FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Usamos el concepto de un logaritmo para definir una función logarítmica.

DEFINICIÓN:
Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Sea x cualquier número real positivo. La **función logarítmica con base** a se define por $f(x) = \log_a x$ ó $y = \log_a x$, donde $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$.

GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

ASÍNTOTA VERTICAL

La asíntota vertical es una recta vertical a la cual la gráfica de la función se acerca cuando la variable independiente (x), se acerca a un valor fijo c. Si la gráfica tiene este comportamiento, se dice entonces que la recta $x = c$ es una asíntota vertical para la gráfica. La gráfica de una función nunca interseca la asíntota vertical.

DEFINICIÓN: La recta $x = c$ es una asíntota vertical para la gráfica de la función f si a medida que los valores de x se acercan a un número real c, los valores de la función aumentan ($f(x) \to \infty$) o disminuyen ($f(x) \to -\infty$).
Como ya habíamos mencionado, este comportamiento se estudia en Cálculo, usando el concepto del límite de una función.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

El dominio (D) de una función logarítmica es el subconjunto de números reales para los cuales la expresión a la cual le hallamos el logaritmo (o sea, el argumento de la función), es siempre un número positivo. Esto lo establece la definición de la función logarítmica que aparece al principio de esta página, cuando dice que la función $f(x) = \log_a x$ está definida cuando x es un número real positivo. Para hallar este dominio formamos una desigualdad colocando el argumento de la función mayor que cero y resolviendo.

EJEMPLO: Traza la gráfica de:

1) $f(x) = \log_2 x$

$y = \log_2 x$

$y = \log_2 x$ si y solo si $2^y = x$

Dominio: $x > 0$

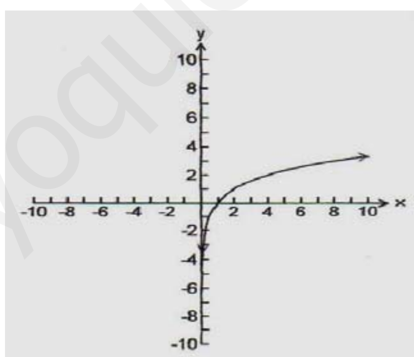
$\therefore\ D = (0, \infty)$

Para hacer la tabla de valores le asignaremos valores a la variable x, para los cuales $\log_2 x$ resulte cómodo de hallar . Siempre es conveniente usar el 1 y la base del logaritmo, así como potencias enteras de la base del logaritmo. Como la base es 2, podemos usar: $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^{-2} = \frac{1}{4}$; entre otros.

$y = \log_2 x$ ($\log_2 x = y$ es equivalente a $2^y = x$)

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

(Esta tabla se puede también construir asignando valores a la variable y, y sustituyendo estos valores en la ecuación $2^y = x$. Los valores de la variable y, pueden ser cualquier número real.)



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1) el dominio (D) es $(0, \infty)$
2) el campo de valores (CV) es $\Re$
3) no hay intercepto en el eje de y
4) el intercepto en el eje de x es (1,0)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es creciente en todo su dominio
7) el eje de y (con ecuación $x = 0$) es una asíntota vertical para la gráfica

De la gráfica se observa que a medida que los valores de x se acercan a cero por la derecha* , los valores de y disminuyen en sentido negativo. Podemos expresar esta idea así: A medida que $x \to 0^+$, $y \to -\infty$.

* Decir que los valores de x se acercan al cero por la derecha quiere decir que los valores de la variable x serán números mayores de cero, empezando con números que están lejos del cero y terminando con números cercanos al cero.

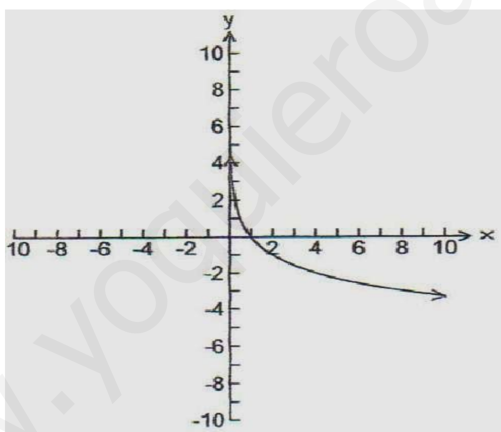
2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Dominio: $x > 0$

$\therefore\ D = (0, \infty)$

$\log_{\frac{1}{2}} x = y$ ó $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1) el dominio (D) es $(0, \infty)$
2) el campo de valores (CV) es $\Re$
3) no hay intercepto en el eje de y
4) el intercepto en el eje de x es (1,0)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente en todo su dominio
7) el eje de y (con ecuación $x = 0$) es una asíntota vertical para la gráfica
   De la gráfica se observa que a medida que los valores de x se acercan a cero por la derecha, los valores de y aumentan en sentido positivo. Podemos expresar esta idea así: A medida que $x \to 0^+$, $y \to \infty$.

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES PRESENTADAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES PARA LA FUNCIÓN: $f(x) = \log_a x$

1) el dominio (D) es $(0,\infty)$
2) el campo de valores (CV) es $\Re$
3) no hay intercepto en el eje de y
4) el intercepto en el eje de x es (1,0)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente si $0 < a < 1$
7) la función es creciente si $a > 1$
7) el eje de y (con ecuación $x = 0$) es una asíntota vertical para la gráfica

EJEMPLO: Traza la gráfica de $f(x) = \log_2(x-1)$.

Dominio:
$x-1>0$
$x>1$

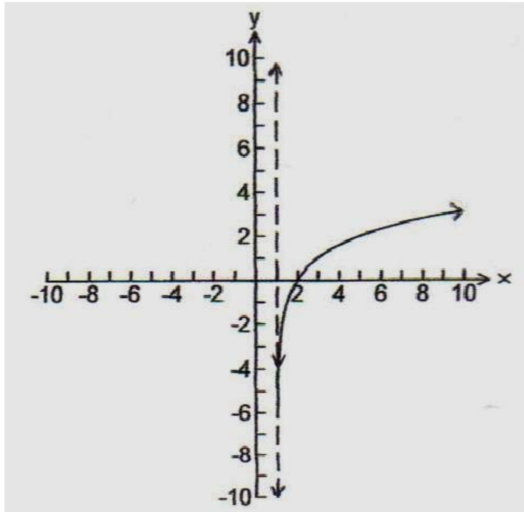
Asíntota vertical:
Para hallar la asíntota vertical se iguala el argumento de la función a cero y se resuelve, ya que la gráfica de una función logarítmica puede estar a la derecha o a la izquierda de la asíntota vertical.
$x-1=0$
$x=1$
Por lo tanto, la recta $x=1$ es una asíntota vertical para la gráfica.

Para hallar los valores de x de la tabla, igualamos el argumento a 1, a 2 y a potencias enteras de 2, como por ejemplo 4 y 8 ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$).

x	y			
2	0	$x-1=1$,	$x=2$,	$f(2)=0$
3	1	$x-1=2$,	$x=3$,	$f(3)=1$
5	2	$x-1=4$,	$x=5$,	$f(5)=2$
9	3	$x-1=8$,	$x=9$,	$f(9)=3$

OBSERVACIÓN: Sea $y = f(x)$. La gráfica de $y = f(x-h)$ es la gráfica de la función f movida h unidades hacia la derecha si $h>0$ y h unidades hacia la izquierda si $h<0$. Por lo tanto, para trazar la gráfica de $y = \log_2(x-1)$, pudimos haber movido la gráfica de $y = \log_2 x$ (la cual aparece en la página 19), 1 unidad hacia la derecha.

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:



EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

1) Cambia a forma logarítmica:

a) $5^3 = 125$ c) $e^0 = 1$

b) $10^{-2} = 0.01$ d) $27^{\frac{1}{3}} = 3$

2) Cambia a forma exponencial:

a) $\log 1{,}000 = 3$ c) $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$ d) $\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1$

3) Halla el valor de:

a) $\log 0.001$ c) $\ln e^{10}$ e) $5^{\log_5 7}$

b) $\log_2 \dfrac{1}{32}$ d) $\log_{\frac{1}{4}} 4$ f) $e^{\ln 3}$

4) Halla el dominio y la asíntota vertical para la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_4 x$ c) $h(x) = \log(x+3)$

b) $g(x) = 3\log_2(-x) + 1$ d) $p(x) = \log(1-x)$

5) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de y.

a) $f(x) = \log_3 x$ c) $F(x) = \log_2 x + 1$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $G(x) = \log_2(x-3)$

RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea $f(x) = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \Re$.
Sea $g(x) = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$.
Tanto f como g son funciones uno-a-uno.

Tenemos que:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$, para todo x en el dominio de g

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x$, para todo x en el dominio de f

Además, tenemos que:
a) Dominio de la función logarítmica = Campo de Valores de la función exponencial $= (0, \infty)$
b) Campo de Valores de la función logarítmica = Dominio de la función exponencial = $\Re$

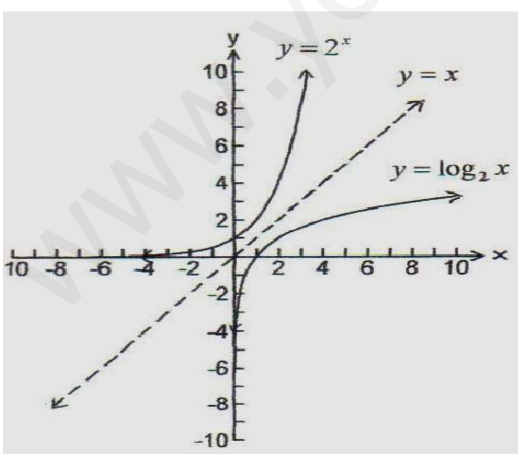
Por lo tanto, la función exponencial base a ($f(x) = a^x$) y la función logarítmica base a ($g(x) = \log_a x$) son funciones inversas. O sea, una función es la inversa de la otra.

EJEMPLO: En el mismo sistema cartesiano, traza la gráfica de:

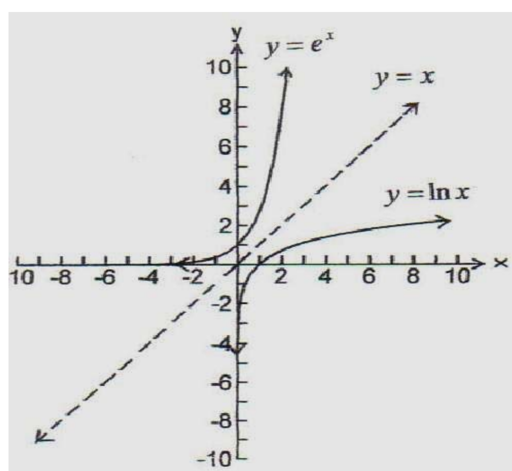
a) $y = 2^x$; $y = \log_2 x$
b) $y = e^x$; $y = \ln x$

SOLUCIÓN:

a)



b)



Como estas parejas de funciones son funciones inversas, entonces sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$. En general, si tenemos la gráfica de $y = a^x$ y la reflejamos a través de la recta $y = x$, obtenemos la gráfica de $y = \log_a x$ y viceversa.