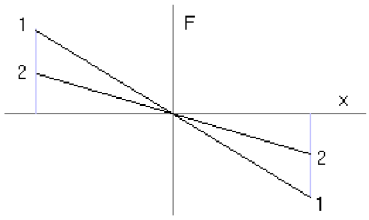
P. A. U. FÍSICA Madrid Septiembre 2005

CUESTIÓN 1.- Se tienen dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2 en cuyos extremos se disponen dos masas m_1 y m_2 respectivamente, siendo $m_1 < m_2$. Al oscilar, las fuerzas que actúan sobre cada una de estas masas en función de la elongación aparecen representadas en la figura. ¿ Cuál es el muelle de mayor constante elástica ?. ¿ Cuál de estas masas tendrá mayor período de oscilación ?.



Solución: En todo sistema elástico la fuerza es proporcional y opuesta a la deformación, $F = - k \cdot x$, siendo la representación gráfica de esta función un recta de pendiente negativa que pasa por el origen de coordenadas. Por tanto, según la gráfica, es el muelle 1 el que posee mayor constante elástica: $k_1 > k_2$

La aceleración de la masa será $a = F / m = - (k / m) \cdot x$ La aceleración es proporcional y opuesta a la posición, ecuación característica del movimiento armónico simple, y por tanto:

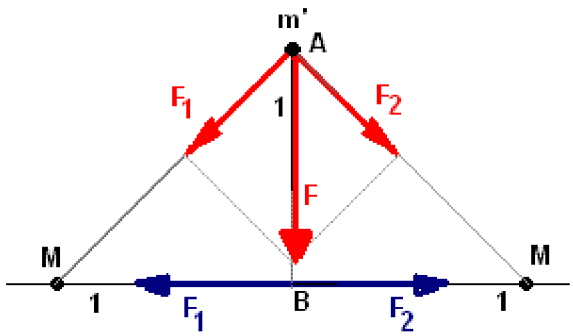
$$w^2 = k / m \quad \rightarrow \quad (2.\pi / T)^2 = k / m \quad \rightarrow \quad T = 2.\pi .\sqrt{(m/k)}$$

Para saber qué periodo es mayor se parte de uno de ellos y se cambian sus variables por las del otro :

$$T_1 = 2.\pi .\sqrt{(m_1 / k_1)} < 2.\pi . \sqrt{(m_1 / k_2)} < 2.\pi . \sqrt{(m_2 / k_2)} = T_2 \quad \rightarrow \quad T_1 < T_2$$

CUESTIÓN 2.- Dos masas iguales de 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según la figura. Una tercera masa m' de 0'2 kg se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a 1m del punto medio (AB = 1 m). Si sólo actúan las acciones gravitatorias, determinar, siendo $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ $N.m^2/ kg^2$:

a) **La fuerza ejercida sobre m' en el punto inicial A**
b) **Las aceleraciones de m' en A y en B**



Solución:

Al ser las masas iguales y por estar m' en la mediatriz , las fuerzas F_1 y F_2 son iuales.

En el punto A las fuerzas forman un ángulo de 90º , por lo que la fuerza resultante, suma de F_1 y F_2 , tendrá la dirección de la mediatriz , el sentido hacia el punto B y su valor será:

$$F_1 = F_2 = G \cdot (M \cdot m') / r^2 = 6'67.10^{-11} \cdot 20 \cdot 0'2 / (\sqrt{2})^2 = 1'334.10^{-10} \text{ N}$$

$$F = \sqrt{(F_1^2 + F_2^2)} = 1'887.10^{-10} \text{ N}$$

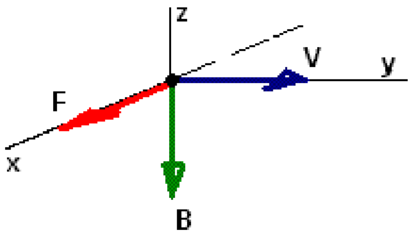
$$a = F / m' = 1'887.10^{-10} / 0'2 = 9'433.10^{-10} \text{ m/s}^2 \text{ con igual sentido que F}$$

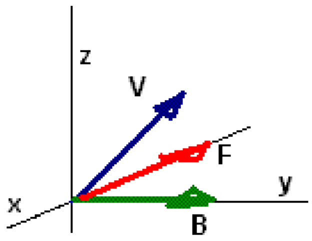
En el punto B, las fuerzas son iguales y opuestas por lo que la fuerza resultante será nula y también la aceleración.

CUESTIÓN 3.-Una partícula cargada penetra con velocidad v en una región en la que existe un campo magnético uniforme B. Determinar la expresión de la fuerza sobre la partícula en los casos:

a) **La carga es negativa, la velocidad es** $\mathbf{v} = v_o\,\mathbf{j}$ **y el campo magnético es** $\mathbf{B} = -B_o\,\mathbf{k}$
b) **La carga es positiva, la velocidad es** $\mathbf{v} = v_o\,(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ **y el campo es** $\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{j}$

Solución:





La fuerza viene dada por el producto vectorial: $\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$

a) En este caso el producto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ tiene el sentido $-\mathbf{i}$, pero al ser la carga negativa la fuerza tendrá el sentido $+\mathbf{i}$

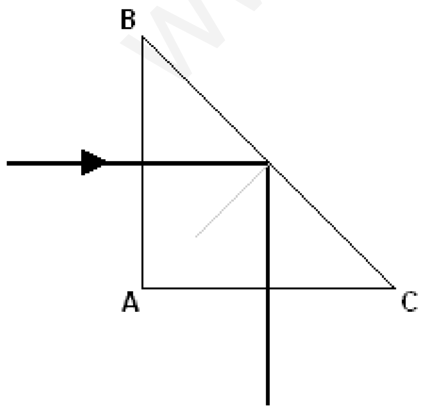
$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = -|q| \cdot [(v_o\,\mathbf{j}) \wedge (-B_o\,\mathbf{k})] = |q| \cdot v_o \cdot B_o \cdot (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = |q| \cdot v_o \cdot B_o \cdot \mathbf{i}$$

En este caso el sentido de la fuerza es $-\mathbf{i}$

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = |q| \cdot [v_o\,(\mathbf{j} + \mathbf{k}) \wedge (B_0\,\mathbf{j})] = |q| \cdot v_o \cdot B_o \cdot (-\mathbf{i}) = -|q| \cdot v_o \cdot B_o \cdot \mathbf{i}$$

CUESTIÓN 4.-Se tiene un prisma óptico de índice de refracción 1'5 inmerso en el aire. La sección del prisma es un triángulo rectángulo isósceles. Un rayo luminoso incide perpendicularmente sobre la cara AB del prisma. ¿ Se produce o no reflexión total en la cara BC del prisma ¿?. Realice un esquema gráfico de la trayectoria del rayo a través del prisma, determinando la dirección del rayo emergente.

Al incidir el rayo perpendicularmente a la cara AB, el ángulo con la normal, o de incidencia es nulo, siendo por tanto nulo el ángulo de refracción, el rayo no cambia de dirección al entrar en el prisma e incide en la cara interna BC con un ángulo respecto a la normal de 45º, por ser la sección del prisma un triángulo rectángulo isósceles.



El ángulo límite para esta cara interna BC es:

$$1'5 \cdot \text{sen } a = 1 \cdot \text{sen } 90 \quad \rightarrow \quad \text{sen } a = 0'6667 \quad \rightarrow \quad a = 41'8^{\circ}$$

Al incidir con un ángulo superior al límite todo el rayo se refleja en la superficie saliendo con un ángulo de 45º respecto a la normal, siguiendo en línea recta hasta incidir en la cara interna AC con un ángulo de 0º respecto a la normal, por lo que sale sin cambiar de dirección.

CUESTIÓN 5.-Un protón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 V. Determinar:

a) **La energía que adquiere el protón expresada en eV y su velocidad en m/s**
b) **La longitud de onda de De Broglie asociada al protón con la velocidad anterior.**

Constante de Panck $6'63 \cdot 10^{-34}$ J.s, Masa del protón $1'67 \cdot 10^{-27}$ kg, Carga del protón $1'6.10^{-19}$ C

El trabajo que realiza el campo eléctrico se convierte en variar la energía cinética de la carga:

$$q \cdot V = E_c - E_{co}\ ,\ \text{en este caso la velocidad inicial } v_o \text{ es nula } \rightarrow$$

$$E_c = q \cdot V = 1\ e \cdot 10\ V = 10\ eV = 1'6.10^{-19} \cdot 10 = 1'6.10^{-18}\ \text{Julios}$$

$$E_c = ½ \cdot m \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\ (2 \cdot E_c / m)} = \sqrt{\ (2 \cdot 1'6.10^{-18} / 1'67.10^{-31})} = 4'38.10^6\ m/s\ \approx 0'15.c$$

La velocidad es pequeña comparada con la velocidad de la luz, no tiene carácter relativista por lo que la expresión aplicada es correcta.

La longitud de onda de De Broglie viene dada por la expresión:

$$\lambda = h / p = h / (m.v) = 6'63 \cdot 10^{-34} / (1'67 \cdot 10^{-27} \cdot 4'38.10^6) = 9'06.10^{-14}\ m$$

REPERTORIO A, PROBLEMA 1.-Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a 7/6 veces el radio terrestre. Calcular:

a) **La intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite.**
b) **La velocidad y el período del satélite.**
c) **La energía mecánica del satélite.**
d) **La variación de energía potencial que ha experimentado el satélite.**

Datos: $G = 6'67.10^{-11}\ N.m^2/kg^2$, $M_T = 5'98.10^{24}$ kg , $R_T = 6'37.10^6$ m

El radio de la órbita es: $r = 7 \cdot R_T / 6 = 7'4317.10^6$ m

$g = G \cdot M_T / r^2 = 6'67.10^{-11} \cdot 5'98.10^{24} / (7'4317.10^6)^2 = 7'222\ m/s^2$

Para que la órbita sea estacionaria la Fuerza de atracción debe ser la fuerza centrípeta necesaria para tomar esa curva, es decir:

$G \cdot M_T \cdot m / r^2 = m \cdot v^2 / r \ \rightarrow\ v = \sqrt{(\ G \cdot M_T / r)} = \sqrt{(\ 6'67.10^{-11} \cdot 5'98.10^{24} / 7'4317.10^6)} = 7326\ m/s$

El período será: $V = 2 \cdot \pi \cdot r / T \quad \rightarrow\ T = 2 \cdot \pi \cdot r / V = 2 \cdot \pi \cdot 7'4317.10^6 / 7326 = 6374\ s$

La energía mecánica en una órbita circular es:

$$E_m = -\ ½\ G \cdot M_T \cdot m / r = -\ ½\ \ 6'67.10^{-11} \cdot 5'98.10^{24} \cdot 400 / 7'4317.10^6 = -1'07.10^{10}\ J$$

La energía potencial viene dada por la expresión: $E_p = -\ G \cdot M_T \cdot m / r$

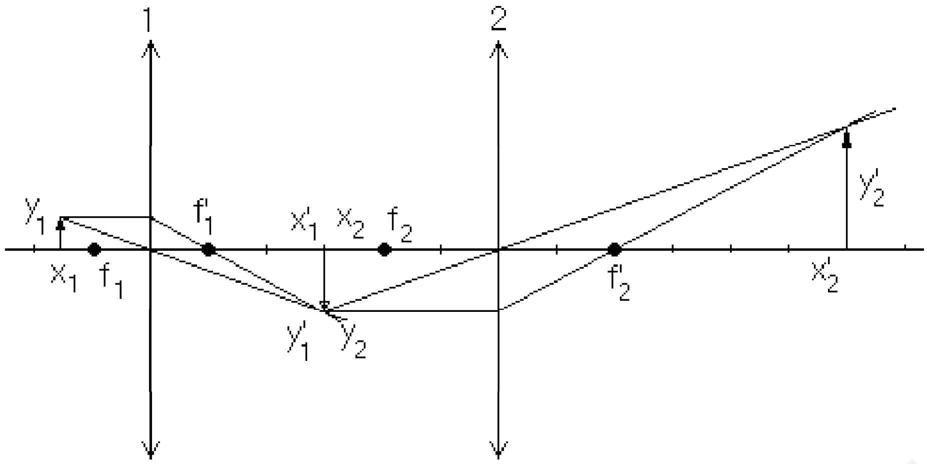
$$\text{En el suelo: } E_{po} = -\ \ 6'67.10^{-11} \cdot 5'98.10^{24} \cdot 400 / 6'37.10^6 = -\ 2'5.10^{10}\ J$$

$$\text{En la órbita: } E_p = -\ 6'67.10^{-11} \cdot 5'98.10^{24} \cdot 400 / 7'4317.10^6 = -\ 2'15.10^{10}\ J$$

La variación será: $E_{po} - E_p = -\ 2'5.10^{10} - (-\ 2'15.10^{10}) = -\ 3'5.10^9\ J$

REPERTORIO A, PROBLEMA 2.- Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas convergentes, de distancias focales 10 cm y 20 cm la segunda, separadas una distancia de 60 cm. Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado 15 cm delante de la primera lente.

a) **Calcular la posición y el tamaño de la imagen final del sistema.**
b) **Efectuar la construcción geométrica de la imagen final.**



Las ecuaciones de las lentes delgadas son:

$$1 / x' - 1 / x = 1 / f'$$

$$A = y' / y = x' / x$$

Aplicando a cada lente las ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que la imagen producida por la primera lente es el objeto de la segunda:

$1 /x'_1 – 1 /(-15) = 1 /10 \rightarrow 1 / x'_1 = 1/10 – 1/15 = 1/30 \rightarrow x'_1 = 30$ cm $\rightarrow |x_2|= 60 – 30 = 30 \rightarrow x_2 = -30$ cm

$A_1 = y'_1 / 0'2 = 30/(-15) = - 2 \rightarrow y'_1 = - 0'4$ cm, imagen real, invertida y mayor $\rightarrow y_1 = - 0'4$ cm

$1 / x'_2 – 1 / (-30) = 1 / 20 \rightarrow 1 / x'_2 = 1/20 – 1/30 = 1/60 \rightarrow x'_2 = 60$ cm

$A_2 = y'_2 / (-0'4) = 60/(-30) = - 2 \rightarrow y'_2 = 0'8$ cm, imagen real, invertida y mayor

La imagen final, respecto al objeto inicial es real, derecha y 4 veces mayor

REPERTORIO B, PROBLEMA 1.- Dada la expresión matemática en unidades del S.I. de una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa de gran longitud:

$$\mathbf{y = 0'03 . sen (2.\pi.t - \pi.x) ,}$$

a) **Cuál es la velocidad de propagación de la onda.**
b) **Cuál es la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda, y su velocidad máxima.**
c) **Para t = 0, cuál es el valor del desplazamiento de los puntos cuando x = 0’5 m y x = 1 m**
d) **Para x = 1 m , cuál es el desplazamiento cuando t = 0’5 s**

Solución:

$v = w / k = 2.\pi / \pi = 2$ m/s

$V_{oscilación} = y' = 0'03 \cdot 2.\pi \cdot \cos (2.\pi.t - \pi.x) = 0'19 \cdot \cos (2.\pi.t - \pi.x)$

siendo su valor máximo 0’19 m/s

En el instante inicial t = 0, los desplazamientos valdrán:

$$y(t=0,x=0'5) = 0'03 . sen (2.\pi.0 - \pi.0'5) = 0'03 . sen (- \pi.0'5) = - 0'03 \text{ m}$$

$$y(t=0,x=1) = 0'03 . sen (2.\pi.0 - \pi.1) = 0'03 . sen (- \pi) = 0 \text{ m}$$

En x = 1m y t = 0’5 s :

$$y(t=0'5,x=1) = 0'03 . sen (2.\pi.0'5 - \pi.1) = 0'03 . sen (0) = 0 \text{ m}$$

REPERTORIO B, PROBLEMA 2.- Una espira circular de 0’2 m de radio se sitúa en un campo magnético uniforme de 0’2 T con su eje paralelo a la dirección del campo. Determinar la fuerza electromotriz inducida en la espira si en 0’1 s y de manera uniforme:

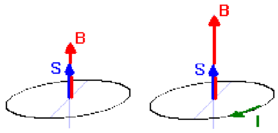
a) Se duplica el valor del campo.
b) Se reduce el valor del campo a cero.
c) Se invierte el sentido del campo.
d) Se gira la espira 90º en torno a un eje diametral perpendicular al campo.

La superficie de la espira es: $S = \pi . r^2 = \pi . 0'2^2 = 0'126\ m^2$
El flujo magnético que atraviesa la espira es: $\Phi_i = B.S. \cos\theta = 0'2 . 0'126 . \cos 0 = 0'025$ Wb

La fuerza electromotriz inducida es igual y opuesta a la variación del flujo magnético en la unidad de tiempo; si la variación del flujo es uniforme:

$$V = - d\Phi / dt = - (\Phi_f - \Phi_i) / t$$

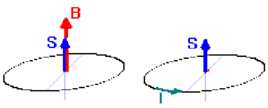
a)



$\Phi_f = B.S. \cos\theta = 0'4 . 0'126 . \cos 0 = 0'050$ Wb

$V = - (\Phi_f - \Phi_i) / t = - (0'050 – 0'025) / 0'1 = - 0'25$ Voltios

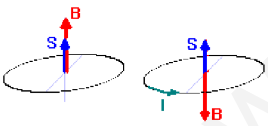
b)



$\Phi_f = B.S. \cos\theta = 0 . 0'126 . \cos 0 = 0$ Wb

$V = - (\Phi_f - \Phi_i) / t = - (0 – 0'025) / 0'1 = 0'25$ Voltios

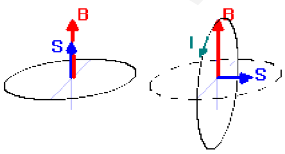
c)



$\Phi_f = B.S. \cos\theta = 0'2 . 0'126 . \cos 180 = - 0'025$ Wb

$V = - (\Phi_f - \Phi_i) / t = - (- 0'025 – 0'025) / 0'1 = 0'5$ Voltios

d)



$\Phi_f = B.S. \cos\theta = 0'2 . 0'126 . \cos 90 = 0$ Wb

$V = - (\Phi_f - \Phi_i) / t = - (0 – 0'025) / 0'1 = 0'25$ Voltios