UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
FÍSICA (Fase específica)
Junio 2010

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN.
La prueba consta de dos opciones A y B, cada una de las cuales incluye tres cuestiones y dos problemas.
El alumno deberá elegir la opción A o la opción B. Nunca se deben resolver cuestiones o problemas de opciones distintas. Se podrá hacer uso de calculadora científica no programable.
CALIFICACIÓN: Cada cuestión debidamente justificada y razonada con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos. Cada problema debidamente planteado y desarrollado con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos. En aquellas cuestiones y problemas' que consten de varios apartados, la calificación será la misma para todos ellos.
TIEMPO: Una hora treinta minutos.

OPCIÓN A

Cuestión 1.-

a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.

b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

Solución.

a. La energía cinética se expresa como:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

La velocidad del satélite en su órbita se puede expresar en función de la masa del planeta y del radio de la órbita, teniendo en cuenta que la fuerza de atracción gravitacional es igual a la fuerza centrípeta a la que se ve sometido el satélite en su órbita.

$$F_G = F_c$$

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot a_N$$

Teniendo en cuenta que $a_N = \frac{v^2}{R}$, se despeja la velocidad.

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R} \ : \ v^2 = G\frac{M}{R}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2} m\, G\frac{M}{R} = \frac{1}{2} G\frac{M\,m}{R}$$

b. La energía mecánica de un satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

Por definición la energía potencial de un satélite en su órbita alrededor de un planeta viene expresado por:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

La energía mecánica del satélite será la suma de su energía potencial y cinética.

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(-G\frac{M\,m}{r}\right)}_{E_p} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}\cdot E_p$$

Cuestión 2.- Un protón y un electrón se mueven en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ bajo la acción del mismo. Si la velocidad del electrón es 8 veces mayor que la del protón y ambas son perpendiculares a las líneas del campo magnético, deduzca la relación numérica existente entre:

a) Los radios de las órbitas que describen.

b) Los periodos orbitales de las mismas.

Dato: Se *considera que la masa del protón* es *1836 veces la masa del electrón.*

Solución.

a. Si ambas partículas describen una trayectoria circula será porque:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R} \;;\; q \cdot B = m \cdot \frac{v}{R} \;;\; R = \frac{m\,v}{q\,B}$$

Aplicando la ecuación a cada partícula y comparando:

$$\left.\begin{aligned} R_{p^+} &= \frac{m_{p^+}\,v_{p^+}}{q_{p^+}\,B} \\ R_{e^-} &= \frac{m_{e^-}\,v_{e^-}}{q_{e^-}\,B} \end{aligned}\right\} : \frac{R_{p^+}}{R_{e^-}} = \frac{\dfrac{m_{p^+}\,v_{p^+}}{q_{p^-}\,B}}{\dfrac{m_{e^-}\,v_{e^-}}{q_{e^-}\,B}} = \left\{ \left|q_{p^-}\right| = \left|q_{e^-}\right| \right\} = \frac{m_{p^+}\,v_{p^+}}{m_{e^-}\,v_{e^-}} = \left\{ \begin{aligned} m_{p^+} &= 1836\,m_{e^-} \\ v_{e^-} &= 8v_{p^+} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1836\,m_{e^-}\,v_{p^+}}{m_{e^-}\,8v_{p^+}} = \left\{ \begin{aligned} m_{p^+} &= 1836\,m_{e^-} \\ v_{e^-} &= 8v_{p^+} \end{aligned} \right\} = \frac{1836}{8} = \frac{459}{2}$$

$$\frac{R_{p^+}}{R_{e^-}} = \frac{459}{2}$$

b. Partiendo de la misma igualdad que en el apartado a:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R} : \; \{v = \omega \cdot R\} : \; q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} : \; q \cdot v \cdot B = m \cdot \omega^2 \cdot R : \left\{ \omega = \frac{2\pi}{T} \right\} :$$

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R : \; T^2 = \frac{4m\pi^2 R}{qvB}$$

$$\left.\begin{aligned} T_{p^+}^2 &= \frac{4m_{p^+}\pi^2 R_{p^+}}{q_{p^+} v_{p^+} B} \\ T_{e^-}^2 &= \frac{4m_{e^-}\pi^2 R_{e^-}}{q_{e^-} v_{e^-} B} \end{aligned}\right\} : \frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = \frac{\dfrac{4m_{p^+}\pi^2 R_{p^+}}{q_{p^+} v_{p^+} B}}{\dfrac{4m_{e^-}\pi^2 R_{e^-}}{q_{e^-} v_{e^-} B}} : \; \frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = \frac{m_{p^+} v_{e^-}}{m_{e^-} v_{p^+}} \cdot \frac{R_{p^+}}{R_{e^-}}$$

$$\frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = \frac{1836 m_{e^-} 8v_{p^+}}{m_{e^-} v_{p^+}} \cdot \frac{R_{p^+}}{R_{e^-}} \; : \; \frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = 1836 \cdot 8 \cdot \frac{1836}{8} \; : \; \frac{T_{p^+}}{T_{e^-}} = 1836$$

Cuestión 3.-
Dos partículas poseen la misma energía cinética. Determine en los dos casos siguientes:

a) La relación entre las longitudes de onda de De Broglie correspondientes a las dos partículas, si la relación entre sus masas es $m_1 = 50\ m_2$.

b) La relación que existe entre las velocidades, si la relación entre sus longitudes de onda de De Broglie es $\lambda_1 = 500\ \lambda_2$.

Solución.

a. Se define la longitud de onda de De Broglie como:

$$\lambda_{DB} = \lambda = \frac{h}{mv}$$

La relación entre las longitudes de onda de De Broglie para las dos partículas es:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\dfrac{h}{m_1 v_1}}{\dfrac{h}{m_2 v_2}} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1}$$

La relación entre las velocidades se obtiene mediante la relación entre las energías cinéticas de las dos partículas

$$E_c(1) = E_c(2)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \ : \ \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{50 m_1}{m_2} = 50 \ : \ \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{50}$$

Sustituyendo en la relación entre las longitudes de onda:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_2}{50 m_2} \sqrt{50} = \frac{\sqrt{50}}{50} = \frac{5\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

b. Partiendo de la relación entre las longitudes de onda del apartado anterior:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = 500 \ : \ \frac{v_2}{v_1} = 500 \frac{m_1}{m_2}$$

La relación entre las masas se obtiene de la igualdad de sus energías cinéticas.

$$E_c(1) = E_c(2)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \ : \ \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}$$

Sustituyendo en la relación de las velocidades:

$$\frac{v_2}{v_1} = 500 \frac{v_2^2}{v_1^2} \ : \ \frac{v_1}{v_2} = 500$$

Problema 1.- Una onda armónica transversal, de periodo T = 2 s, se propaga con una velocidad de 60 cm/s en una cuerda tensa orientada según el eje X, y en sentido positivo.
Sabiendo que el punto de la cuerda de abscisa x = 30 cm oscila en la dirección del eje Y, de forma que en el instante t = 1 s la elongación es nula y la velocidad con la que oscila positiva y en el instante t = 1,5 s su elongación es –5 cm y su velocidad de oscilación nula, determine:

a) La frecuencia y la longitud de onda.

b) La fase inicial y la amplitud de la onda armónica.

c) La expresión matemática de la onda armónica.

d) La diferencia de fase de oscilación de dos puntos de la cuerda separados un cuarto de longitud de onda.

Solución.

a. La frecuencia (ν) es inversa al periodo y a la velocidad de la onda.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5\text{Hz}$$

$$v = \lambda \cdot \nu \ ; \ \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{60 \times 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}}{0{,}5\ \text{s}^{-1}} = 1{,}2\ \text{m}$$

b. La ecuación de una onda transversal es:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k\,x + \varphi_o)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \,\text{rad}/_{s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}2} = \frac{5\pi}{3}$$

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}x + \varphi_o\right)$$

$$x = 0{,}3\,\text{m};\ t = 1\,\text{s}: \begin{cases} y = 0 \\ v > 0 \end{cases} : 0 = A\,\text{sen}\left(\pi 1 - \frac{5\pi}{3}0{,}3 + \varphi_o\right);\ A\,\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \varphi_o\right) = 0;\ A\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_o\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_o\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \varphi_o = 0:\ \varphi_o = -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} + \varphi_o = \pi:\ \varphi_o = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right) \ \text{ó}\ \ y(x,t) = A\,\text{sen}\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para diferenciar entre los desfases se tiene en cuenta el dato de que la velocidad es positiva.

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = A\,\omega\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{3}x \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(0'3,1) = A\omega\cos\left(\pi\cdot 1 - \frac{5\pi}{3}\cdot 0{,}3 \pm \frac{\pi}{2}\right) = A\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Si el desfase es positivo: $v(0'3,1) = A\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega\cos\pi < 0$

Si el desfase es negativo: $v(0'3,1) = A\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = A\omega\cos 0 > 0$

Conclusión el desfase es $\varphi_o = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$

$$x = 0{,}3\,\text{m};\ t = 1{,}5\,\text{s}: \begin{cases} y = -0{,}05 \\ v = 0 \end{cases} : -0{,}05 = A\,\text{sen}\left(\pi\frac{3}{2} - \frac{5\pi}{3}0{,}3 - \frac{\pi}{2}\right);\ A\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}05$$

$$A\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}05\ :\ A = -0{,}05\,\text{m}$$

La amplitud de una onda no puede ser negativa, diferente es la elongación que puede oscilar entre −A y +A, por lo tanto la única explicación es que el problema está mal planteado.

c. La ecuación de una onda transversal es:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k\,x + \varphi_o)$$

Según los datos obtenidos en los apartados anteriores la ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = -0{,}05\,\text{sen}\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

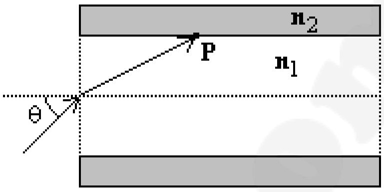
Por lo explicado en el apartado anterior, **la expresión no tiene sentido**, podríamos haber optado por considerar la amplitud en valor absoluto y ponerla en positivo, pero en este caso, la ecuación no cumpliría las condiciones propuestas.

d. La diferencia de fase entre dos puntos (1 y 2) de la cuerda:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega\,t - k\,x_2 + \varphi_o - (\omega\,t - k\,x_1 + \varphi_o) = k\,(x_2 - x_1) = k\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} = \frac{1{,}2}{4} = 0{,}3\ \Rightarrow\ \Delta\varphi = k\,\Delta x = \frac{5\pi}{3}\cdot 0{,}3 = \frac{\pi}{2}$$

Problema 2.- Un rayo de luz de longitud de onda en el vacío $\lambda_o =$ 650 nm incide desde el aire sobre el extremo de una fibra óptica formando un ángulo θ con el eje de la fibra (ver figura), siendo el índice de refracción n_1 dentro de la fibra 1'48.



a) ¿Cual es la longitud de onda de la luz dentro de la fibra?

b) La fibra está revestida de un material de índice de refracción n_2 = 1,44. ¿Cuál es el valor máximo del ángulo θ para que se produzca reflexión total interna en P?

Solución.

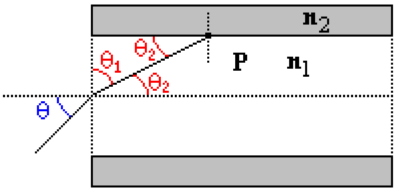
a. El índice de refracción absoluto de un medio material es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad en dicho medio v.

$$n = \frac{c}{v}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad es el producto de la longitud de onda por la frecuencia y que la frecuencia no varía al cambiar de medio:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_o \cdot f}{\lambda \cdot f} = \frac{\lambda_o}{\lambda} \ : \ 1{,}48 = \frac{650\times10^{-9}}{\lambda} \ : \ \lambda = \frac{650\times10^{-9}}{1{,}48} \approx 439\times10^{-9}\ \text{m}$$

b. Para que se produzca reflexión total (θ =90º), el ángulo θ_2 debe ser menor que el ángulo límite.



Ángulo límite:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2 = n_2 \cdot \text{sen}\,90^\circ \ : \ \text{sen}\,\theta_2 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}44}{1{,}48} = 0{,}973$$

$$\theta_2 = \text{arcsen}\,0{,}973 = 76{,}65^\circ$$

Mediante la ecuación de Snell se puede relacionar θ_2 con θ, para lo cual es necesario relacionar θ_2 con θ_1.

$$\left.\begin{array}{r} n \cdot \text{sen}\,\theta = n_1 \cdot \text{sen}\,\theta_1 \\ \theta_1 = 90 - \theta_2 \end{array}\right\} : \ n \cdot \text{sen}\,\theta = n_1 \cdot \text{sen}\,(90 - \theta_2)$$

$$1 \cdot \text{sen}\,\theta = 1{,}48 \cdot \text{sen}\,(90 - 76{,}65) \ : \ \text{sen}\,\theta = 0{,}3417 \quad \theta = 19{,}98^\circ \approx 20^\circ$$

OPCIÓN B

Cuestión 1.- Una partícula realiza un movimiento armónico simple. Si la frecuencia de oscilación se reduce a la mitad manteniendo constante la amplitud de oscilación, explique qué ocurre con: **a)** el periodo; **b)** la velocidad máxima; **c)** la aceleración máxima y **d)** la energía mecánica de la partícula.

Solución.

$$f = \frac{f_o}{2}$$

a. Periodo. El periodo es inverso a la frecuencia

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_o/2} = 2\frac{1}{f_o} = 2T_o$$

El periodo se duplica.

b. Velocidad máxima. Para un movimiento armónico simple, la velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$v = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)\right) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_o)$$

La velocidad será máxima cuando la componente trigonométrica sea 1

$$v_{máx} = A\omega$$

La velocidad angular se puede expresar en función de la frecuencia ($\omega = 2\pi f$).

$$v_{máx} = A2\pi f = 2\pi A f$$

$$v_{máx} = 2\pi A f = 2\pi A\frac{f_o}{2} = \frac{2\pi A f_o}{2} = \frac{v_{máx_o}}{2}$$

La velocidad máxima se reduce a la mitad.

c. Aceleración máxima. Siguiendo un procedimiento análogo al apartado anterior de calcula la aceleración máxima.

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos(\omega t + \varphi_o)\right) = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$$

$$a = a_{máx} \Leftrightarrow \text{sen}\,(\omega t + \varphi_o) = 1$$

$$a_{máx} = -A\omega^2$$

Sustituyendo ω por $2\pi f$:

$$a_{máx} = -A(2\pi f)^2 = -4\pi^2 A f^2 = -4\pi^2 A\left(\frac{f_o}{2}\right)^2 = \frac{-4\pi^2 A f_o^2}{4} = \frac{a_{máx_o}}{4}$$

La aceleración máxima se reduce la cuarta parte.

d. Energía mecánica. $E_m = \frac{1}{2}k\cdot A^2$ La dinámica permite expresar k en función de ω y m ($k = \omega^2 m$).

$$E_m = \frac{1}{2}\omega^2 m\cdot A^2 = \{\omega = 2\pi f\} = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 m\cdot A^2 = 2\pi^2 f^2 mA^2$$

$$E_m = 2\pi^2 f^2 mA^2 = 2\pi^2\left(\frac{f_o}{2}\right)^2 mA^2 = \frac{2\pi^2 f_o^2 mA^2}{4} = \frac{E_{m_o}}{4}$$

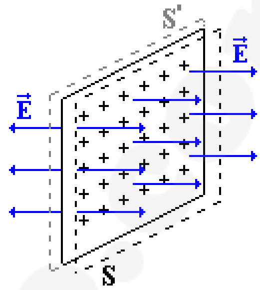
La energía mecánica se reduce la cuarta parte.

Cuestión 2.-

a) Enuncie y exprese matemáticamente el teorema de Gauss.

b) Deduzca la expresión del módulo del campo eléctrico creado por una lámina plana, infinita, uniformemente cargada con una densidad superficial de carga σ.

Solución.



a. Teorema de Gauss. El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \circ d\,\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

b. En un plano infinito de carga constante la superficie gaussiana elegida tiene forma de un paralelepípedo como el que muestra la figura, y por lo tanto habrá flujo a través de las superficies S y S'(S = S') paralelas al plano cargado. Aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta que el campo es constante y paralelo al vector de superficie:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \circ d\,\vec{S} = \oint_S E\,dS = E\oint_S dS + E\oint_{S'} dS = E\,S + E\,S' = 2E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_o} = \left\{\frac{Q}{S} = \sigma\right\} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Expresión de la que se deduce que el campo e un punto del plano cargado es independiente de la distancia.

Cuestión 3.-

Una radiación monocromática de longitud de onda de 600 nm incide sobre un metal cuyo trabajo de extracción es de 2 eV Determine:

a) La longitud de onda umbral para el efecto fotoeléctrico.

b) La energía cinética máxima de los electrones emitidos expresada en eV

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón e = *1,6×1O*$^{-19}$ C

Constante de Planck h = 6,63 × 10^{-34} *J s; Velocidad de la luz en el vacío c = 3 × 10*^{8} *m s*$^{-1}$

Solución.

a. Aplicando la ecuación de Planck y la relación entre la frecuencia y la longitud de onda:

$$\left.\begin{array}{l} E = h\cdot\nu \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} : E = h\cdot\frac{c}{\lambda} \;:\; \lambda = h\cdot\frac{c}{E}$$

La energía es la correspondiente al trabajo de extracción, y debe expresarse en el sistema internacional.

$$E = W_{extr} = 2e\,V\cdot 1{,}6\times10^{-19}\,\frac{J}{eV} = 3{,}2\times10^{-19}\ J$$

$$\lambda = h\cdot\frac{c}{E} = 6{,}63\times10^{-34}\,J\cdot s\,\frac{3\times10^{8}\,ms^{-1}}{3{,}2\times10^{-19}\,J} = 6{,}22\times10^{-7}\ m = 622\ nm$$

b. Se trata de un balance energético. La energía de la radiación se transforma en trabajo de extracción y en energía cinética de los electrones.

$$E_R = W_{ext} + E_c\left(e^-\right) \;:\; E_c\left(e^-\right) = E_R - W_{ext}$$

$$E_c\left(e^-\right) = h\cdot\nu - W_{ext} = h\cdot\frac{c}{\lambda_R} - W_{ext} = 6{,}63\times10^{-34}\cdot\frac{3\times10^{8}}{600\cdot10^{-9}} - 2\cdot1{,}6\times10^{-19} = 1{,}15\times10^{-20}\ J$$

Problema 1.- Un satélite de l000 kg de masa describe una órbita circular de 12×10^3 km de radio alrededor de la Tierra. Calcule:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?

b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita.

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}9\times10^{24}$ *kg*

Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}$ *N m*^{2} *kg*$^{-2}$

Solución.

a. El momento lineal o cantidad de movimiento es:

$$\vec{p} = m\cdot\vec{v}$$

Su módulo es:

$$p = m\cdot v$$

Por tratarse de un satélite en órbita, su velocidad se puede poner en función de la masa del planeta y del radio de la órbita, teniendo en cuenta que el la órbita se cumple que la fuerza de atracción gravitacional es igual a la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c \ : \ G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \ : \ v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Sustituyendo en la expresión del momento lineal:

$$p = m\cdot v = m\cdot\sqrt{G\frac{M}{r}} = 1000\cdot\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}9\times10^{24}}{12\times10^6}} = 5{,}76\times10^6\,\text{kg m s}^{-1}$$

Momento angular: $\vec{L} = \vec{p}\times\vec{r}$

Módulo del momento angular: $L = m\cdot v\cdot r\cdot \text{sen}\,\alpha$

Teniendo en cuenta que el radio y la velocidad son perpendiculares (sen 90 = 1):

$$L = m\cdot v\cdot r = m\cdot r\cdot\sqrt{G\frac{M}{r}} = m\cdot\sqrt{G\cdot M\cdot r} = 1000\cdot\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}9\times10^{24}\cdot 12\times10^6} = 6{,}87\times10^{13}\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

La dirección del momento lineal es la dirección de la velocidad, tangente a la trayectoria, y cambia continuamente (en cada punto será tangente a la trayectoria).

La dirección del momento angular es perpendicular al plano de la orbita y se mantiene constante en toda su trayectoria.

b. Periodo: Se obtiene de la igualdad entre la fuerza de atracción gravitacional y la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c \ : \ G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \ : \ G\frac{M}{r} = v^2 \ : \ v = \omega\cdot r \ : \ G\frac{M}{r} = \omega^2 r^2 \ : \ \omega = \frac{2\pi}{T} \ : \ G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^2$$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \ : \ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \ \text{3ª Ley de Kepler}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}9\times10^{24}}\left(12\times10^6\right)^3} = 13166\,\text{s}$$

La energía mecánica de un satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

Por definición la energía potencial de un satélite en su órbita alrededor de un planeta viene expresado por:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

Por definición la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \left\{\begin{array}{l} F_G = F_c \\ v^2 = G\dfrac{M}{r}\end{array}\right\} = \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{r} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

Sumando: $E_m = E_p + E_c = -G\dfrac{M\,m}{r} + \dfrac{1}{2}G\dfrac{M\,m}{r} = -\dfrac{1}{2}G\dfrac{M\,m}{r}$

$$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}9\times10^{24}\cdot1000}{12\times10^{6}} = -1{,}64\times10^{10}\,J$$

Problema 2.- Por un hilo conductor rectilíneo y de gran longitud circula una corriente de l2 A. El hilo está situado en el eje Z de coordenadas y la corriente fluye en el sentido positivo. Un electrón se encuentra situado en el eje Y en el punto P de coordenadas (0, 20, 0) expresadas en centímetros. Determine el vector aceleración del electrón en los siguientes casos:

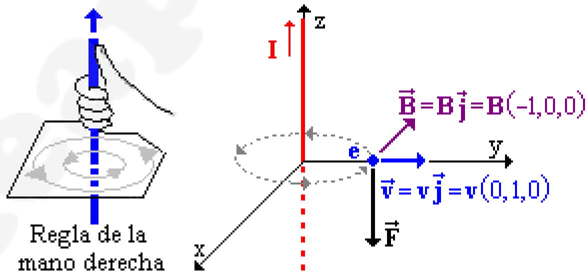
a) El electrón se encuentra en reposo en la posición indicada.
b) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Y.
c) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Z.
d) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección negativa del eje X.

Datos: *Permeabilidad magnética del vacio* $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\,N\,A^{-2}$
Masa del electrón $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,kg$
Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1{,}6\times10^{-19}\,C$

Solución.

a. Teniendo en cuenta la ley de Lorentz: $\left.\begin{array}{c}\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\\ v = 0\end{array}\right\} : F = 0 \Rightarrow \{F = m\cdot a\} : a = 0$

b. La intensidad o módulo del campo magnético a 20 cm del hilo conductor viene dada por la Ley de Biot y Savart, la dirección y sentido por la regla de la mano derecha tal y como se muestra en la figura.



$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi\,d} \Rightarrow B_o = \frac{4\pi\times10^{-7}\cdot12}{2\pi\cdot20\times10^{-2}} = 1{,}2\times10^{-5}\,T$$

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\left(v(0,1,0)\times B(-1,0,0)\right) =$$

$$= qvB\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = qvB(0,0,1) = -1{,}6\times10^{-19}\,C\cdot1\,m/s\cdot1{,}2\times10^{-5}\,T\,\vec{k} = -1{,}92\times10^{-24}\,\vec{k}\,N$$

Conocida la fuerza que actúa sobre el electrón, se calcula la aceleración, que tendrá igual dirección y sentido que la fuerza.

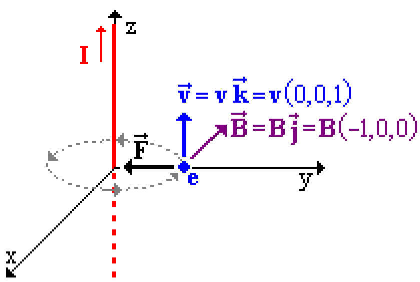
$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}\ :\ \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{9{,}1\times10^{-31}\,Kg}\cdot\left(-1{,}92\times10^{-24}\right)N\,\vec{k} = -2{,}1\times10^{6}\,\vec{k}\,m/s^2$$

c. $\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\left(v(0,0,1)\times B(-1,0,0)\right) =$

$$= qvB\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = qvB(0,-1,0) =$$

$$= -1{,}6\times10^{-19}\,C\cdot1\,m/s\cdot1{,}2\times10^{-5}\,T\left(-\vec{j}\right) = 1{,}92\times10^{-24}\,\vec{j}\,N$$

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{9{,}1\times10^{-31}\,Kg}\cdot\left(1{,}92\times10^{-24}\right)N\,\vec{j} = 2{,}1\times10^{6}\,m/s\,\vec{j}$$



d.

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q \cdot \left(v(1,0,0) \times B(-1,0,0)\right) =$$

$$= qvB \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$F = 0 \Rightarrow \{F = m \cdot a\} : a = 0$$