P. A. U. FÍSICA Madrid Junio 2002

Cuestión 1.-

Un planeta esférico tiene un radio de 3000 Km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿ Cuál es su densidad media ?

b) ¿ Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie del planeta?.

Solución:

El volumen del planeta será: $V = 4.p.R^3 /3 = 4.\ 3'14.(3.10^6)^3 /3 = 1'13.10^{20}$ m^3

La aceleración de la gravedad es la intensidad del campo gravitatorio creado por la masa del planeta:

$$g = G.M/r^2 \ \text{à}\ M = g_o.R^2 /G = 6.(3.10^6)^2 / 6'67.10^{-11} = 8'096.10^{23} \text{ Kg}$$

a) La densidad es la relación entre la masa y su volumen:

$$d = M/V = 8'096.10^{23} / 1'13.10^{20} = 7164'6 \text{ Kg / m}^3$$

b) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que suministrar a un objeto para que escape del campo gravitatorio:

$$(E_c + E_p)_R = (E_c + E_p)_{¥}$$

$$½ m.v^2 - G.M.m/R = ½ m.0^2 - G.M.m/¥^2$$

$$v = [2.G.M/R]^{1/2} = [2.R.G.M/R^2\ ]^{1/2} = [2.R.g_o]^{1/2} = [2.3.10^6\ .6]^{1/2} = 6000 \ \mathbf{m/s}$$

Cuestión 2.-

Escriba la expresión matemática de una onda armónica unidimensional como una función de x (distancia) y t (tiempo) y que contenga las magnitudes indicadas en cada uno de los siguientes apartados:

a) frecuencia angular w y velocidad de propagación v

b) período T y longitud de onda l

c) frecuencia angular w y número de onda k

d) Explique por qué es una función doblemente periódica

Solución:

La ecuación de una onda armónica unidireccional es:

$$y = A.\ sen\ (w\ .\ t - k\ .\ x)\ ,\quad w = 2p/\ T = 2p.\ F\ ,\quad k = 2p/l\ ,\quad v = l\ /\ T$$

siendo:

Y valor de la perturbación en el punto de coordenada x en el instante t	A amplitud en m
W frecuencia angular en rad/s	k número de onda en rad/m
l longitud de onda en m	T período en s
V velocidad de propagación en m/s	F frecuencia en Hz

a) En función de w y v

$$k = 2p/l = 2p\ /\ (v.T) = 2p\ .\ F\ /\ v = w\ /\ v$$

$$y = A.\ sen\ (w\ .\ t - k\ .\ x) = A.\ sen\ (w\ .\ t - w\ .\ x\ /v) = A.\ sen\ w.(t - x\ /v)$$

b) En función de T y l

$$k = 2p/l\ ,\ w = 2p/T$$

$$y = A.\ sen\ (w\ .\ t - k\ .\ x) = A.\ sen\ 2p\ .\ (t\ /\ T - x\ /\ l)$$

c) En función de w y k

$$y = A.\ sen\ (w\ .\ t - k\ .\ x)$$

d) La función es doblemente periódica en el espacio y en el tiempo.

Un punto fijo de coordenada x_o se ve sometido a una perturbación y cuyo valor varía periódicamente con el tiempo alcanzando el valor máximo de la amplitud.

$$y = A.\ sen\ (w\ .\ t - k\ .\ x_o),\ \text{periódica en el tiempo } T = 2p/w$$

Si por el contrario nos fijamos en todo el medio por el que se propaga la onda, en un instante dado, t_o, como si hiciéramos una fotografía, se observa que la función es periódica en el espacio; los puntos separados unos de otros por una longitud de onda están sometidos a la misma perturbación en ese instante.

$$y = A.\ sen\ (w\ .\ t_o - k\ .\ x),\ \text{periódica en el espacio } l = 2p/k$$

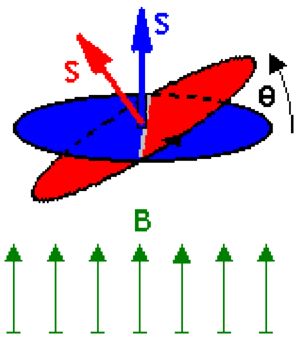
Cuestión 3.-

Una bobina de sección circular gira alrededor de uno de sus diámetros en un campo magnético uniforme perpendicular al eje de giro. El valor máximo de la f.e.m. inducida es de 50 V cuando la frecuencia es de 60 Hz. Determinar el valor máximo de la f.e.m. inducida si:

a) La frecuencia es 180 Hz en presencia del mismo campo magnético.

b) La frecuencia es 120 Hz y el campo magnético es doble.

Solución:



El flujo magnético que atraviesa la espira en un instante dado es:

$$F = B.\ S.\ \cos q$$

si la espira gira, el ángulo varía con el tiempo:

$$q = w.\ t \qquad F = B.\ S.\ \cos w.t$$

Según la ley de Faraday, toda variación del flujo magnético induce una fuerza electromotriz que es proporcional y opuesta a la variación de flujo en la unidad de tiempo:

$$e = -\ dF/dt = -\ d/dt\ (B.\ S.\ \cos w.t) = B.\ S.\ w.\ \mathrm{sen}\ w.t$$

El sentido de esta corriente inducida es tal que se opone a la variación de flujo, produciendo su propio campo magnético.

El valor máximo de la f.e.m es: $e_o = B.\ S.\ w = 2.p\ .\ B\ .\ S\ .F$

Como en todos los casos propuestos la superficie de la espira es la misma, la relación entre el valor máximo de la f.e.m. inducida y el producto de la intensidad del campo magnético por la frecuencia es constante:

$$e_o\ /\ (B.F) = 2.p\ .\ S = \text{constante en todos los supuestos de este problema}$$

a) Si la frecuencia pasa a ser 180 Hz, con el mismo campo magnético:

$$50\ /\ (B.60) = e_o\ /\ (B.180) \qquad e_o = 50.\ B.\ 180\ /\ (B.60) = 150\ \text{Voltios}$$

b) Si la frecuencia pasa a se 120 Hz, duplicándose el campo:

$$50\ /\ (B.60) = e_o\ /\ (2B.120) \qquad e_o = 50.2B.\ 120\ /\ (B.60) = 200\ \text{Voltios}$$

Cuestión 4.-

Un objeto luminoso se encuentra delante de un espejo cóncavo. Efectuar la construcción geométrica de la imagen, indicando su naturaleza, si el objeto está situado a una distancia igual, en valor absoluto, a:

a) La mitad de la distancia focal del espejo.

b) Al triple de la distancia focal del espejo.

Solución:

Para obtener la imagen de forma geométrica sólo hay que dibujar dos rayos:

1º Todo rayo que sale paralelo al eje se refleja pasando por el foco

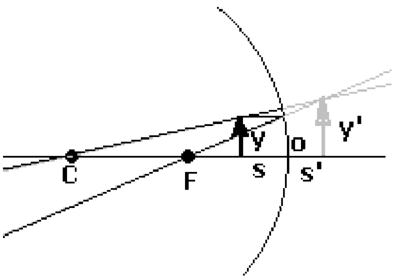
2º Todo rayo que pase por el centro de curvatura, doble de la distancia focal, se refleja en la misma dirección

Por otro lado, las ecuaciones de los espejos son:

$$1 / s' + 1 / s = 1 / f \ , \ A = y' / y = - s' / s$$

Sea a el valor absoluto de la distancia focal

a) Si el objeto está a la mitad de la distancia focal



La imagen resulta ser: mayor, derecha y virtual. Concretando más:

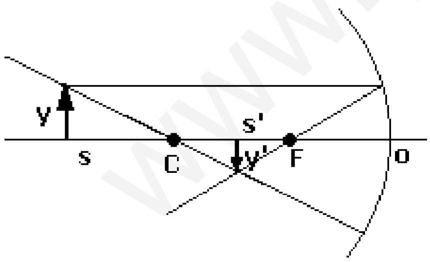
$$1 / s' + 1 / (- a/2) = 1 / (-a) \qquad 1 / s' - 2 / a = - 1/a$$

$$1 / s' = 2 / a - 1 / a = 1 / a \qquad s' = a$$

$$y' / y = - s' / s = - a /(-a/2) = 2 \qquad y' = 2y$$

la imagen es el doble que el objeto y está situada detrás del espejo a una distancia igual al valor absoluto de la distancia focal.

b) Si el objeto está al triple de la distancia focal



La imagen resulta ser: menor, invertida y real. Concretando más:

$$1 / s' + 1 / (- 3a) = 1 / (-a) \qquad 1 / s' - 1 / 3a = - 1/a$$

$$1 / s' = 1 / 3a - 1 / a = 1 / 3a - 3 / 3a = - 2 / 3ª$$

$$s' = - 3a / 2$$

$$y' / y = - s' / s = - (- 3a/2) /(-3a) = 1/2 \qquad y' = - y/2$$

la imagen es la mitad que el objeto y está situada delante del espejo a una distancia igual a una vez y media el valor absoluto de la distancia focal.

Cuestión 5.-

a) ¿ Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 200 veces la correspondiente a un neutrón de energí a cinética 6 eV ?

b) ¿ Se puede considerar que el electrón a esta velocidad es no relativista ?

Datos:

Masa del electrón = $9'1.10^{-31}$ kg , Carga del electrón = $1'6.10^{-19}$ C

Masa del neutrón = $1'7.10^{-27}$ kg , Velocidad de la luz = 3.10^{8} m/s

Solución:

Según De Broglie, toda partí cula en movimiento tiene una onda asociada, de tal manera que la frecuencia, F, de la onda y la energí a, E, de la partí cula están relacionadas, así como la longitud de onda, l , y el momento lineal, p :

$$E = h . F \ , \ p = h / l$$

La relación entre la Energí a cinética y el momento lineal de una partí cula es:

$$E = m . v^2 / 2 = m^2 . v^2 / (2.m) = p^2 / (2.m) \qquad p = (2.m . E)^{1/2}$$

La longitud de onda asociada al neutrón será:

$$E = 6 \text{ eV} = 6 . 1'6.10^{-19} = 9'6.10^{-19} \text{ Julios}$$

$$p_n = (2. 1'7.10^{-27} . 9'6.10^{-19})^{1/2} = 5'7.10^{-23} \text{ kg.m/s}$$

$$l_n = h / p = 1'75.10^{22} . h \text{ metros}$$

Si la longitud de onda del electrón debe ser 200 veces la del neutrón:

$$l_e = 200 . l_n = 200 . 1'75.10^{22} . h = 3'5.10^{24} . h \text{ metros}$$

la cantidad de movimiento y la velocidad del electrón deben ser:

$$p_e = m_e . v_e = h / l_e = h / (3'5.10^{24} . h) = 2'86.10^{-25} \text{ kg.m/s}$$

$$v_e = p_e / m_e = 2'86.10^{-25} / 9'1.10^{-31} = 313\,909 \text{ m/s} » 314 \text{ Km/s}$$

A esta velocidad el electrón es no relativista pues su velocidad es del orden del 0'1 % de la velocidad de la luz.

Repertorio A. Problema 1.-

La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es w_1 = 1'45.10^{-4} rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es L_1 = 2'2.10^{12} Kg.m^2.s^{-1}

a) Determinar el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa

b) ¿Qué energí a serí a necesaria para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular w_2 = 10^{-4} rad/s

Dato: Masa de Venus 4'87.10^{24} Kg

Solución:

Si el satélite está en una órbita estacionaria, la fuerza centrí peta que le obliga a describir la órbita es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$$m.v^2 /r = G.M.m/r^2 \text{ , ó bien } m.w^2 .r = G.M.m/r^2$$

$$\text{de donde: } r = [G.M/w^2]^{1/3} = [6'67.10^{-11} .4'87.10^{24} /(1'45.10^{-4})^2]^{1/3} = 24906 \text{ km}$$

El momento angular es L = I.w , siendo el momento de inercia I = m.r^2

$$L = m.r^2.w \quad \text{à } m = L /(w.r^2) = 2'2.10^{12} /[1'45.10^{-4} .(24'906.10^6)^2] = 24'46 \text{ Kg}$$

La energí a necesaria para cambiar la órbita del satélite será la diferencia de energí as entre las dos órbitas:

$$E = E_2 - E_1 = (Ec + Ep)_2 - (Ec + Ep)_1$$

$$Ec = m.v^2 /2 = (G.M.m/r)/2$$

$$Ep = - G.M.m /r$$

$$Ec + Ep = (G.M.m/r)/2 - G.M.m /r = - (G.M.m /r)/2$$

Para w_1 = 1'45.10^{-4} el radio de la órbita es r_1 = 24906 km

$$\text{y su energí a } (Ec + Ep)_1 = - 6'67.10^{-11}.4'87.10^{24}.\ 24'46 /(2.24'906.10^6) = - 1'6.10^8 \text{ Julios}$$

Para w_2 = 1.10^{-4} el radio de la órbita es: $r_2 = [G.M/w^2]^{1/3}$ = 31907 Km

$$\text{y su energí a } (Ec + Ep)_2 = - 6'67.10^{-11}.4'87.10^{24}.\ 24'46 /(2.31'907.10^6) = - 1'25.10^8 \text{ Julios}$$

La energí a a suministrar al satélite será:

$$E =- 1'25.10^8 + 1'6.10^8 = 0'35.10^8 \text{ Julios}$$

Repertorio A. Problema 2.-

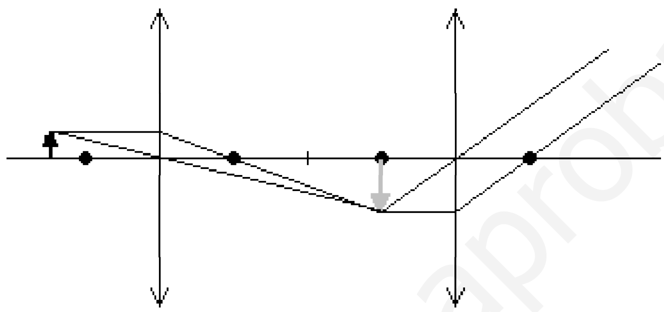
Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal, 10 cm, separadas 40 cm. Un objeto lineal de altura 1 cm se coloca delante de la primera lente a una distancia de 15 cm. Determinar:

a) La posición, tamaño y naturaleza de la imagen formada por la primera lente

b) La posición de la imagen final del sistema, efectuando su construcción geométrica.

Solución:

La construcción geométrica se hace teniendo en cuenta que la imagen producida por la primera lente es el objeto de la segunda lente:



Las ecuaciones de las lentes son:

$$1 / x' - 1 / x = 1 / f' \text{ , } A = y' / y = x' / x$$

Para la primera lente, todo en cm :

$$1 / x' - 1 / (- 15) = 1 / 10 \qquad 1 / x' = 1 / 10 - 1 / 15 = 1 / 30 \qquad x' = 30 \text{ cm}$$

$$A = y' / y = x' / x = 30 / (-15) = - 2 \qquad y' = -2.y = -2\text{-}1= -2 \text{ cm}$$

la imagen resulta ser el doble, invertida, real y situada a 30 cm detrás de la primera lente.

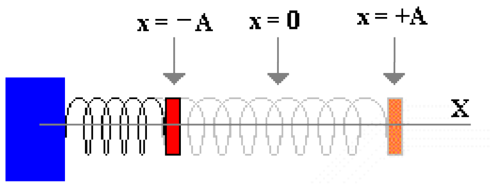
Al formarse esta imagen a 30 cm, estando las lentes separadas 40 cm y ser la segunda lente delgada también convergente y de distancia focal 10 cm, resulta que esta imagen inicial está situada en el foco objeto de la segunda lente por lo que no se formará ninguna imagen final al salir los rayos paralelos, se dice entonces que la imagen se forma en el infinito y con un tamaño infinito:

$$1 / x' - 1 / (-10) = 1 / 10 \qquad 1 / x' = 1 / 10 - 1 / 10 = 0 \qquad x' = \infty$$

Repertorio B. Problema 1.-

Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora es k = 10 N/m. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x = 0) y se deja en libertad. Determinar:
a) La expresión de la posición de la masa en función del tiempo, x = x(t)
b) Los módulos de la velocidad y aceleración de la masa en un punto situad a 2 cm de la posición de equilibrio.
c) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.
d) La energía mecánica del sistema oscilante.

Solución:



Al ser un muelle, se cumple la ley de Hock, es decir, la fuerza recuperadora es proporcional y opuesta a la deformación: $\mathbf{F} = - k \cdot \mathbf{x}$

Aplicando la ley de Newton, $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, se obtiene: $- k \cdot \mathbf{x} = m \cdot \mathbf{a}$ $\qquad$ $\mathbf{a} = - (k/m) \cdot \mathbf{x}$

La aceleración es proporcional y opuesta a la posición; es un M.A.S. Si denominamos A a la amplitud del movimiento y f al desfase, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = A.\ \mathrm{sen}\ (w.t - f) \qquad v = A \cdot w \cdot \cos (wt - f) \qquad a = - A \cdot w^2 \cdot \mathrm{sen}\ (wt - f)$$

$$w^2 = k/m \qquad w = \sqrt{(10/2)} = \sqrt{5}$$

Si empezamos a contar el tiempo cuando soltamos el resorte, extremo izquierdo, muelle comprimido 5 cm, el desfase valdrá:

$$- 0'05 = 0'05 \cdot \mathrm{sen}\ (w.0 - f) \qquad - 1 = - \mathrm{sen}\ f \qquad f = \pi /2$$

a) La posición en función del tiempo será:

$$x = 0'05 \cdot \mathrm{sen}\ (\sqrt{5} .t - \pi /2)$$

b) La velocidad y aceleración, cuando x=2 cm ,serán:

$$0'02 = 0'05 \cdot \mathrm{sen}\ (\sqrt{5} .t_o - \pi /2) \qquad \mathrm{sen}\ (\sqrt{5} .t_o - \pi /2) = 0'4$$

$$\cos (\sqrt{5} .t_o - \pi /2) = \sqrt{(1 - 0'4^2)} = 0'917$$

$$v = 0'05. \sqrt{5} \cdot \cos (\sqrt{5} .t_o - \pi /2) = 0'05. \sqrt{5} \cdot 0'917 = 0'1025\ m/s$$

$$a = - 0'05 \cdot 5 \cdot \mathrm{sen}\ (\sqrt{5} .t_o - \pi /2) = - 0'05 \cdot 5 \cdot 0'4 = - 0'1\ m/s^2$$

c) Si la masa se encuentra en un extremo la fuerza recuperadora será: $\mathbf{F} = - K \cdot \mathbf{x}$ $\qquad$ F = 10 . 0'05 = 0'5 N ,

hacia la izquierda en el extremo derecho, y hacia la derecha en el extremo izquierdo.

d) La energía mecánica será la suma de la energía cinética más la energía potencial del resorte:

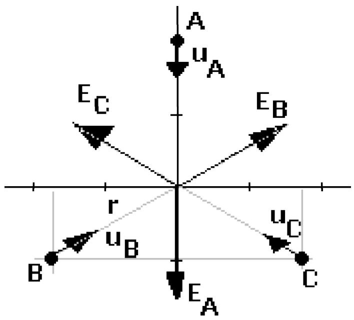
$$E_m = E_c + E_p = ½m.v^2 + ½k.x^2 = ½m.v^2 + ½m.w^2.x^2$$

$$E_m = ½m.A^2 .w^2 .\cos^2(w.t - p/2) + ½m.w^2.A^2 .\mathrm{sen}^2(w.t - p/2) = ½m.A^2 .w^2 = ½ . 2 . 0'05^2 . 5 = 0'0125 \text{ Julios, constante}$$

Repertorio B. Problema 2.-

Se tienen tres cargas en los vértices de un triángulo equilátero cuyas coordenadas, expresadas en cm, son:

A (0,2) , B (-√3 , -1) , C (√3 , -1)



Se sabe que las cargas situadas en los puntos B y C son iguales a 2 mC y que el campo eléctrico en el origen de coordenadas (centro del triángulo) es nulo. Determinar:

a) El valor de la carga situada en el vértice A

b) El potencial en el origen de coordenadas

Solución:

El campo eléctrico a una distancia r de una carga es : **E** = [K.Q / r^2].**u**

siendo **u** el vector unitario en el sentido de la carga al punto

Si el triángulo es equilátero el centro del mismo equidista de los vértices, por lo que el valor de r es el mismo para las tres cargas. Al mismo tiempo los sentidos de los tres campos en el centro del triángulo forman 120º.

Si el campo total es nulo, si el centro equidista de los vértices y si los campos forman 120º, las tres cargas deben ser iguales; por tanto el valor de la carga situada en el vértice A es + **2 mC**

El potencial en el centro del triángulo será la suma de los potenciales creados por cada carga:

$$V_O = V_{O,A} + V_{O,B} + V_{O,C}$$

El potencial en un punto debido a una carga es una magnitud escalar de valor:

$$V = K.Q / r$$

Al tener cada vértice la misma carga, al tener r el mismo valor para cada carga, se deduce que los potenciales creados por cada carga son iguales y de valor:

$$V_{O,A} = V_{O,B} = V_{O,C} = K.\ Q / r = 9.10^9\ .2.10^{-6} / 0'02 = 900\ 000 \text{ Voltios}$$

$$V_O = 3\ .\ 900000 = 2\ 700\ 000 \text{ Voltios}$$

Nota: Con los datos de las coordenadas se puede deducir que el triángulo es equilátero y que el centro del triángulo coincide con el centro de coordenadas, por lo que estos datos son redundantes.