Ejercicios resueltos de Inferencia Estadística

1. En el último campeonato regional de maratón, la variable "tiempo empleado en recorrer la distancia de 42 km. y 195 m." se distribuyó normalmente con una desviación típica de 0,49 horas. En una muestra de 38 atletas, se ha medido la misma variable y el valor obtenido para la media es de 3,29 horas. Hallar un intervalo de confianza para la media poblacional con una confianza del 85 % y explicar el significado de este intervalo.

   Solución:
   Al 85 % de confianza se tiene que $1-\alpha = 0{,}85 \Rightarrow \alpha = 0{,}15 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}075 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}925$. De aquí se obtiene, mirando en la tabla de la distribución normal $N(0,\ 1)$ que $z_{\alpha/2} = 1{,}44$. Por tanto el intervalo de confianza es:

   $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3{,}29 - 1{,}44\cdot\frac{0{,}49}{\sqrt{38}},\ 3{,}29 + 1{,}44\cdot\frac{0{,}49}{\sqrt{38}}\right) = (3{,}18,\ 3,40)$$

   Este intervalo quiere decir que, con un nivel confianza del 85 %, la media μ de la población se encuentra entre 3,18 y 3,40.

2. Según un estudio realizado por una empresa hotelera durante el año 1992, la distribución del tiempo de estancia de cada viajero fue normal con una media de 3,7 días y una desviación típica de 1,1 días. A lo largo del año 2000 se analizó el tiempo de estancia de 49 viajeros elegidos al azar, obteniéndose una media de 3,5 días. ¿Podemos afirmar que esta diferencia es debida al azar con una confianza del 88 %? Con el mismo nivel de confianza, ¿cambiaría la respuesta si esta media de 3,5 días se hubiera obtenido al analizar el tiempo de estancia de 100 viajeros elegidos al azar?

   Solución:
   Al 88 % de confianza se tiene que $1-\alpha = 0{,}88 \Rightarrow \alpha = 0{,}12 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}06 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}94$. De aquí se obtiene, mirando en la tabla de la distribución normal $N(0,\ 1)$ que $z_{\alpha/2} = 1{,}555$. El intervalo de confianza es por tanto:

   $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3{,}5 - 1{,}555\cdot\frac{1{,}1}{\sqrt{49}},\ 3{,}5 + 1{,}555\cdot\frac{1{,}1}{\sqrt{49}}\right) = (3{,}26,\ 3,74)$$

   Como $\mu = 3{,}7 \in (3{,}26,\ 3,74)$ podemos afirmar, con una confianza del 88 %, que esta diferencia sí que es debida al azar, ya que la diferencia no es significativa.
   Para el tamaño de la muestra $n = 100$, el intervalo de confianza es:

   $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3{,}5 - 1{,}555\cdot\frac{1{,}1}{\sqrt{100}},\ 3{,}5 + 1{,}555\cdot\frac{1{,}1}{\sqrt{100}}\right) = (3{,}33,\ 3,67)$$

   En este caso la media poblacional $\mu = 3{,}7$ no se encuentra dentro del intervalo de confianza, con lo que la diferencia entre esta media y la media muestral $\overline{x} = 3{,}5$, no es debida al azar, es decir, existe diferencia significativa.

3. En una empresa de exportación de cítricos se investiga el peso medio de cierta variedad de naranjas. Se admite un error máximo de 10 gramos, con una confianza del 95 %. Se sabe por estudios de otros años que el peso medio se distribuye normalmente siendo la desviación típica 60 gramos. ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra a elegir? ¿Y si se desea una confianza del 99 %?

   Solución:

   El error máximo admisible viene dado por la expresión $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

   A una confianza del 95 % se tiene que $1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975$. Para este valor, buscando adecuadamente en la tabla de la distribución normal $N(0,\ 1)$ tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

   Como el error máximo que se admite es de 10 gramos:

   $$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 10 = 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 1{,}96 \cdot \frac{60}{10} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 11{,}76 \Leftrightarrow n = 138{,}2976$$

   Por tanto el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo no supere los 10 gramos, a una confianza del 95 %, ha de ser de $n = 139$.

   Si la confianza es del 99 %, entonces $1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}995$. Y, para este valor se obtiene, utilizando la tabla de la normal $N(0,\ 1)$, que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$. Por tanto, este caso:

   $$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 10 = 2{,}575 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2{,}575 \cdot \frac{60}{10} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 15{,}45 \Leftrightarrow n = 238{,}7025$$

   Ahora, el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo no supere los 10 gramos, a una confianza del 99 %, ha de ser de $n = 239$.

4. Se sabe que en una muestra de 36 alumnos se ha medido la variable "velocidad lectora" y el valor obtenido para la media ha sido 9,6. Suponiendo que esta variable tiene una distribución normal en la población con una desviación típica de 4,9, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la media poblacional de esta variable es $\mu = 15$, con un riesgo igual o menor al 5 %?

   Solución:

   Si el riesgo es menor o igual al 5 %, entonces el valor máximo para α es $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975$. Para este valor se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así, el intervalo de confianza para la media muestral $\overline{x} = 9{,}6$ es:

   $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(9{,}6 - 1{,}96 \cdot \frac{4{,}9}{\sqrt{36}},\ 9{,}6 + 1{,}96 \cdot \frac{4{,}9}{\sqrt{36}}\right) = (8,\ 11{,}2)$$

   Por tanto, como $\mu = 15 \notin (8,\ 11{,}2)$, no se puede aceptar la hipótesis de que la media poblacional de esta variable sea $\mu = 15$.

5. Queremos estimar la media de una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una desviación típica de 3,2. Para ello, se toma una muestra de 64 individuos obteniéndose una media de 32,5 ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la media de la población está entre 31,5 y 33,5?
Si la desviación típica de la población fuera 3, ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra con la cual estimamos la media poblacional si queremos que el nivel de confianza sea del 99 % y el error admisible no supere el valor de 0,75?
Solución:
Llamando E al error máximo admisible, el intervalo de confianza para la media muestral $\overline{x}$, es $(\overline{x}-E, \overline{x}+E)$, donde $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Por tanto $\overline{x} - E = 31{,}5 \Rightarrow 32{,}5 - E = 31{,}5 \Rightarrow E = 1$.
Entonces:
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 1 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{3{,}2}{\sqrt{64}} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{8}{3{,}2} = 2{,}5$$
De este valor se deduce, observando la tabla de la distribución normal $N(0,\ 1)$, que
$$1-\alpha/2 = 0{,}9938 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0062 \Rightarrow \alpha = 0{,}0124 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}9876$$
Por tanto el nivel de confianza con el que se puede afirmar que la media de la población está entre 31,5 y 33,5, es del 98.76 %.

En este caso:
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 0{,}75 = 2{,}575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2{,}575 \cdot \frac{3}{0{,}75} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 10{,}3 \Leftrightarrow n = 106{,}09$$
En la expresión anterior se ha utilizado que para un nivel de confianza del 99 %, $z_{\alpha/2} = 2{,}575$ (ver ejercicio 3 de esta sección).
Por tanto el tamaño mínimo de la muestra, con un nivel de confianza del 99 %, para que el error admisible no supere el valor 0,75, habría de ser $n = 107$.

6. Supongamos que aplicamos un test de atención a 145 alumnos de Bachillerato, obtenidos por muestreo aleatorio simple. Los resultados fueron: media igual a 32 y desviación típica de 15. El baremo del mencionado test de atención nos dice que para la población de Bachillerato, la media es 35 y la desviación típica de 16,76. ¿Es compatible nuestra media con la media que ofrece el baremo a un nivel de confianza del 95 %? Razona la respuesta.
Solución:
Calcularemos el intervalo de confianza para la media muestral $\overline{x} = 32$, utilizando la desviación típica muestral $s = 15$. Se conoce además que, a una confianza del 95 %, es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ (ver ejercicio 3 de esta sección):
$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(32 - 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{145}},\ 32 + 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{145}}\right) = (29{,}56,\ 34{,}44)$$

Como $\mu = 35 \notin (29{,}56,\ 34{,}44)$, deducimos que nuestra media no es compatible con la media que ofrece el baremo a un nivel de confianza del 95 %.

7. Se sabe por trabajos realizados por expertos que la velocidad lectora media de los niños de 6 años es de 40 palabras por minuto, siendo la desviación típica de 12. Hemos tomado una muestra aleatoria de 49 niños de 6 años y les hemos medido su velocidad lectora, resultando una media de 42 palabras por minuto. ¿Podemos afirmar que nuestra media es compatible con la de los expertos a un nivel de confianza del 99 %? Razona tu respuesta.

   Solución:
   Utilizando que para un nivel de confianza del 99 % es $z_{\alpha/2} = 2{,}575$, el intervalo de confianza para la media muestral $\overline{x} = 42$ es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(42 - 2{,}575 \cdot \frac{12}{\sqrt{49}},\ 42 + 2{,}575 \cdot \frac{12}{\sqrt{49}}\right) = (37{,}59,\ 46{,}41)$$

   Como $\mu = 46 \in (37{,}59,\ 46{,}41)$, podemos afirmar que nuestra media muestral sí que es compatible con la de los expertos a un nivel de confianza del 99 %.

8. Supongamos que, a partir de una muestra aleatoria del tamaño $n = 25$, se ha calculado el intervalo de confianza para la media de una población normal, obteniéndose una amplitud igual a 4. Si el tamaño de la muestra hubiera sido $n = 100$, permaneciendo invariables todos los demás datos, ¿cuál habría sido la amplitud del intervalo?

   Solución:
   El intervalo de confianza para la media muestral de una población normal es $(\overline{x} - E,\ \overline{x} + E)$, donde E es el error máximo admisible, cuyo valor es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
   Por otro lado la amplitud del intervalo de confianza es la diferencia entre el extremo superior del intervalo y el extremo inferior: $A = (\overline{x} + E) - (\overline{x} - E) = 2E$. Como la amplitud es 4, para un tamaño de la muestra $n = 25$, tenemos que $2E = 4 \Rightarrow E = 2$, es decir, $2 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{5}$.
   Si el tamaño de la muestra hubiera sido $n = 100$, entonces $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{10} = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{2 \cdot 5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Por tanto en este caso la amplitud del intervalo es $A = 2E = 2$.