yoquiero
aprobar
.es

Fórmulas de Derivadas e Integrales

ALGUNAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS:

1. $sen^2 u + cos^2 u = 1 \Rightarrow \begin{cases} sen^2 u = 1 - cos^2 u \\ cos^2 u = 1 - sen^2 u \end{cases}$

2. $1 + tan^2 u = sec^2 u$; $tan^2 u = sec^2 u - 1$

3. $1 + ctg^2 u = csc^2 u$; $ctg^2 u = csc^2 u - 1$

4. $sen^2 u = \dfrac{1 - cos\, 2u}{2}$

5. $cos^2 u = \dfrac{1 + cos\, 2u}{2}$

6. $sen\, u = \dfrac{1}{csc\, u} \Rightarrow \begin{cases} csc\, u = \dfrac{1}{senu} \\ csc\, u \;\; sen\, u = 1 \end{cases}$

7. $cos\, u = \dfrac{1}{sec\, u} \Rightarrow \begin{cases} sec\, u = \dfrac{1}{cos\, u} \\ sec\, u \;\; cos\, u = 1 \end{cases}$

8. $tan\, u = \dfrac{senu}{cos\, u}$

9. $ctg\, u = \dfrac{cos\, u}{senu}$

10. $sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \;\; cos\, \beta \pm sen\beta \;\; cos\, \alpha$

11. $sen\, 2\alpha = 2\, sen\alpha \;\; cos\, \alpha$

12. $cos(\alpha \pm \beta) = cos\, \alpha \;\; cos\, \beta \mp sen\beta \;\; sen\alpha$

13. $cos\, 2\alpha = cos^2 \alpha - sen^2 \alpha$

14. $tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tan\, \alpha \pm tan\, \beta}{1 \mp tan\, \alpha \;\; tan\, \beta}$

15. $tan(2\alpha) = \dfrac{2 \;\; tan\, \alpha}{1 - tan^2 \alpha}$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS:

1. $Log_b(A.B) = Log_b A + Log_b B$

2. $Log_b\left(\dfrac{A}{B}\right) = Log_b A - Log_b B$

3. $Log_b A^n = n \;\; Log_b A$

4. $Log_e A = ln\, A$

5. $ln(A.B) = ln\, A + ln\, B$

6. $ln\left(\dfrac{A}{B}\right) = ln\, A - ln\, B$

7. $ln\, A^n = n \;\; ln\, A$

8. $ln \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n} ln\, A$

8. $e^{ln\, N} = N$

9. $b^{Log_b N} = N$.

FORMULAS ELEMENTALES DE DERIVADAS

Sea las funciones $u = u(x)$; $v = v(x)$ *. Entonces:*

1. $\dfrac{d}{dx} C = 0$ *, donde C es una constante*

2. $\dfrac{d}{dx} u^n = n\, u^{n-1} \dfrac{du}{dx}$ *, donde* $n \in I\!R$

3. $\dfrac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}$ *, donde* $n \in I\!R$

4. $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\left(k\, u\right) = k \;\; \dfrac{du}{dx}$ *, donde* k *es una constante*

6. $\dfrac{d}{dx}\left(u.v\right) = u \;\; \dfrac{dv}{dx} + v \;\; \dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \;\; \dfrac{du}{dx} - u \;\; \dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

Consecuencias particulares de la fórmula 2, esto es:

8. $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$

9. $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{u} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\frac{du}{dx}$, donde $n \in \mathbb{R}$

11. $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, donde $n \in \mathbb{R}$

Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas:

12. $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}; \ (a > 0)$

13. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

16. $\frac{d}{dx}Log_a u = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}Log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

18. $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

20. $\frac{d}{dx}u^v = v u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

Derivada de funciones trigonométricas:

21. $\frac{d}{dx}sen\, u = cos\, u \frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}sen\, x = cos\, x$

23. $\frac{d}{dx}cos\, u = -sen\, u \frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx}cos\, x = -sen\, x$

25. $\frac{d}{dx}tan\, u = sec^2 u \frac{du}{dx}$

26. $\frac{d}{dx}tan\, x = sec^2 x$

27. $\frac{d}{dx}ctg\, u = -csc^2 u \frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}ctg\, x = -csc^2 x$

29. $\frac{d}{dx}sec\, u = sec\, u \ tan\, u \frac{du}{dx}$

30. $\frac{d}{dx}sec\, x = sec\, x \ tan\, x$

31. $\frac{d}{dx}csc\, u = -csc\, u \ ctgu \frac{du}{dx}$

32. $\frac{d}{dx}csc\, x = -csc\, x \ ctgx$

Derivada de funciones trigonométricas inversas:

33. $\frac{d}{dx}arcsen\, u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

34. $\frac{d}{dx}arcsen\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

35. $\frac{d}{dx}arc\cos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

36. $\frac{d}{dx}arc\cos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

37. $\frac{d}{dx}arc\tan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

38. $\frac{d}{dx}arc\tan x = \frac{1}{1+x^2}$

39. $\frac{d}{dx}arc\,ctgu = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

40. $\frac{d}{dx}arc\,ctgx = \frac{-1}{1+x^2}$

41. $\frac{d}{dx}arc\ sec\, u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

42. $\frac{d}{dx}arc\ sec\, x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

43. $\frac{d}{dx}arc\ csc\, u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

44. $\frac{d}{dx}arc\ csc\, x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

RECTAS TANGENTES Y NORMALES

Recta Tangente.- *La recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $P = (a, f(a))$, está dada por:

$$\boxed{L_T: \quad y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

Recta Normal.- *La recta normal a la gráfica de* f *en el punto* $P = (a, f(a))$, está dada por:

$$\boxed{L_T: \quad y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$

APLICACIONES DE LA DERIVADA:

Funciones crecientes y decrecientes

Teorema 1. *Si* f *es continua sobre* $[a,b]$ *y si* $f'(x) > 0, \ \forall x \in [a,b]$, *entonces* f *es* ***creciente (estrictamente)*** *sobre* $[a,b]$.

Teorema 2. *Si* f *es continua sobre* $[a,b]$ *y si* $f'(x) < 0, \ \forall x \in [a,b]$, *entonces* f *es* ***decreciente (estrictamente)*** *sobre* $[a,b]$.

Máximos y Mínimos

Definición 1. *Sea* f *una función definida en* I *, se llaman* ***punto crítico de*** f *a aquellos puntos* c *del intervalo* I *, y cumple:*

i) $f'(c) = 0$ *ó*

ii) $f'(c)$ *no existe ó*

iii) c *es uno de los extremos. Si es que éstos estuvieron considerados en el intervalo* I .

Criterio de la Primera derivada:

Teorema 3.- *Sea* c *un punto crítico de* f *. Si existe un intervalo* $[a,b]$, *donde* f *es continua tal que* $c \in \langle a,b \rangle$ *, entonces:*

i) $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \ x \in \langle a,c \rangle \ \ y \\ f'(x), \ < 0 \ \ x \in \langle c,b \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)$ *es un* ***Máximo relativo*** *de* f .

ii) $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0, \ x \in \langle a,c \rangle \ \ y \\ f'(x), \ > 0 \ \ x \in \langle c,b \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)$ *es un* ***Mínimo relativo*** *de* f .

iii) $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \ x \in \langle a,c \rangle \ \ y \\ f'(x) \ > 0 \ \ x \in \langle c,b \rangle \end{array}\right\} \ ó \ \left\{\begin{array}{l} f'(x) \ > 0, \ x \in \langle a,c \rangle \ \ y \\ f'(x) \ > 0 \ \ x \in \langle c,b \rangle \end{array}\right. \Rightarrow f(c)$ *no es máximo y mínimo de* f .

Observaciones: *Sí* c *un punto crítico de* f *. De teorema se desprende:*

1. *Si cambia de "* $+$ *" (antes de c) a "* $-$ *" (después de* c *), entonces se tiene un* ***máximo relativo.***
2. *Si cambia de "* $-$ *" (antes de* c *) a "* $+$ *"(después de c), entonces se tiene un* ***mínimo relativo .***

Criterio de la Segunda derivada:

Teorema 4.- *Sea* f *una función diferenciable en el entorno de* c *. Si* $f'(c) = 0$ *y si* $f''(c)$ *, entonces:*

i) $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ *es un* ***máximo relativo.***

ii) $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ *es un* ***mínimo relativo.***

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\ldots.+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}\right)dx$$

Luego se determina las constantes

$A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots.\ ,A_n\,,\ B_1\,,\ B_2\,,\ \ldots.\ ,B_n$

***Caso IV**.- Si* $Q(x) = (a\,x^2+b\,x+c)^n;\ \ n\in IN$ *, entonces:*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1x+B_1}{(a\,x^2+b\,x+c)^1}+\frac{A_2x+B_2}{(a\,x^2+b\,x+c)^2}+\ldots.+\frac{A_nx+B_n}{(a\,x^2+b\,x+c)^n}\right)dx$$

Luego se determina las constantes

$A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots.\ ,A_n\,,\ B_1\,,\ B_2\,,\ \ldots.\ ,B_n$

B. *Si el* $grado\big(P(x)\big) > grado\big(Q(x)\big)$*, entonces se procede a dividir, para luego aplicarlos casos anteriores.*

INTEGRACION DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES

A. Integrales de la forma:

$$\int R\left(x\,,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\ \ldots.\ ,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right)dx\ ;\ \ n_1,\ldots,n_k\in \mathbb{N}$$

Para evaluar éste tipo de integral, hacemos el siguiente cambio de variable:

$t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *, donde* $n = M.C.M.\{n_1\,,\ n_2\,,\ \ldots\ ,n_k\}$

B. Integrales de la forma:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{px^2+qx+r}}\ ;\ \ n\in\mathbb{N}$$

Para evaluar éste tipo de integral, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x - a = \frac{1}{t}\ \ \Rightarrow\ \ dx = -\frac{dt}{t^2}$$

C. Integrales de la forma:

$\displaystyle\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx\ ;\ \ a\neq 0,\ b\neq 0$ *(Integrales del binomio diferencial)*

Esta integral se reduce a la integral de función racional de una variable solamente en los siguientes casos:

Caso I.- Si $p\in\mathbb{Z}$ *, hacemos la sustitución:* $x = t^k$ *,*

donde $k =$ *M.C.M.[denominador de m y n]*

Caso II.- Si $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ *, hacemos la sustitución:* $a+bx^n = t^s$ *,*

donde " $s =$ *es el denominador de* p *" (* $p = \dfrac{r}{s}$ *; siendo r y s son primos entre si).*

Caso III.- Si $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ *,*

hacemos la sustitución: $a+bx^n = x^nt^s$ *ó* $ax^{-n}+b = t^s$ *,*

donde " $s =$ *es el denominador de* p *" (* $p = \dfrac{r}{s}$ *; siendo r y s son primos entre si).*

FORMULAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

Primer Grupo de Fórmulas:

1. $\displaystyle\int du = u + C$

2. $\displaystyle\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C\ ;\ n\neq 1,\ n\in\mathbb{R}$

3. $\displaystyle\int\frac{du}{u} = ln\left|u\right| + C$

4. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{ln\,a}+C\ ;\ a>0,\ a\neq 1$

5. $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$

Segundo Grupo de Fórmulas

6. $\displaystyle\int sen\,u\,du = -cos\,u + C$

7. $\displaystyle\int cos\,u\,du = sen\,u + C$

8. $\displaystyle\int tan\,u\,du = ln\left|sec\,u\right| + C = -ln\left|cos\,u\right| + C$

9. $\displaystyle\int ctgu\,du = ln\left|sen\,u\right| + C$

10. $\displaystyle\int sec\,u\,du = ln\left|sec\,u + tan\,u\right| + C$

11. $\displaystyle\int csc\,u\,du = ln\left|csc\,u - ctgu\right| + C$

12. $\displaystyle\int sec^2 u\,du = tan\,u + C$

13. $\displaystyle\int csc^2 u\,du = -ctgu + C$

14. $\displaystyle\int tanu\ \ secu\,du = tanu + C$

15. $\displaystyle\int csc\,u\,ctgu\,du = -csc\,u + C$

Tercer Grupo de Fórmulas:

16. $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsen\frac{u}{a}+C;\quad (a>0)$

17. $\displaystyle\int\frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{u}{a}+C;\quad (a>0)$

18. $\displaystyle\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}arc\,sec\frac{|u|}{a}+C;\quad (a>0)$

19. $\displaystyle\int\frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C;\quad (a>0)$

20. $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C$

21. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2-u^2}+a^2arcsen\frac{u}{a}\right]+C;\quad (a>0)$

22. $\displaystyle\int\sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2\pm a^2}\pm a^2\,ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|\right]+C$

Fórmulas adicionales:

23. $\int senh\,u\ du = cosh\,u + C$

24. $\int cosh\,u\ du = senh\,u + C$

25. $\int tanh\,u\ du = ln\left| cosh\,u \right| + C$

26. $\int sech^2 u\ du = tanh\,u + C$

27. $\int csch^2\,u\ du = -ctgh u + C$

28. $\int sech\,u\ tanh\,u\ du = -sech\,u + C$

29. $\int csch\,u\ ctgh u\ du = -csch\,u + C$

INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES QUE CONTIENEN TRINOMIO CUADRADO

Caso I:

* $\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$, para determinar ésta integral, será suficiente completar a cuadrados en el trinomio y luego aplicar las fórmulas (17) o (19).

* $\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$ para determinar ésta integral, será suficiente completar a cuadrados en el trinomio y luego aplicar las fórmulas (16) o (20).

Caso II.- Para calcular las integrales:

$$I_1 = \int \frac{(ax+b)\,dx}{px^2 + qx + r} \qquad I_2 = \int \frac{(ax+b)\,dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

Usaremos el artificio siguiente: $ax + b = \frac{a}{2p}(2px + q) - \frac{a\,q}{2p} + b$

Donde $(2px + q)$ es la derivada del trinomio cuadrado.

Entonces:

* $$\int \frac{(ax+b)\,dx}{px^2 + qx + r} = \frac{a}{2p}\int \frac{(2px+q)\,dx}{px^2 + qx + r} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right)\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

$$= \frac{a}{2p} ln\left|px^2 + qx + r\right| + \left(b - \frac{aq}{2p}\right)\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

Para determinar la última integral se usa el caso anterior

* $$\int \frac{(ax+b)\,dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} = \frac{a}{2p}\int \frac{(2px+q)\,dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

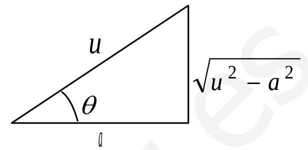
$$= \frac{a}{p}\sqrt{px^2 + qx + r} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

Para determinar la última integral se usa el caso anterior

Se elimina el radical:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)} = a\sqrt{tan^2\theta} = a\ tan\,\theta$$

Para retornar a la variable " u " construimos el triángulo: $sec\,\theta = \frac{u}{a}$



Observación.- Cuando los integrandos contiene:

1. $\sqrt{a^2 - u^2}$, se hace la sustitución: $u = a\ tanh\,t$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2(1 - tanh^2 t)} = a\,sech\,t$$

2. $\sqrt{a^2 + u^2}$, se hace la sustitución: $u = a\,senh\,t$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2(1 + senh^2 t)} = a\ cosh\,t$$

3. $\sqrt{u^2 - a^2}$, se hace la sustitución: $u = a\,cosh\,t$

Se elimina el radical:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2(cosh^2 t - 1)} = a\ senh\,t$$

METODO DE INTEGRACION POR FRACCIONES PARCIALES

Para integrar $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, procedemos del siguiente modo:

A. Si el $grado\left(Q(x)\right) > grado\left(P(x)\right)$, entonces descomponemos en fracciones parciales, esto es:

Caso I.- Si $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ \ldots.\ (x - a_n)$, entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots. + \frac{A_n}{x - a_n}\right)dx$$

Luego se determina las constantes $A_1, A_2, \ldots., A_n$

Caso II.- Si $Q(x) = (x - a)^n$; $n \in I\!N$, entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots. + \frac{A_n}{(x-a)^n}\right)dx$$

Luego se determina las constantes $A_1, A_2, \ldots., A_n$

Caso III.- Si

$Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)\ \ldots.\ (a_nx^2 + b_nx + c_n)$, entonces:

Para evaluar éste tipo de integrales se usa la identidad trigonométrica siguiente:

$$sen(Au)\,cos(Bu) = \frac{1}{2}\left(sen(A+B)\,u + sen(A-B)u\right)$$

* $I_2 = \int cos(Au)\,cos(Bu)\,du$

Para evaluar éste tipo de integrales se usa la identidad trigonométrica siguiente:

$$cos(Au)\,cos(Bu) = \frac{1}{2}\left(cos(A-B)\,u + cos(A+B)u\right)$$

* $I_3 = \int sen(Au)\,sen(Bu)\,du$

Para evaluar éste tipo de integrales se usa la identidad trigonométrica siguiente:

$$\mathrm{sen}(Au)\,sen(Bu) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B)\,u - \cos(A+B)u\right)$$

INTEGRACION POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

A. *Si la integral contiene:* $\sqrt{a^2-u^2}$

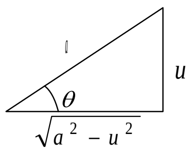
Entonces se hace la sustitución:

$u = a\,sen\,\theta \quad\Rightarrow\quad du = a\,cos\,\theta\,d\theta$

Se elimina el radical:

$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2(1-sen^2\theta)} = a\sqrt{cos^2\theta} = a\,cos\theta$

Para retornar a la variable "u" construimos el triángulo: $sen\,\theta = \dfrac{u}{a}$



B. *Si la integral contiene:* $\sqrt{a^2+u^2}$

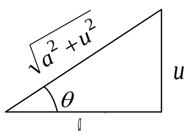
Entonces se hace la sustitución:

$u = a\,tan\,\theta \quad\Rightarrow\quad du = a\,sec^2\theta\,d\theta$

Se elimina el radical:

$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2(1+tan^2\theta)} = a\sqrt{sec^2\theta} = a\,sec\theta$

Para retornar a la variable "u" construimos el triángulo: $tan\,\theta = \dfrac{u}{a}$



C. *Si la integral contiene:* $\sqrt{u^2-a^2}$

Entonces se hace la sustitución:

$u = a\,sec\,\theta \quad\Rightarrow\quad du = a\,sec\,\theta\,tan\,\theta\,d\theta$

METODO DE INTEGRACION POR PARTES

$$\boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}$$

Para aplicar esta fórmula, se debe descomponer el integrando en dos factores u i dv de los cuales debe elegirse que "u" se tenga que derivar y "dv" integrar de manera que sea posible la integración.

INTEGRALES QUE CONTIENEN POTENCIAS EN LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

A. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int sen^n u\,du\;;\quad I_2 = \int cos^n u\,du \text{ donde } n\in \mathbb{N}$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan dos casos:

<u>Caso I</u>.- *Si n = Número **<u>IMPAR</u>**, entonces:*

$n = 2k+1,\ \forall k = 0,1,2,3,\ldots$

* $I_1 = \int sen^n u\,du = \int \left(sen^2u\right)^k sen\,u\,du = \int \left(1-cos^2u\right)^k sen\,u\,du$, *luego para calcular hacemos el cambio variable:* $w = cos\,u$.

* $I_2 = \int cos^n u\,du = \int \left(cos^2u\right)^k cos\,u\,du = \int \left(1-sen^2u\right)^k cos\,u\,du$, *luego para calcular hacemos el cambio variable:* $w = senu$.

<u>Caso II</u>.- *Si n = Número **<u>PAR</u>**, entonces:*

$n = 2k,\ \forall k = 1,2,3,\ldots$

* $I_1 = \int sen^n u\,du = \int \left(sen^2u\right)^k du = \int \left(\dfrac{1-cos\,2u}{2}\right)^k du$

* $I_2 = \int cos^n u\,du = \int \left(cos^2u\right)^k du = \int \left(\dfrac{1+cos\,2u}{2}\right)^k du$

Luego se desarrolla en los integrandos la potencia k, de donde se requerirá de nuevo el uso de los casos I y II.

B. Integrales de la forma:

$$I = \int sen^n u\;cos^m u\,du$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan dos casos:

<u>Caso I</u>.- *Si "n" ó "m" es un número entero positivo **<u>IMPAR</u>**, de ser así el otro puede ser cualquier número, esto es:*

Por ejemplo si: *n = Número entero positivo **<u>Impar</u>** y*
m = cualquier número.

Entonces: $n = 2k+1,\ \forall k = 0,1,2,3,\ldots$

* $I = \int \left(sen^2u\right)^k cos^m u\;sen\,u\,du = \int \left(1-cos^2u\right)^k cos^m u\;senu\,du$, *luego para calcular hacemos el cambio variable:* $w = cos\,u$.

Por ejemplo si: *m = Número entero positivo **<u>Impar</u>** y*
n = cualquier número.

Entonces: $m = 2k + 1, \ \forall k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

* $I = \int sen^n u \left(cos^2 u\right)^k cos\, u\, du = \int sen^n u \left(1 - sen^2 u\right)^k cos\, u\, du$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = sen u$.

__Caso II__.- Si "n" y "m" son números enteros positivos **__PARES__**, entonces para calcular dicha integral se utiliza las identidades siguientes:

$$sen^2 u = \frac{1 - cos\, 2u}{2}; \quad cos^2 u = \frac{1 + cos\, 2u}{2}$$

C. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int tan^n u\ sec^m u\, du; \quad I_2 = \int ctg^n u\ csc^m u\ du$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan los siguientes casos:

__Caso I__.- Si n = Número entero positivo **__IMPAR__** y
m = Cualquier número.

Entonces:
$n = 2k + 1, \ \forall k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$*I_1 = \int tan^n u\ sec^m u\ du = \int \left(tan^2 u\right)^k\ sec^{m-1} u\ (tan\, u\ sec\, u\ du)$$

$= \int \left(sec^2 u - 1\right)^k\ sec^{m-1} u\ (tan\, u\ sec\, u\ du)$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = sec\, u$.

$$*I_2 = \int ctg^n u\ sec^m u\ du = \int \left(ctg^2 u\right)^k\ csc^{m-1} u\ (ctg\, u\ \ csc\, u\ du)$$

$= \int \left(csc^2 u - 1\right)^k\ csc^{m-1} u\ (ctg\, u\ csc\, u\ du)$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = csc\, u$.

__Caso II__.- Si m = Número **__PAR__** y
n = Cualquier número.

Entonces:
$n = 2k, \ \forall k = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$* \ I_1 = \int tan^n u\ sec^m u\ du = \int tan^n u \left(sec^2 u\right)^{(m-2)/2}\ sec^2 u\ du$$

$= \int tan^n u \left(1 + tan^2 u\right)^{(m-2)/2}\ sec^2 u\ du$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = \tan u$.

$$* \ I_2 = \int ctg^n u\ csc^m u\ du = \int ctg^n u \left(csc^2 u\right)^{(m-2)/2}\ csc^2 u\ du$$

$= \int ctg^n u \left(1 + ctg^2 u\right)^{(m-2)/2}\ csc^2 u\ du$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = ctgu$.

__Caso III__.- Si m = Número entero positivo **__IMPAR__** y
n = Número entero positivo **__PAR__**.

Entonces la solución se determina mediante el método de **__integración por partes__**

D. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int tan^n u\ du; \quad I_2 = \int ctg^n u\ du \ \text{ donde } \ n \in \mathbb{Z}^+$$

Si " n " es un número entero positivo **__PAR__** o **__IMPAR__** , procedemos de la siguiente manera:

$$*I_1 = \int tan^n u\ du = \int tan^{n-2} u\ tan^2 u\ du = \int tan^{n-2} u\ (sec^2 u - 1)\ du$$

$$= \int tan^{n-2} u\ sec^2 u\ du - \int tan^{n-2} u\ du = \frac{tan^{n-1} u}{n-1} - \int tan^{n-2} u\ du$$

Este proceso repetimos cuantas veces sea necesario, hasta obtener la solución.
Análogamente tenemos:

$$*I_2 = \int ctg^n u\ du = \int ctg^{n-2} u\ ctg^2 u\ du = \int ctg^{n-2} u\ (csc^2 u - 1)\ du$$

$$= \int ctg^{n-2} u\ csc^2 u\ du - \int ctg^{n-2} u\ du = -\frac{ctg^{n-1} u}{n-1} - \int ctg^{n-2} u\ du$$

E. Integrales de la forma:

$$I_1 = \int sec^n u\, du; \quad I_2 = \int csc^n u\ du \ \text{ donde } \ n \in \mathbb{Z}^+$$

Para evaluar éste tipo de integrales se presentan los siguientes casos:

__Caso I__.- Si n = Número positivo **__PAR__**.

Entonces:
$n = 2k, \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots$

$$* \ I_1 = \int sec^n u\, du = \int \left(sec^2 u\right)^{(n-2)/2}\ sec^2 u\ du$$

$= \int \left(1 + tan^2 u\right)^{(n-2)/2}\ sec^2 u\ du$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = tan\, u$.

$$* \ I_1 = \int csc^n u\, du = \int \left(csc^2 u\right)^{(n-2)/2}\ csc^2 u\ du$$

$= \int \left(1 + ctg^2 u\right)^{(n-2)/2}\ csc^2 u\ du$, luego para calcular hacemos el cambio variable: $w = ctgu$.

__Caso II__.- Si n = Número positivo **__IMPAR__**, entonces la solución se determina mediante el método de **__integración por partes__**.

F. Integrales de la forma:

$$* \ I_1 = \int sen(Au)\, cos(Bu)\ du$$