P.A.U. MADRID JUNIO 2005

Cuestión 1.-

El nivel de intensidad sonora de la sirena de un barco es de 60 dB a 10 m de distancia. Suponiendo que la sirena es un foco emisor puntual, calcule:

a) El nivel de intensidad sonora a 1 km de distancia.

b) La distancia a la que la sirena deja de ser audible.

Dato: Intensidad umbral de audición $I_o = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

Por ser una onda esférica, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor:

$$I_1 \cdot r_1^2 = I_2 \cdot r_2^2$$

El nivel de intensidad sonora, o número de decibelios es: $N = 10 \log (I / I_o)$

A 10 m de distancia la intensidad será:

$$60 = 10 \cdot \log (I / I_o) \quad \text{à} \quad I = I_o \cdot 10^6$$

A 1 Km de distancia la intensidad será:

$$I_1 \cdot r_1^2 = I_2 \cdot r_2^2 \quad \text{à} \quad I_o \cdot 10^6 \cdot 10^2 = I \cdot 1000^2 \quad \text{à} \quad I = I_o \cdot 10^2$$

$$N = 10 \cdot \log (I / I_o) = 10 \cdot \log (I_o \cdot 10^2 / I_o) = 20 \text{ decibelios}$$

El sonido dejará de ser audible cuando su intensidad sea menor o igual a la intensidad umbral:

$$I_1 \cdot r_1^2 = I_2 \cdot r_2^2 \quad \text{à} \quad I_o \cdot r^2 = I_o \cdot 10^6 \cdot 10^2 \quad \text{à} \quad r^2 = 10^8 \quad \text{à} \quad r = 10^4 \text{ metros}$$

Cuestión 2.-

a) Deduzca la expresión de la energí a cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.

b) Demuestre que la energí a mecánica del satélite es la mitad de su energí a potencial.

$$\text{Fuerza centrípeta} = \text{Fuerza atracción}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{r} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$\frac{E_m}{E_p} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}{-G \cdot \frac{M \cdot m}{r}} = \frac{1}{2}$$

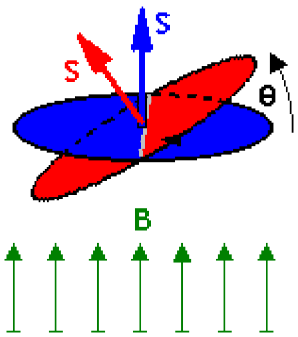
Cuestión 3.-

Una espira metálica circular, de 1 cm de radio y resistencia 10^{-2} ohmmios, gira en tomo a un eje diametral con una velocidad angular de 2n rad/s en una región donde hay un campo magnético unifonne de 0,5 T dirigido según el sentido positivo del eje Z. Si el eje de giro de la espira tiene la dirección del eje X y en el instante t=0 la espira se encuentra situada en el plano XY, deternine:

a) La expresión de la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo.

b) El valor máximo de la intensidad de la corriente que recorre la espira.

Solución:



Al girar la espira, el ángulo que forma el vector superficie y el campo magnético varía en la forma:

$$\theta = w\cdot t$$

El flujo magnético será:

$$\Phi = B\cdot S\cdot \cos\theta = B\cdot S\cdot \cos(w\cdot t)$$

La f.e.m será:

$$V = -\,d\Phi/dt = B\cdot S\cdot w\cdot \text{sen}(w\cdot t) = 0'5\cdot (\pi\cdot 0'01^2)\cdot 2\pi\cdot \text{sen}\,(2\pi\, t)$$

$$V = 0'000987\ \text{sen}\,(2\pi\, t)$$

$$I = V / R = 0'000987\ \text{sen}\,(2\pi\, t) / 0'01 = 0'0987\ \text{sen}\,(2\pi\, t)$$

$$I_{maximo} = 0'0987$$

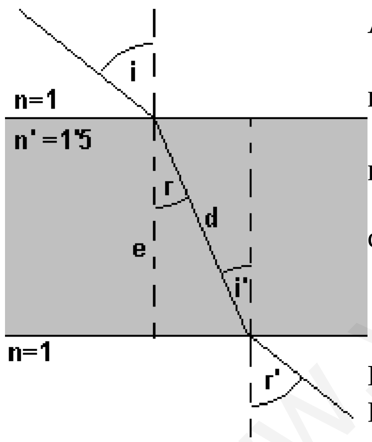
Cuestión 4.-

Sobre una lámina transparente de índice de refracción 1,5 y de 1 cm de espesor, situada en el vacío, incide un rayo luminoso formando un ángulo de 30º con la normal a la cara. Calcule:

a) El ángulo que forma con la normal el rayo que emerge de la lámina, Efectúe la construcción geométrica correspondiente.

b) La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.

Solución:



Aplicando la ley de la refracción dos veces :

n · sen i = n' · sen r à 1 · sen 30 = 1'5 · sen r à r = 19'47º

n' · sen i' = n · sen r'

como r = i', por ser las caras paralelas:

n · sen i = n' · sen r = n' · sen i' = n · sen r' à i = r'

El rayo de salida sale con el mismo ángulo de entrada, en este caso 30º

Para calcular d : cos r = e / d cos 19'47º = 0'01 / d d = 0'01061 m

Cuestión 5.-

Un electrón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 50 V. Calcule:

a) El cociente entre los valores de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad alcanzada por el electrón.

b) La longitud de onda de De Broglie asociada al electrón después de atravesar dicho potencial.

Datos: $h = 6'63\cdot 10^{-34}$ J.s $c = 3\cdot 10^{8}$ m/s $m = 9'1\cdot 10^{-31}$ kg $q = 1'6\cdot 10^{-19}$ C

Solución:

El trabajo que realiza el campo se invierte en variar la energía cinética:

$q\cdot V = m\cdot v^2/2$ v = (2· q V / m) = $4'1931\ .10^{6}$ m/s << c, no tiene carácter relativista

$$c / v = 3.10^{8} / 4'1931\ .10^{6} = 71'545$$

$$\lambda = h /(m\cdot v) = 1'7375.10^{-10}\ \text{m}$$

Repertorio A. Problema 1.-
Un satélite artificial de la Tierra de 1000 kg describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcular:
a) Período orbital.
b) Energía mecánica del satélite.
c) Módulo del momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra.
d) Cociente entre los valores de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie terrestre.
Datos:
$M_{Tierra} = 5'98 \cdot 10^{24}$ kg $R_{Tierra} = 6'37 \cdot 10^{6}$ m $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ u.S.I.
Solución:
El radio de la órbita es: $r = R + h = 6'37 \cdot 10^6 + 655 \cdot 10^3 = 7'025 \cdot 10^6$ m
La fuerza necesaria para describir una órbita es la fuerza de atracción gravitatoria:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \text{siendo} \quad v = w \cdot r$$

$$m \cdot w^2 \cdot r = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad w = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r^3}} = \sqrt{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'98 \cdot 10^{24}}{(7'025 \cdot 10^6)^3}} = 0'001073 \text{ rad/s}$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{w} = \frac{2 \cdot \pi}{0'001073} = 5858 \text{ s}$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2 \cdot r} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{2 \cdot 7'025 \cdot 10^6} = 2'84 \cdot 10^9 \text{ Julios}$$

$$L = I \cdot w = m \cdot r^2 \cdot w = 100 \cdot (7'025 \cdot 10^6)^2 \cdot 0'001073 = 5'3 \cdot 10^{12} \text{ kg.m}^2\text{/s}$$

$$\frac{g}{g_o} = \frac{G \cdot M/r^2}{G \cdot M/R^2} = (\frac{R}{r})^2 = (\frac{6'37 \cdot 10^6}{7'025 \cdot 10^6})^2 = 0'822 \quad 82'2\%$$

Repertorio B. Problema 1.-
Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda tensa de gran longitud, y por ello, una partícula de la misma realiza un movimiento armónico simple en la dirección perpendicular a la cuerda. El periodo de dicho movimiento es de 3 s y la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm.
a) ¿Cuáles son los valores de la velocidad máxima y de la aceleración máxima de oscilación de la partícula?
b) Si la distancia mínima que separa dos partículas de la cuerda que oscilan en fase es de 60 cm, ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda? ¿cuál es el número de onda?
Solución:

La amplitud de la onda es 20 / 2 = 10 cm = 0'1 m , y la ecuación de la onda es:

$y = A \cdot \text{sen}(w \cdot t - k \cdot x) = 0'1 \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot t/3 - k \cdot x)$

$v = dy/dt = 0'1 \cdot (2 \cdot \pi/3) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t/3 - k \cdot x)$, cuyo valor máximo es: $v_{máx} = 0'1 \cdot (2 \cdot \pi/3) = 0'21$ m/s

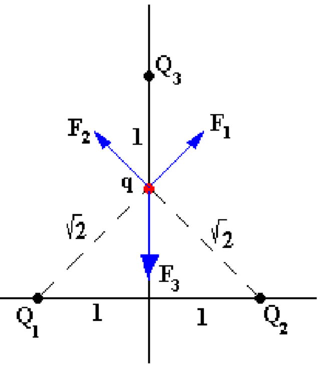
$a = dv/dt = -0'1 \cdot (2 \cdot \pi/3)^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot t/3 - k \cdot x)$, cuyo valor máximo es: $a_{max} = 0'1 \cdot (2 \cdot \pi/3)^2 = 0'44$ m/s

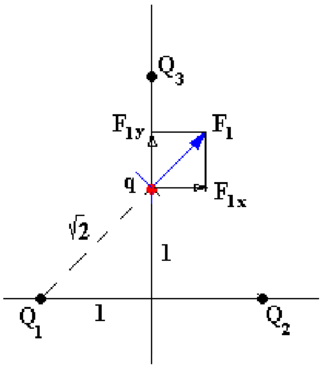
La distancia mínima entre dos puntos en fase es la longitud de onda: $\lambda = 0'6$ m

$$v_{onda} = \lambda / T = 0'6 / 3 = 0'2 \text{ m/s}$$

$$k = 2 \cdot \pi/\lambda = 2 \cdot \pi / 0'6 = 10'47 \text{ rad/m}$$

Repertorio A. Problema 2.-
Tres cargas de valores Q_1 =2 microC, Q_2 = 2 microC y Q_3 desconocida, están en el plano XY en los puntos Q_1: (1,0), Q_2: (-1,0) y Q_3: (0,2), en metros. Determinar:
a) El valor de Q_3 para que la fuerza sobre una carga situada en (0,1) sea nula.
b) El Potencial en el punto (0,1) debido a las tres cargas.
Constante de Coulomb K= 9 · 10^9 u.S.I.
Solución:





Al ser las cargas Q_1 y Q_2 iguales y al ser las distancias al punto (0,1) iguales, las fuerzas F_1 y F_2 deben ser iguales y simétricas respecto al eje Y. La carga Q_3 tendrá que ser también positiva, para que la suma de las fuerzas pueda dar cero:

$$F = K\cdot\frac{Q\cdot q}{r^2} \quad\rightarrow\quad F_1 = F_2 = K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{(\sqrt{2})^2} = K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}$$

$$\vec{F_1} = K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}\cdot\cos 45\,\vec{i} + K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}\operatorname{sen}45\,\vec{j}$$

$$\vec{F_2} = -K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}\cdot\cos 45\,\vec{i} + K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}\operatorname{sen}45\,\vec{j}$$

$$\vec{F_3} = -K\cdot\frac{Q_3\cdot q}{1}\vec{j}$$

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0 \quad\rightarrow\quad K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}\operatorname{sen}45 + K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot q}{2}\operatorname{sen}45 = K\cdot\frac{Q_3\cdot q}{1}$$

$$2\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = Q_3 \quad\rightarrow\quad Q_3 = \sqrt{2}\cdot 10^{-6}\ \text{Coulombs}$$

El potencial total será la suma de los potenciales:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + K\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + K\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 10^{-6}}{1} = K\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot 10^{-6} = 38.183'77\ \text{Voltios}$$

Repertorio B. Problema 2.-

Por un hilo conductor rectilíneo y de gran longitud circula una corriente de 12 A. El hilo define el eje Z de coordenadas y la corriente fluye en el sentido positivo. Un electrón se encuentra situado en el eje Y a una distancia del hilo de 1 cm. Calcule el vector aceleración instantánea que experimentaría a dicho electrón si:

a) Se encuentra en reposo.
b) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Y.
c) Su velocidad es de l m/s según la dirección positiva del eje Z.
d) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección negativa del eje X.

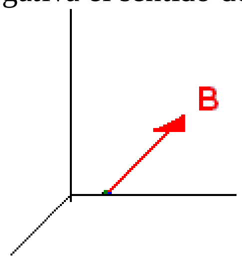
Datos: Permeabilidad magnética $\mu = 4\cdot\pi\, 10^{-7}$
Masa electrón $m = 9'1\cdot 10^{-31}$ kg   Carga electrón $q = 1'6\cdot 10^{-19}$ C

Solución:

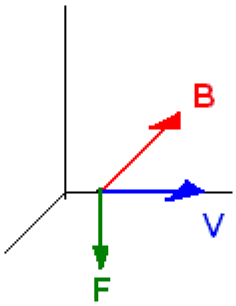
El conductor crea a su alrededor un campo magnético. Si el punto está en el semieje positico Y. el sentido del campo magnético será -X.

$$B = \mu\cdot I / (2\cdot\pi\, d) = 4\cdot\pi\, 10^{-7}\cdot 12 / (2\cdot\pi\, 0'01) = 2'4\cdot 10^{-4} \text{ Teslas}$$

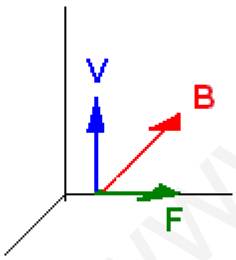
Si en el punto se coloca una carga, aparecerá una fuerza cuyo valor es F = q· (v ^B) ; al ser la carga negativa el sentido de F será opuesto al sentido de v^B

a) 

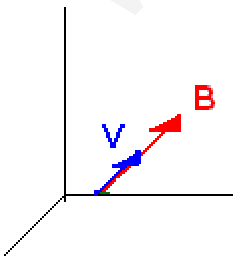
La fuerza es nula por ser cero la velocidad. Aceleración = 0

b) 

La fuerza y la aceleración tendrán el sentido -Z , y su valor será:
$F = q\cdot v\cdot B\cdot \text{sen } 90 = 1'6\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 2'4\cdot 10^{-4} = 3'84\cdot 10^{-23}$ Newtons
$a = F / m = 3'84\cdot 10^{-23} / 9'1\cdot 10^{-31} = 4'2\cdot 10^{7}\ m/s^2$

c) 

La fuerza y la aceleración tendrán el sentido +Y, siendo su valor:

d) 

En este caso la fuerza y la aceleración son nulas por ser cero el ángulo que forman v y B