SELECTIVIDAD MADRID. FÍSICA
Junio 2008

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN.
La prueba consta de dos partes:

La **primera parte** consiste en un conjunto de cinco cuestiones de tipo teórico, conceptual o teórico-práctico, de las cuales el alumno debe responder solamente a **tres**.

La **segunda parte** consiste en dos repertorios **A** y **B**, cada uno de ellos constituido por dos problemas. El alumno debe optar por uno de los dos repertorios y resolver los dos problemas del mismo.
(El alumno podrá hacer uso de calculadora científica no programable)

TIEMPO: Una hora treinta minutos.

CALIFICACIÓN:

Cada cuestión debidamente justificada y razonada con la solución correcta se calificará con un máximo de **2 puntos**.

Cada problema debidamente planteado y desarrollado con la solución correcta se calificará con un máximo de **2 puntos**.

En aquellas cuestiones y problemas que consten de varios apartados, la calificación será la misma para todos ellos, salvo indicación expresa en los enunciados.

Primera parte

Cuestión 1.

Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, y se le deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior el desplazamiento hubiese sido 2X, deduzca la relación que existe, en ambos casos, entre: **a)** las velocidades máximas del cuerpo; **b)** las energías mecánicas del sistema oscilante.

Solución.

Se trata de un movimiento armónico simple vertical, las ecuaciones que lo rigen son:

$$F = -K \cdot x$$

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = x' = -A\,\omega \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi)\;;\quad v_{\text{máx}} = -A\,\omega$$

E(mec) = E(c) + E(p), cuando la energía potencial es máxima, la energía cinética es nula

$$E_{\text{Mec}} = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

Aplicando el 2º principio de la dinámica a la ley de Hook

$$m\,a = -K\,x$$

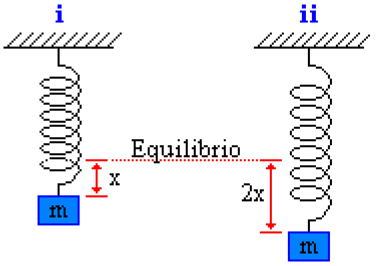
Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición

$$m\,x'' = -K\,x : \left\{ \begin{array}{l} x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} : \quad -m\,A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -K\,A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}\text{ ; No depende de la amplitud}$$

Si se aplica a cada caso teniendo en cuenta que lo único que varía es la amplitud y que no hay desfase:

$A_1 = x$
$y_1 = x \cdot \cos(\omega t)$
$v_1 = -x\omega \cdot \text{sen}(\omega t)$
$v(\max)_1 = -x\omega$
$E_1 = \frac{1}{2} K \cdot x^2$



$A_2 = 2x$
$y_2 = 2x \cdot \cos(\omega t)$
$v_2 = -2x\omega \cdot \text{sen}(\omega t)$
$v(\max)_2 = -2x\omega$
$E_1 = \frac{1}{2} K \cdot (2x)^2$

a. La relación entre las velocidades máximas es la misma que la de las amplitudes

$$\frac{v(\max)_1}{v(\max)_2}=\frac{-x\,\omega}{-2x\,\omega}=\frac{1}{2}\Rightarrow v(\max)_2=2v(\max)_1$$

b. La relación entre las energías mecánicas es el cuadrado que la de las amplitudes

$$\frac{E(\text{mec})_1}{E(\text{mec})_2}=\frac{\frac{1}{2}K\cdot x^2}{\frac{1}{2}K\cdot(2x)^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow E(\text{mec})_2=4E(\text{mec})_1$$

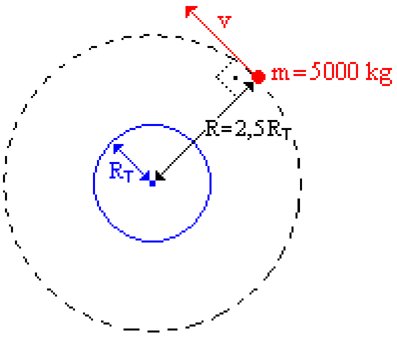
Cuestión 2.

Una sonda de masa 5000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de 1,5 R_T. Determine: **a)** el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra; **b)** la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$

Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

Solución.



a. Momento angular:

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\left|\vec{L}\right|=\left|\vec{r}\right|\cdot\left|m\vec{v}\right|\cdot\text{sen }90^{\circ}=R\cdot m\cdot v$$

Donde R es la distancia de la sonda al centro de la tierra $R = 2'5\ R_T$

La velocidad en la órbita se calcula igualando la fuerza centrípeta a la fuerza gravitacional:

$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}}{2{,}5\cdot6{,}37\times10^{6}}}=5005\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

Sustituyendo los datos en la expresión del módulo del momento angular:

$$\left|\vec{L}\right|=r\cdot m\cdot v=2{,}5\cdot6{,}37\times10^{6}(\text{m})\cdot5000(\text{kg})\cdot5005\left({}^{m}\!/\!_{s}\right)=3{,}98\times10^{14}\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

b. La energía necesaria para poder escapar del campo gravitatorio terrestre

Solución.

Por conservación de la energía, la energía potencial en la órbita más la energía cinética que le comunicamos ha de ser igual a la energía mecánica en el infinito, que es cero, teniendo en cuenta que llega con velocidad nula (E(c) = 0), y que al ser R = ∞ la energía potencial es 0.

Para que la sonda escape del campo gravitatorio, tendrá que superar su potencial gravitatorio, es decir, tendrá que ganar una energía igual a la energía mecánica que tiene en la órbita.

$$\Delta E=0-E_m(\text{Órbita})=--\frac{1}{2}G\cdot\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}6'67\times10^{-11}\left(\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\right)\frac{5'98\times10^{24}(\text{kg})\cdot5000(\text{kg})}{2{,}5\cdot6{,}37\times10^{6}\,\text{m}}=6{,}26\times10^{10}\,\text{J(Nm)}$$

Cuestión 3.

Una lámina de vidrio (índice de refracción n = 1,52) de caras planas y paralelas y espesor d se encuentra entre el aire y el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia 5×10^{14} Hz incide desde el agua en la lámina. Determine:

- **a)** Las longitudes de onda del rayo en el agua y en el vidrio.
- **b)** El ángulo de incidencia en la primera cara de la lámina a partir del cual se produce reflexión total interna en la segunda cara.

.Datos: Índice de refracción de agua n_{agua} = 1,33; Velocidad de la luz en el vacío c = 3×10^{8} m/s

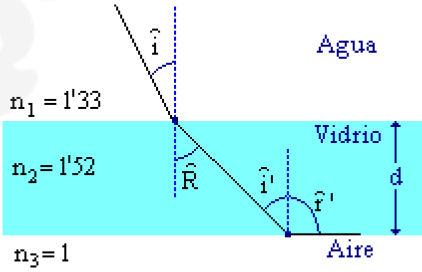
Solución.

a. Según la definición:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \left\{ n = \frac{c}{v} \right\} = \frac{c}{n \cdot f}$$

Donde c es la velocidad de la luz, n es el índice de refracción y f es la fecuencia.

- Vidrio: $\lambda_2 = \frac{c}{n_2 \cdot f} = \frac{3\times10^{8}\ m/s}{1{,}52 \cdot 5\times10^{14}\ s^{-1}} = 3{,}95\times10^{-7}\ m$
- Agua: $\lambda_1 = \frac{c}{n_1 \cdot f} = \frac{3\times10^{8}\ m/s}{1{,}33 \cdot 5\times10^{14}\ s^{-1}} = 4{,}51\times10^{-7}\ m$



b. Ley de Snell:

- En la 1ª cara: $n_1 \cdot \text{sen}\ \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\ \hat{R}$
- En la 2ª cara: $n_2 \cdot \text{sen}\ \hat{i}' = n_3 \cdot \text{sen}\ \hat{r}'$

En la segunda cara se produce reflexión total, $\hat{r}' = 90^{o}$, porque $n_3 < n_2$. El ángulo de incidencia al que corresponde un ángulo de refracción de 90º se le denomina ángulo límite, se calcula aplicando la ley de Snell.

$$n_2 \cdot \text{sen}\ \hat{i}' = n_3 \cdot \text{sen}\ \hat{r}' : \left\{ \begin{array}{l} \hat{r}' = 90^{o} \\ \hat{i}' = \hat{l} \end{array} \right\} : n_2 \cdot \text{sen}\ \hat{l} = n_3 \cdot \text{sen}\ 90^{o}$$

$$\text{sen}\ \hat{l} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{1'52} = 0'66 : \quad \hat{l} = \text{arcsen}\ 0'66 = 41{,}1^{o}$$

Por ser las caras planas y paralelas, el ángulo de refracción de la 1ª cara será igual que el angulo de incidencia en la 2ª, que en este caso es el ángulo límite.

$$\hat{R} = \hat{l} = 41{,}1^{o}$$

Aplicando la ley de Snell se calcula el ángulo de incidencia en la 1ª cara.

$$\text{sen}\ \hat{i} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \text{sen}\ \hat{R} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \text{sen}\ \hat{l} = \frac{1{,}52}{1'33} \cdot \text{sen}\ 41{,}1 = 0{,}75$$

$$\hat{i} = \text{arcsen}\ 0{,}75 = 48{,}7^{o}$$

Cuestión 4.

El potencial de frenado de los electrones emitidos por la plata cuando se incide sobre ella con luz de longitud de onda de 200 nm es 1,48 V. Deduzca:

- **a)** La función de trabajo (o trabajo de extracción) de la plata, expresada en eV.
- **b)** La longitud de onda umbral en nm para que se produzca el efecto fotoeléctrico.

Datos: Constante de Planck h = $6{,}63\times10^{-34}$ J s; Velocidad de la luz en el vacío c = 3×10^{8} m/s
Valor absoluto de la carga del electrón e = $1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Solución.

a. Según el efecto fotoeléctrico, la energía de la radiación incidente sobre la superficie del metal es igual al trabajo de extracción del metal más energía cinética de los electrones.

$$h\nu = W_o + \frac{1}{2} m v^2$$

La frecuencia de la radiación se calcula a partir de la longitud de onda:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{200\times10^{-9}\,\mathrm{m}} = 1{,}5\times10^{15}\,\mathrm{Hz}\left(\mathrm{s}^{-1}\right)$$

La energía cinética de los electrones emitidos se obtiene del potencial de frenado.

$$q\,V = \frac{1}{2}mv^{2}$$

Sustituyendo en la ecuación del efecto fotoeléctrico, se despeja el trabajo de extracción.

$$h\nu = W_o + qV$$

$$W_o = h\nu - qV = 6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}\cdot1{,}5\times10^{15}\,\mathrm{s^{-1}} - 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{V}}\right)\cdot1{,}48\,\mathrm{V} = 7{,}58\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

$$W_o = 7{,}58\times10^{-19}\,\mathrm{J} = \left\{\div1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{J}/\mathrm{eV}\right\} = 4{,}74\,\mathrm{eV}$$

b. La frecuencia umbral es la que consigue extraer electrones del metal con velocidad cero (energía cinética nula).

$h\nu = W_o$

$$\nu_o = \frac{W_o}{h} = \frac{7{,}58\times10^{-19}\,\mathrm{J}}{6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}} = 1{,}14\times10^{15}\,\mathrm{Hz}\left(\mathrm{s}^{-1}\right)$$

Conocida la frecuencia umbral se calcula la longitud de onda.

$$\lambda_o = \frac{c}{\nu_o} = \frac{3\times10^{8}}{1{,}14\times10^{15}} = 2{,}625\times10^{-7}\,\mathrm{m} = \left\{\div10^{-9}\right\} = 262{,}5\,\mathrm{nm}$$

Cuestión 5.

Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, según la teoría de la relatividad especial:

a) La masa de un cuerpo con velocidad v respecto de un observador es menor que su masa en reposo.

b) La energía de enlace del núcleo atómico es proporcional al defecto de masa nuclear Δm.

Solución.

a. Falso. La masa aumenta al aumentar la velocidad según la ecuación

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m es la masa en movimiento, m_o la masa en reposo y c la velocidad de la luz.

b. Verdadero. $\Delta E = \Delta m\cdot c^2$ Energía liberada cuando se unen nucleones para formar un núcleo.

Segunda parte

REPERTORIO A

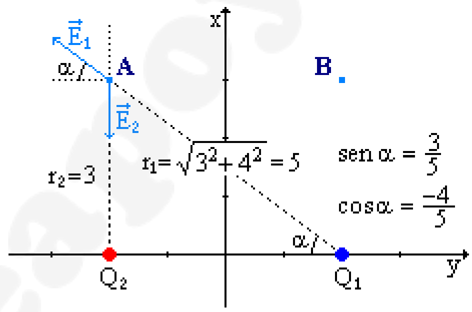
Problema 1.- Dos cargas fijas Q_1 = + 12,5 nC y Q_2 = –2,7 nC se encuentran situadas en los puntos del plano XY de coordenadas (2, 0) y (–2, 0) respectivamente. Si todas las coordenadas están expresadas en metros, calcule:

- **a)** El potencial eléctrico que crean estas cargas en el punto A (–2, 3).
- **b)** El campo eléctrico creado por Q_1 y Q_2 en el punto A.
- **c)** El trabajo necesario para trasladar un ión de carga negativa igual a –2e del punto A al punto B, siendo B (2, 3), indicando si es a favor o en contra del campo.
- **d)** La aceleración que experimenta el ión cuando se encuentra en el punto A.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón e = $1{,}6\times10^{-19}$ C
Constante de la ley de Coulomb K = 9×10^{9} N m^2 C^{-2}
Masa del ión M = $3{,}15\times10^{-26}$ kg

Solución.

a. Según el principio de superposición, el potencial en un punto del campo creado por varias cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada una de las cargas puntuales.



Para calcular el potencial en un punto hay que tener en cuenta que es un escalar, depende de la carga que crea el campo, de la distancia del punto a la carga y el signo será el de la carga.

$$V_A = V_1 + V_2$$

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} = 9\times10^9\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\,\frac{12{,}5\times10^{-9}\,\text{C}}{5\text{m}} = 22{,}5\text{V}$$

$$V_2 = K\frac{Q_2}{r_2} = 9\times10^9\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\,\frac{-2{,}7\times10^{-9}\,\text{C}}{3\text{m}} = -8{,}1\text{V}$$

$$V_A = 22{,}5 + (-8{,}1) = 14{,}4\text{V}$$

b. El campo eléctrico creado por varias cargas puntuales en un punto, es la suma vectorial de los campos que creados por cada una de las cargas en ese punto.

El módulo el campo eléctrico se puede obtener del potencial.

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{K\,Q}{r} \\ \left|\vec{E}\right| &= \frac{K\,Q}{r^2} \end{aligned}\right\} : V = \left|\vec{E}\right|\cdot r \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{V}{r}$$

$$\left|\bar{E}_1\right| = \frac{V_1}{r_1} = \frac{22{,}5\text{V}}{5\text{m}} = 4{,}5\frac{\text{N}}{\text{C}} \qquad \left|\bar{E}_2\right| = \frac{V_2}{r_2} = \frac{8{,}1\text{V}}{3\text{m}} = 2{,}7\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Las componentes vectoriales se obtienen de las razones trigonométricas de los ángulos que forman los vectores.

$$\bar{E}_1 = \left|\bar{E}_1\right|\cdot\left(\cos\alpha\,\bar{i} + \text{sen}\,\alpha\,\bar{j}\right) = 4{,}5\cdot\left(\frac{-4}{5}\,\bar{i} + \frac{3}{5}\,\bar{j}\right) = -3{,}6\bar{i} + 2{,}7\bar{j}$$

$$\bar{E}_2 = \left|\bar{E}_2\right|\cdot\left(0\,\bar{i} + (-1)\,\bar{j}\right) = 2{,}7\cdot\left(0\bar{i} - \bar{j}\right) = -2{,}7\bar{j}$$

$$\bar{E}_T = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \left(-3{,}6\bar{i} + 2{,}7\bar{j}\right) + \left(-2{,}7\bar{j}\right) = -3{,}6\bar{i}$$

$$\left|\bar{E}_T\right| = 3{,}6\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

c. $W_{A\to B} = -q\cdot(V_B - V_A)$

Potencial en B:

$$V_B = V_{1.B} + V_{2.B}$$

$$V_{1.B} = K\frac{Q_1}{r_{1.B}} = 9\times10^9\,Nm^2C^{-2}\,\frac{12{,}5\times10^{-9}\,C}{3m} = 37{,}5V$$

$$V_{2.B} = K\frac{Q_2}{r_{2.B}} = 9\times10^9\,Nm^2C^{-2}\,\frac{-2{,}7\times10^{-9}\,C}{5m} = -4{,}86V$$

$$V_A = 37{,}5 + (-4{,}86) = 32{,}6V$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo:

$$W_{A\to B} = -\left(-2\cdot1{,}6\times10^{-19}\right)\cdot(32{,}6 - 14{,}4) = +5{,}82\times10^{-19}\,J$$

Por ser positivo el trabajo es a favor del campo.

d. Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$F = m\,a$$

La fuerza a la que se ve sometido el ión en un punto del campo es:

$$\vec{F} = q_{ión}\cdot\vec{E}$$

Igualando y se despeja la aceleración:

$$q_{ión}\cdot\vec{E} = m_{ión}\vec{a} \qquad \vec{a} = \frac{q_{ión}\vec{E}}{m}$$

$$a = \frac{2\cdot1{,}6\times10^{-19}\cdot3{,}6\,\vec{i}}{3{,}15\times10^{26}} = 3{,}66\times10^{7}\,\vec{i}\;m/s^2$$

Problema 2.- Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual, siendo la primera de 100 dB a una distancia x del foco, y la segunda de 80 dB al alejarse en la misma dirección 100 m más.

a) Obtenga las distancias al foco desde donde se efectúan las mediciones.
b) Determine la potencia sonora del foco.

Dato: Intensidad umbral de audición $I_o = 10^{-12}\ W/m^2$

Solución.

a. La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Para calcular la intensidad se tiene en cuenta la escala decibélica

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_o} \;:\; \frac{I}{I_0} = 10^{\beta/10} \;:\; I = I_o\cdot10^{\beta/10}$$

Donde β es el nivel de intensidad de sonido medido en decibelios, I es la intensidad e I_o es la intensidad umbral.

$$\beta_1 = 100\,dB \to I_1 = 10^{-12}\cdot10^{100/10} = 10^{-2}\,W/m^2 \to r_1 = x$$

$$\beta_2 = 80\,dB \to I_1 = 10^{-12}\cdot10^{80/10} = 10^{-4}\,W/m^2 \to r_2 = x + 100$$

Sustituyendo en la relación:

$$\frac{10^{-2}}{10^{-4}} = \frac{(x+100)^2}{x^2} \;:\; 100 = \left(\frac{x+100}{x}\right)^2 \;:\; \frac{x+100}{x} = 10 \;:\; x = 11{,}1\,m$$

b. $I = \dfrac{P}{4\pi r^2}$ Aplicando a la 1ª experiencia: $P = I_1\cdot4\pi r_1^2 = 10^{-2}4\pi\cdot11{,}1^2 = 15{,}5\,W$

REPERTORIO B

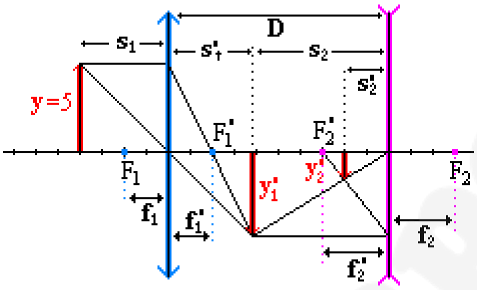
Problema 1.- Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es convergente y con distancia focal de 10 cm; la segunda, situada a 50 cm de distancia de la primera, es divergente y con 15 cm de distancia focal. Un objeto de tamaño 5 cm se coloca a una distancia de 20 cm delante de la lente convergente.

- **a)** Obtenga gráficamente mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.
- **b)** Calcule la posición de la imagen producida por la primera lente.
- **c)** Calcule la posición de la imagen producida por el sistema óptico.
- **d)** ¿Cuál es el tamaño y la naturaleza de la imagen final formada por el sistema óptico?

Solución.

a. 1ª Lente: $f_1 = -10$ cm; $f_1' = 10$ cm; $s_1 = -20$ cm

2º Lente: $f_2 = 15$ cm; $f_2' = -15$ cm; D = 50 cm



b. Aplicando la ecuación de la lente:

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1'} \quad : \quad \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{-20} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad s_1' = 20\,\text{cm}$$

c. Teniendo en cuenta la distancia entre las lentes y conocido s_1', se calcula s_2.

$D = s_1' + s_2$ $\qquad 50 = 20 + s_2$ $\qquad s_2 = 30$, respecto de la lente dos por criterio de signos $s_2 = -30$

Aplicando la ecuación de la lente:

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2'} \qquad \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{-15} \quad \Rightarrow \quad s_2' = -10$$

d. $$\frac{y_1'}{y} = \frac{s_1'}{s_1} \qquad y_1' = \frac{s_1'}{s_1} y = \frac{-20}{20} 5 = -5\,\text{cm}$$

$$\frac{y_2'}{y_1'} = \frac{s_2'}{s_2} \qquad y_2' = \frac{s_2'}{s_2} y_1' = \frac{-10}{-30} \cdot (-5) = -1'67\,\text{cm}$$

La imagen es virtual derecha e invertida.

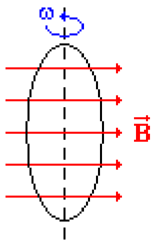
Problema 2.- Una espira circular de radio r = 5 cm y resistencia 0,5 Ω se encuentra en reposo en una región del espacio con campo magnético $\vec{B} = B_o \vec{k}$, siendo B_o = 2 T y $\vec{k}$ el vector unitario en la dirección Z. El eje normal a la espira en su centro forma 0° con el eje Z. A partir de un instante t = 0 la espira comienza a girar con velocidad angular constante ω = π (rad/s) en torno a un eje diametral. Se pide:

a) La expresión del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo t, para t ≥ 0.

b) La expresión de la corriente inducida en la espira en función de t.

Solución.

a.



$\vec{B} = B_o\,\vec{k} = 2\,\vec{k}$; r = 0’05 m; R = 0’5 Ω

$S = \pi\, r^2 = 7'85\times10^{-3}\ m^2$

$\phi = B\cdot S\cdot \cos\alpha = B\cdot S\cdot \cos\omega t = 0'016\cos\pi t$

b. $$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(0'016\cos\pi\, t\right) = +0'016\pi\ \mathrm{sen}\ \omega\, t \approx 0'05\,\mathrm{sen}\ \pi\, t$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0'05\ \mathrm{sen}\ \pi\, t}{0'5} = 0'1\,\mathrm{sen}\ \pi\, t$$