \ : \ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ s}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2}{1} = 2 \ {}^{m}\!/_{s}$$

b. Para un punto cualquiera su fase es: $\varphi(x, t) = 2\pi\, t - \pi\, x + \pi$, para otro punto situado a 1 m del anterior su fase es: $\varphi(x+1, t) = 2\pi\, t - \pi\,(x+1) + \pi$. La diferencia de fase entre ellos será:

$$\Delta\varphi = \left|\varphi(x+1, t) - \varphi(x, t)\right| = \left|2\pi\, t - \pi\,(x+1) + \pi - (2\pi\, t - \pi\, x + \pi)\right| = \pi \text{ rad}$$

c. Para un punto cualquiera su fase es: $\varphi(x, t) = 2\pi\, t - \pi\, x + \pi$, para ese mismo punto, en el instante $t + 2$ su fase es: $\varphi(x, t+2) = 2\pi\,(t+2) - \pi\, x + \pi$. La diferencia de fase entre ellos será:

$$\Delta\varphi = \left|\varphi(x, t+2) - \varphi(x, t)\right| = \left|2\pi\,(t+2) - \pi\, x + \pi - (2\pi\, t - \pi\, x + \pi)\right| = 4\pi \text{ rad}$$

d. La velocidad de vibración de in punto viene dado por la expresión:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}5 \text{ sen}\left(2\pi\, t - \pi\, x + \pi\right)\right) = 0{,}5 \cos\left(2\pi\, t - \pi\, x + \pi\right) \cdot 2\pi = \pi \cos\left(2\pi\, t - \pi\, x + \pi\right)$$

La velocidad máxima se alcanza cuando la componente trigonométrica valga 1.

$$v_{máx} = \pi \ {}^{m}\!/_{s}$$