PAU MADRID JUNIO 2003

Cuestión 1.-

Suponiendo un planeta esférico que tiene un radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la tierra, calcule:
a) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape en la tierra es 11'2 km/s
Datos g en la superficie terrestre 9'8 m/s^2

Solución:

$$R_{planeta} = R_{tierra} / 2$$

La intensidad gravitatoria en la superficie de un planeta es:

$$g_{planeta} = G \cdot M_{planeta} / R_{planeta}^2$$

$$g_{tierra} = G \cdot M_{tierra} / R_{tierra}^2$$

Densidad = Masa / Volumen Igual densidad à $M_{tierra} / V_{tierra} = M_{planeta} / V_{planeta}$

à $M_{planeta} / R_{planeta}^3 = M_{tierra} / R_{tierra}^3$

à $g_{planeta} = G \cdot M_{planeta} \cdot R_{planeta} / R_{planeta}^3 = G \cdot M_{tierra} \cdot R_{planeta} / R_{tierra}^3 = g_{tierra} \cdot R_{planeta} / R_{tierra}$

à $g_{planeta} = g_{tierra} / 2 = 4'9 \text{ m/s}^2$

La velocidad de escape en la superficie de un planeta es $m \cdot v^2 / 2 = G \cdot M \cdot m / R$

$$v_{planeta} = (2 \cdot G \cdot M_{planeta} / R_{planeta})^{1/2} = (2 \cdot G \cdot M_{planeta} \cdot R_{planeta} / R_{planeta}^2)^{1/2}$$

$$v_{planeta} = (2 \cdot g_{planeta} \cdot R_{planeta})^{1/2}$$

à $v_{planeta} / v_{tierra} = (2 \cdot g_{planeta} \cdot R_{planeta})^{1/2} / (2 \cdot g_{tierra} \cdot R_{tierra})^{1/2} =$

$$(g_{planeta} / g_{tierra} \cdot R_{planeta} / R_{tierra})^{1/2} = (½ \cdot ½)^{1/2} = ½$$

à $v_{planeta} = 11'2 / 2 = 5'6 \text{ km/s}$

Cuestión 2.-

El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es 2.10^{-3} s
Si dos puntos consecutivos con diferencia de fase π/2 rad están separados 10 cm, calcular:

a) Longitud de onda
b) Velocidad de propagación

Solución:

La ecuación de una onda es: $y = A \cdot \text{sen} (w.t - k.x)$

Si $T = 2.10^{-3}$ à $w = 2.\pi /T = 2.\pi /2.10^{-3} = 1000.\pi$ rad/s

La diferencia de fase será : $(w.t - k.x_1) - (w.t - k.x_2) = \pi/2$ à $k.(x_2 - x_1) = \pi/2$

$k = (\pi/2)/0'1 = \pi/0'2$ à $\lambda = 2.\pi / k = 0'4$ m

$$v = \lambda / T = w / k = 1000.\pi / (\pi/0'2) = 200 \text{ m/s}$$

Cuestión 3.-

Un protón penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme. Explique qué tipo de trayectoria describirá el protón si su velocidad es:

a) paralela al campo

b) perpendicular al campo

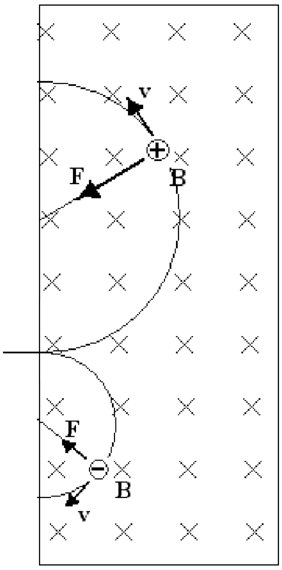
c) ¿ Qué sucede si el protón se deja en reposo en el campo magnético ?

d) ¿ Y si fuera un electrón ?

Solución:

Toda carga eléctrica en movimiento dentro de un campo magnético se ve sometida a una fuerza:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



esta fuerza es perpendicular a v y a B y depende del seno del ángulo entre v y B : $F = q \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} \theta$

El sentido de F es según v x B si la carga es positiva y opuesto si es negativa

a) si v paralelo a B à sen θ = sen 0 = 0 à F = 0

no existe fuerza por lo que la carga, sea positiva o negativa sigue con la misma velocidad en línea recta.

b) si v perpendicular a B à sen θ = sen 90 = 1 la fuerza es máxima y perpendicular a v lo que obliga a la carga a describir una circunferencia sin variar el módulo de la velocidad (no hay componente de F según la velocidad).

El radio de la circunferencia será $R = m.v /(q.B)$

c) Si la carga se deja en reposo, v = 0, la fuerza será nula por lo que seguirá en reposo

d) Si la carga es negativa la fuerza tendrá sentido opuesto a la fuerza sobre la carga positiva y la circunferencia que describiría sería simétrica, de radio menor en el caso del electrón por tener menos masa.

Cuestión 4.-

Un haz luminoso está formado por dos rayos superpuestos: uno azul de longitud de onda 450 nm y otro rojo de longitud de onda 650 nm. Si este haz incide desde el aire sobre la superficie plana de un vidrio con un ángulo de incidencia de 30º, calcular:

a) El ángulo que forman entre sí los rayos azul y rojo reflejados.

b) El ángulo que forman entre sí los rayos azul y rojo refractados

Datos:

Índice de refracción del vidrio para el rayo azul 1'55

Índice de refracción del vidrio para el rayo rojo 1'40

Solución:

a) En la reflexión no influye el índice de refracción de la superficie por lo que los dos rayos se reflejan con el mismo ángulo, 30º, por lo que el ángulo entre los dos rayos será cero.

b) En la refracción sí influye el índice de refracción: sen i / sen r = n

Para el rayo azul: r = arc sen (sen 30 / 1'55) = 18'81º

Para el rayo rojo: r = arc sen (sen 30 / 1'40) = 20'92º

El ángulo que formarán los dos rayos después de la refracción será de 20'92 - 18'81 = 2'11º

Cuestión 5.-

Se dispone inicialmente de una muestra radiactiva que contiene 5.10^{18} átomos de un isótopo de Ra, cuyo periodo de semidesintegración (semivida) es de 3'64 días. Calcular:
a) La constante de desintegración radiactiva del Ra y la actividad inicial de la muestra.
b) El número de átomos en la muestra al cabo de 30 días.
Solución:

a) El número de átomos radiactivos en un instante t , a partir de N_o átomos radiactivos iniciales es:

$$N = N_o \,.\, e^{\lambda .t}$$

El periodo de semidesintegración es el tiempo que tarda una muestra en reducirse a la mitad

$$N_o / 2 = N_o \,.\, e^{\lambda .T} \quad \rightarrow \quad \lambda = \ln 2 / T = \ln 2 / 3'64 = 0'1904\ d^{-1}ías\ 2'2.10^{-6}\ s^{-1}$$

La actividad es la velocidad de desintegración en valor absoluto: $A = |dN/dt| = \lambda \,.\, N$

La actividad inicial será: $A_o = \lambda \,.\, N_o = 2'2.10^{-6} \,.\, 5.10^{18} = 1'1.10^{13}$ átomos/seg

b) El número de átomos en la muestra será siempre el mismo transcurra el tiempo que sea, es decir 5.10^{18} átomos. A medida que pase el tiempo habrá menos átomos radiactivos de Ra y más átomos de otro tipo.

Si lo que quiere preguntar es el número de átomos radiactivos al cabo de 30 días, la respuesta sería:

$$N = 5.10^{18} \,.\, e^{-0'1904.30} = 1'65.10^{16} \text{ átomos radiactivos}$$

Repertorio A. Problema 1.-

Mercurio describe una órbita elíptica alrededor de Sol. En el afelio su distancia al sol es $6'99.10^{10}$ m y su velocidad orbital es $3'88.10^{4}$ m/s. Su distancia al sol en el perihelio es $4'60.10^{10}$ m.
a) Calcular la velocidad orbital en el perihelio
b) Energía cinética, potencial y mecánica en el perihelio
c) Módulo de su momento lineal y angular en el perihelio
d) Qué magnitudes de las calculadas anteriormente permanece constante en el afelio.
Datos:

Masa de Mercurio $3'18.10^{23}$ kg
Masa del sol $1'99.10^{30}$ kg
Constante de gravitación universal $6'67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$

Solución:

d) Las magnitudes que permanecen constantes son la Energía mecánica y el momento angular, cuya constancia da lugar a que la trayectoria sea plana y la velocidad aerolar sea constante.

a) Al ser la velocidad aerolar constante $\rightarrow$ v.r = constante $\rightarrow$ $v_p \,.\, r_p = v_a \,.\, r_a$

$$v_p = v_a \,.\, r_a / r_p = 3'88.10^4 \,.\, 6'99.10^{10} / 4'60.10^{10} = 5'6 \,.\, 10^4 \text{ m/s}$$

b) $E_c = m.v^2/2 = 3'18.10^{23} \,.\, (5'6 \,.\, 10^4)^2 / 2 = 4'99.10^{32}$ julios

$$E_p = -\, G.\, M.m / r = -\, 6'67.10^{-11} \,.\, 1'99.10^{30} \,.\, 3'18.10^{23} / 4'60.10^{10} = -\, 9'18.10^{32} \text{ julios}$$

$$E_m = E_c + E_p = 4'99.10^{32} - 9'18.10^{32} = -\, 4'19.10^{32} \text{ julios}$$

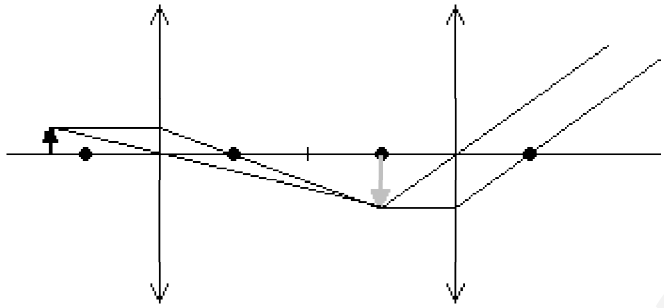
c) momento lineal o cantidad de movimiento es $c = m.v = 3'18.10^{23} \,.\, 5'6 \,.\, 10^4 = 1'78.10^{28}$ kg.m/s

El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento:

$$L = m.v.r = 1'78.10^{28} \,.\, 4'60.10^{10} = 8'19.10^{38} \text{ kg.m}^2\text{/s}$$

Repertorio A. Problema 2.-
Un objeto de 1 cm de altura se sitúa a 15 cm de una lente convergente de 10 cm de distancia focal.

a) Determinar la posición, tamaño y naturaleza de la imagen formada, efectuando su construcción geométrica.
b) ¿ A qué distancia de la lente anterior habría que colocar una segunda lente convergente de 20 cm de distancia focal para que la imagen final se formara en el infinito ?
Solución:



1 / x' - 1 / x = 1 / f'   à   1 / x' - 1 /(-15) = 1 / 10   à   x' = 30 cm

A = y' / y = x' / x = 30 /(-15) = - 2   à   y' = - 2.1 = - 2 cm

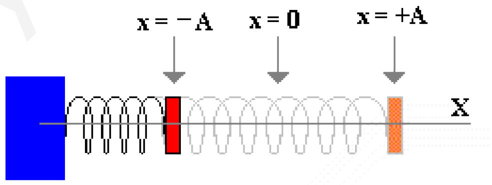
la imagen es real, mayor e invertida

b) Para que la imagen final producida al colocar una segunda lente convergente se produzca en el infinito, la imagen de la primera lente debe quedar en el plano focal objeto de la segunda lente, es decir a 20 cm delante de la segunda lente, por lo que las lentes tienen que estar separadas 30 + 20 = 50 cm

Repertorio B. Problema 1.-

Un bloque de 50 gramos, conectado a un muelle de constante elástica 35 N/m, oscila en una superficie horizontal sin rozamientos con una amplitud de 4 cm. Cuando el bloque se encuentra a 1 cm de su posición de equilibrio, calcular:
a) Fuerza sobre el bloque **b) Aceleración del bloque**
c) Energía potencial elástica **d) Velocidad del bloque**

Solución:



La fuerza es proporcional y opuesta a la deformación   F = - k.x

A 1 cm de la posición de equilibrio la fuerza será F = 35.0'01 = 0'35 N opuesta a la deformación

La aceleración será: a = F / m = 0'35 / 0'050 = 7 m / s^2 en el sentido de la fuerza

La energía potencial elástica es $E_p = k \cdot x^2 / 2 = 0'35 \cdot 0'01^2 / 2 = 0'0000175$ julios

La energía total es constante e igual a la existente en un extremo (v=0)

$m.v^2 / 2 + k \cdot x^2 / 2 = k \cdot A^2 / 2$ --> $v = (k.(A^2 - x^2) / m)^{1/2} = (0'35.(0'04^2 - 0'01^2) / 0'050)^{1/2}$

v = 0'102 m/s

Repertorio B. Problema 2.-

Un protón se encuentra situado en el origen de coordenadas del plano XY. Un electrón, inicialmente en reposo, está situado en el punto (2,0). Por el efecto del campo eléctrico creado por el protón (supuesto inmóvil), el electrón se acelera. Estando todas las coordenadas en μm, calcular:

- **a) Campo eléctrico y potencial creado por el protón en el punto (2,0)**
- **b) Energía cinética del electrón cuando se encuentre en el punto (1,0)**
- **c) Velocidad y momento lineal del electrón en el punto (1,0)**
- **d) Longitud de onda de De Broglie asociada al electrón en (1,0)**

Datos:

Constante de Coulomb 9.10^{9} N.m^2/C^2
Carga protón $1'6.10^{-19}$ C
Masa electrón $9'1.10^{-31}$kg
Constante de Planck $6'63.10^{-34}$ J.s

Solución:

a)

$$E = K.Q / r^2 = 9.10^9 \ . \ 1'6.10^{-19} / (2.10^{-6})^2 = 360 \text{ N/C}$$
$$V = K \ . \ Q / r = 9.10^9 \ . \ 1'6.10^{-19} / 2.10^{-6} = 7'2 \ .10^{-4} \text{ Voltios}$$

b) Al ser un campo conservativo la energía mecánica es constante, es decir la energía en el punto (2,0) debe ser igual que en el punto (1,0)

$$Ec(2,0) + Ep(2,0) = Ec(1,0) + Ep(1,0)$$

Como en el punto (2,0) la velocidad es cero su energía cinética es nula:

$$Ec(1,0) = Ep(2,0) - Ep(1,0) = K \ . \ Q \ .q / r_2 - K \ . \ Q.q / r_1 =$$

$$- 9.10^9 \ . \ 1'6.10^{-19} \ . \ 1'6.10^{-19} / 2.10^{-6} + 9.10^9 \ . \ 1'6.10^{-19} \ .1'6.10^{-19} / 1.10^{-6} = 1'152.10^{-22} \text{ julios}$$

c) La velocidad será: $Ec = m.v^2 /2 \rightarrow v = (2. Ec / m)^{1/2} = (2 \ . \ 1'152.10^{-22} / 9'1.10^{-31})^{1/2} =$

$$v = 15912 \text{ m/s}$$

Su momento $p = m.v = 15912 \ . \ 9'1.10^{-31} = 1'448.10^{-26}$ kg.m/s

d) La longitud de onda asociada será: $\lambda = h / p = 6'63.10^{-34} / 1'448.10^{-26} = 4'58.10^{-8}$ m