Capítulo 3

Análisis

3.1. Año 2000

3.1.1. Modelo

Opción A

Problema 3.1.1 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin x}{x} + 2\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x + 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x + 2}{1} = 3$$

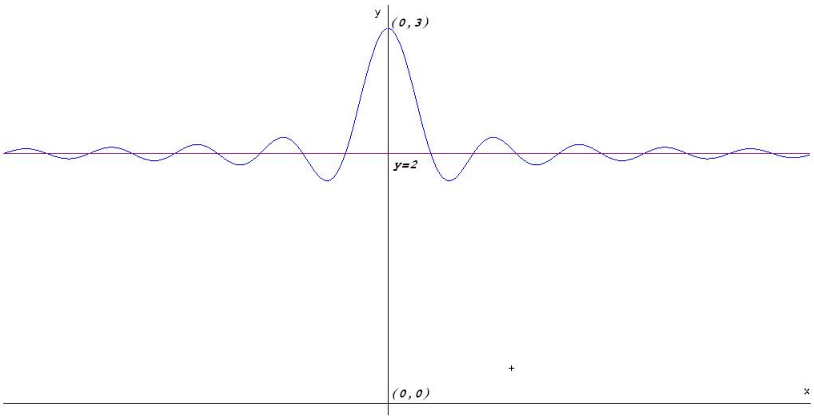
Para que f sea continua en $x = 0 \Longrightarrow k = 3$

b) Para que f sea derivable en $x = 0$ primero debe de ser continua, luego $k = 3$. Ahora se estudia si es derivable con este valor:

$$f'(0) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{\sin h}{h} + 2 - 3}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin h - h}{h^2} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{-\sin h}{2} = 0$$

En conclusión, para que una función sea derivable antes tiene que ser continua y por tanto $k = 3$. Y en este caso también se cumple $f'(0^-) = f'(0^+)$ y es derivable.



c) Asíntotas:

- Verticales no hay, la única posible sería en $x = 0$ y en ese punto hay una discontinuidad evitable si $k \neq 3$ y continua si $k = 3$.
- Horizontales
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sin x}{x}+2\right) = 2 \Longrightarrow y = 2$$
- Oblicuas no hay por haber horizontales

Opción B

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1,-4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Hallar la expresión de $f(x)$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln|x| + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como $f(-1) = -4 \Longrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$. Si f es derivable en $x = 1 \Longrightarrow$ f es continua en $x = 1 \Longrightarrow$ $b = 0$. Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

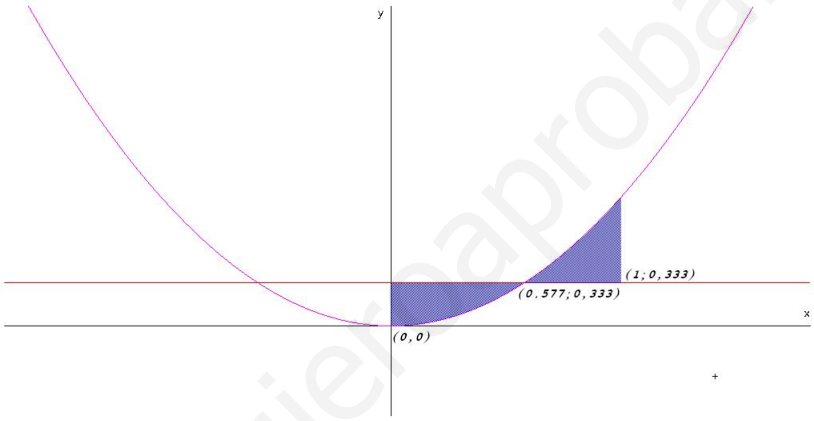
b) Si $x = 2 \Longrightarrow f(2) = \ln 2 \Longrightarrow (2, \ln 2)$.

Tenemos $m = f'(2) = \dfrac{1}{2}$ y, por tanto, la recta tangente es:

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

Problema 3.1.3 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$. Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abcisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Solución:



Calculamos la abscisa del punto de corte de ambas gráficas en función del parámetro a:

$$x^2 = a \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Elegimos la solución positiva porque así nos lo indica el enunciado del problema. Tenemos, por tanto, que cuando $x = \sqrt{a}$ ambas curvas se cortan $(x_0, y_0) = (\sqrt{a}, a)$ y la posición de las curvas cambia, de manera que, la que estaba por encima pasará a estar debajo. Es decir,

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\, dx \Longrightarrow$$

$$\left. ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} = \left. \frac{x^3}{3} - ax \right]_0^{\sqrt{a}} \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

3.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Solución:

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 4b + c = 0 \\ f'(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \\ d = -5/6 \end{array}\right.$$

La función será:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$$

b) Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2x - 3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(1) = -3 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 1 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{array}\right.$$

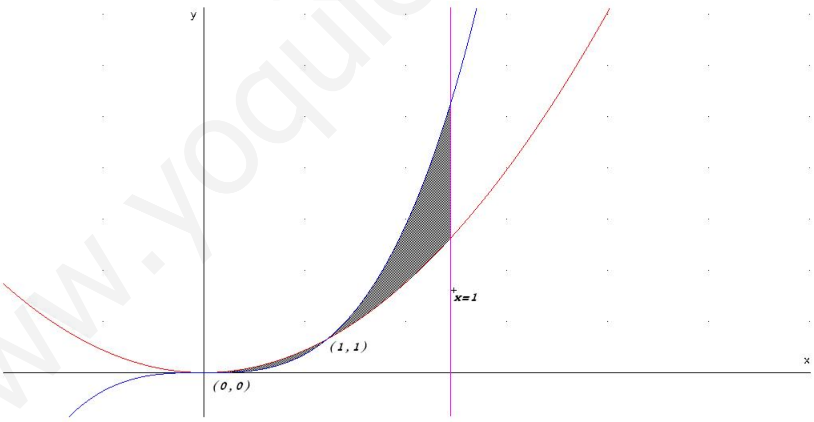
Opción B

Problema 3.1.5 *(2 puntos)* Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Solución:



Buscamos los puntos de corte de ambas funciones

$$x^2 = x^3 \Longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 1$$

Los intervalos de integración serán $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$
$$\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = F(1) - F(0) = \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{17}{12}$$
$$S = \left|\frac{1}{12}\right| + \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}\ u^2$$

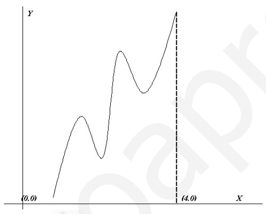
Problema 3.1.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Solución:

a) El dibujo sería el siguiente:



b) La función tiene al menos cuatro extremos, luego el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. Si fuese cuatro, la primera derivada tendría como mucho tres soluciones al igualar a cero.

3.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.1.7 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales y Horizontales no hay claramente.
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x + \sin 2x}{x} = 2$$
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (2x + \sin 2x - 2x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} (\sin 2x)\ \text{No existe}$$

Luego tampoco hay asíntotas oblicuas.

b) $f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ Para cualquier x que escojamos $f'(x) > 0$, excepto en los puntos que la anulan, luego la función es siempre creciente y no hay ni máximos ni mínimos. Veamos los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -4\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$f'''(x) = -8\cos 2x \Longrightarrow f'''(\pi/2) = 8 \neq 0$$

Luego los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ son puntos de inflexión.

Problema 3.1.8 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Solución:

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = -2(r_1 + r_2 + r_3 - 3x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

x es la media aritmética de los tres números.

$$D''(x) = 6 \Longrightarrow D''\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Opción B

Problema 3.1.9 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

a) (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

c) (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(3, 0)$.

Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

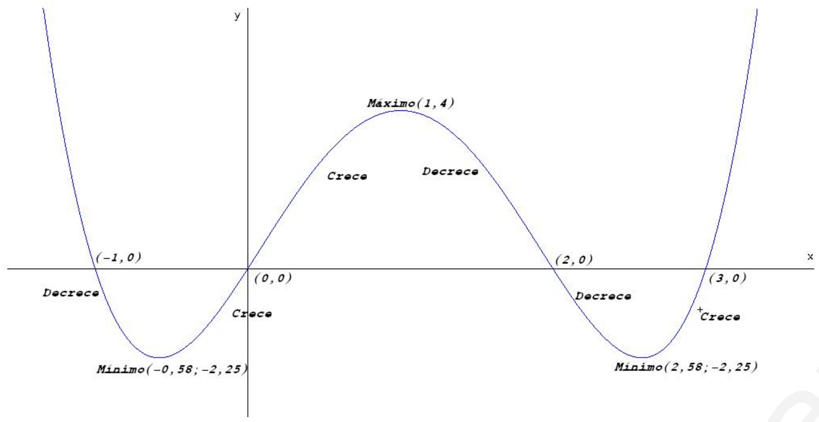
Estudiamos su monotonía:

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2},\ \ x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2},\ \ x = 1$$

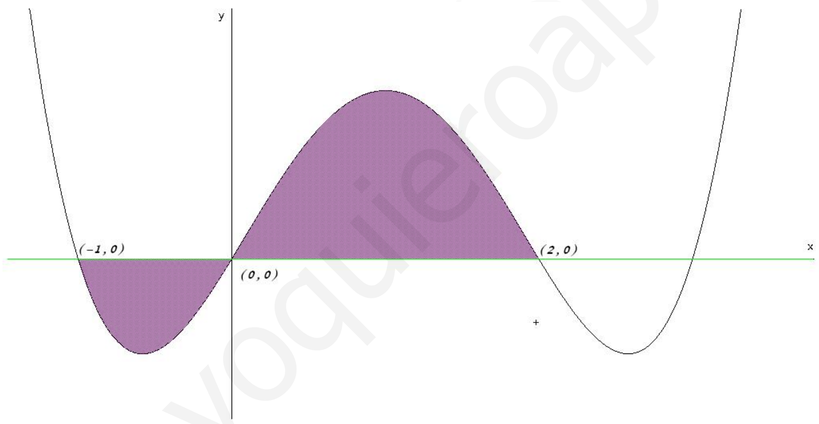
	$\left(\infty, 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 1\right)$	$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(-0,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo, en el punto $(1, 4)$ la función tiene un máximo y en el punto $(2,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo.

b) Representación gráfica:



c) Hay un punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $(-1, 2)$ ese punto es el $(0, 0)$. Luego tendremos que hacer dos integrales, una entre -1 y 0, y otra entre 0 y 2.



$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{22}{15}$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{2} = \frac{76}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} = \frac{98}{15}\ u^2$$

3.2. Año 2001

3.2.1. Modelo

Opción A

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.

b) (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

a) $Dom(f) = R - \{-2, 2\}$. Sus asíntotas:

- ☛ Verticales:

  En $x = 2$:

  $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

  $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

  En $x = -2$:

  $$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

  $$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales:

  En $y = 0$:

  $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3}$$

La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no hay puntos de inflexión, y además $2(3x^2 + 4) > 0$ siempre. Por otro lado, por el denominador:

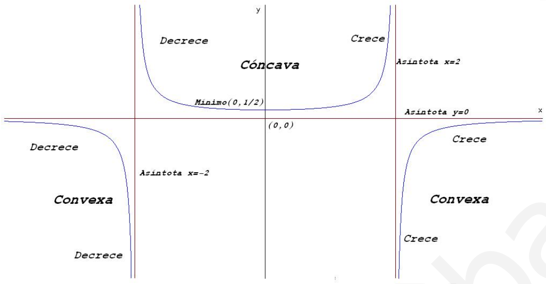
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

c)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Luego en el punto $(0, 1/4)$ la función presenta un mínimo.



Opción B

Problema 3.2.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

a)

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}} = -\int_{-10}^{-1} -(1-e^x)^{-1/2} e^x\,dx =$$

$$= -2\sqrt{1-e^x}\Big]_{-10}^{-1} = 0,4098344043$$

b) $t = 1 - e^x \Longrightarrow dt = -e^x dx = (t-1)dx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{t-1}$

$$\int \frac{1}{1-e^x} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = -\ln|t| + \ln|t-1| = \ln\frac{e^x}{1-e^x} + C$$

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Longrightarrow B = 1 \\ t = 0 \Longrightarrow A = -1 \end{cases}$$

3.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \sin x$

a) (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\dfrac{1}{2}$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$

c) (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Solución:

a)

$$\int_0^a \sin x\,dx = -\cos x]_0^a = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

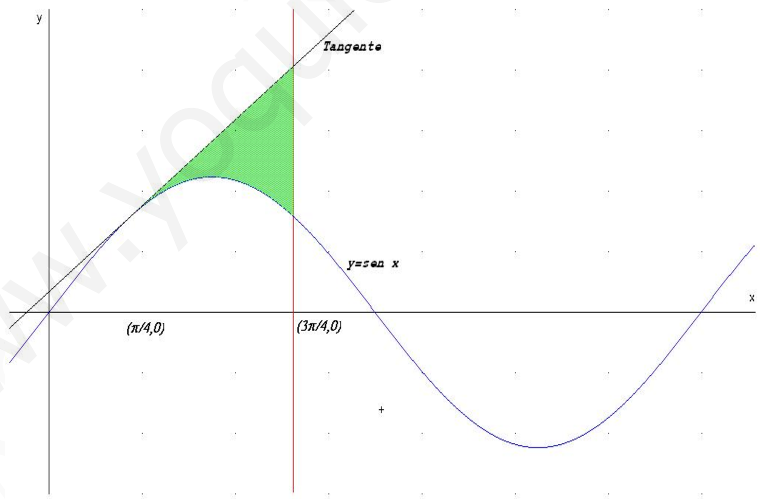
b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



c) Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int \left[\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4} + 1\right)\right] dx = -\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{4} + x\right)$$

$$S = \left| F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{16}(\pi^2 + 4\pi - 16)$$

Opción B

Problema 3.2.4 *(2 puntos)* Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, el único punto en el que puede haber discontinuidad es en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2-x)^3 = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} x^2 = 1$$

Como además $f(1) = 1$, podemos concluir que f es continua en R.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 1$.

c)

$$S_1 = \int_0^1 (8 - (2-x)^3)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 \Big]_0^1 = \frac{17}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (8 - x^2)\, dx = 8x - \frac{x^3}{3} \Big]_1^2 = \frac{17}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{17}{4} + \frac{17}{3} = \frac{119}{12}\, u^2$$

Problema 3.2.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

Solución:

a)

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

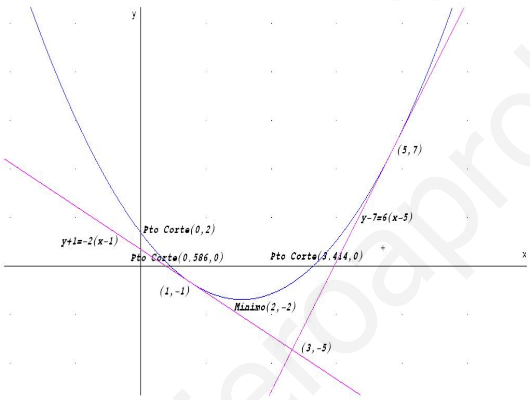
Luego tiene un mínimo en el punto $(2, -2)$

Se trata de una parábola vertical con vértice en el punto $(2, -2)$. Para dibujarla tan sólo será necesario encontrar los puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 2 \Longrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 2$

Los puntos serán: $(0, 2)$, $(2 - \sqrt{2}, 0)$ y $(2 + \sqrt{2}, 0)$.



b) La ecuación de una recta que pase por $(3, -5)$ es

$$y + 5 = m(x - 3), \text{ y } f'(x) = 2x - 4$$

Si el punto de tangencia con la gráfica es (a, b) tenemos

$$b + 5 = m(a - 3), \ \ m = f'(a) = 2a - 4 \ \text{ y } \ b = a^2 - 4a + 2$$

$$b + 5 = (2a - 4)(a - 3) \ \text{ y } \ b = a^2 - 4a + 2 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = 5$$

Los puntos de tangencia son: $(1, -1)$ y $(5, 7)$. Ahora calculamos las rectas tangentes en estos puntos

- ☛ En $(1, -1)$ la pendiente vale $m = -2$: $y + 1 = -2(x - 1)$
- ☛ En $(5, 7)$ la pendiente vale $m = 6$: $y - 7 = 6(x - 5)$

3.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.2.6 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.

c) (1 punto) Para los mismos valores de a y b, hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Solución:

a) Se tiene que cumplir que $f(2) = g(2)$ y que $f'(2) = g'(2)$:

$$f(2) = 3 = 4a + b$$

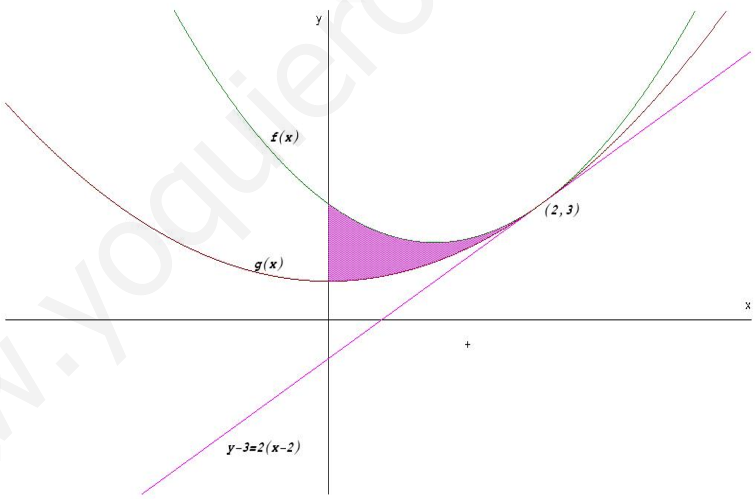
$$f'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow f'(2) = 2, \quad g'(x) = 2ax \Longrightarrow g'(2) = 4a$$

luego $4a = 2 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ y $b = 1$. Con lo que

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

b) En ambas funciones la pendiente en $x = 2$ vale $m = f'(2) = 2$ y el punto de tangencia común a ambas funciones es $(2, 3)$. La recta tangente es

$$y - 3 = 2(x - 2)$$



c) El área buscada sería:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{x^2}{2} - 1 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{4}{3}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.2.7 *(2 puntos)* Sean la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(t)dt$

b) (1 punto) Se definen $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Solución:

a) Hacemos el cambio de variable $1 + e^t = x \Longrightarrow e^t = x - 1$ y $dt = \dfrac{1}{x-1}dx$

$$\int \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C = t - \ln|1+e^t| + C$$

La descomposición polinómica sería:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Longrightarrow 1 = A(x-1) + Bx$$

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow & A = -1 \\ x = 1 \Longrightarrow & B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para la resolución del límite. Para derivar $g(x)$ aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo y nos queda:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x - \ln(1+e^x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}$$

Problema 3.2.8 *(2 puntos)* Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- ☛ $P(x)$ es una función par.
- ☛ Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- ☛ $P(0) = 5$.

Se pide:

a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.

b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

Solución:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

☛ $P(x)$ es una función par $P(-x) = P(x)$:

$$a(-x)^4 + b(-x)^3 + c(-x)^2 + d(-x) + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Longrightarrow bx^3 + dx = 0$$

Luego $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$

☛ Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$:

$$\begin{cases} x = 1 \Longrightarrow P(1) = 0 \Longrightarrow a + c + 5 = 0 \\ x = \sqrt{5} \Longrightarrow P(\sqrt{5}) = 0 \Longrightarrow 5a + c + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -6 \end{cases}$$

☛ $P(0) = 5 \Longrightarrow e = 5$

El polinomio es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

a) Tenemos: $P'(x) = 4x^3 - 12x$, $P''(x) = 12x^2 - 12$ y $P'''(x) = 24x$. Para obtener los puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a cero:

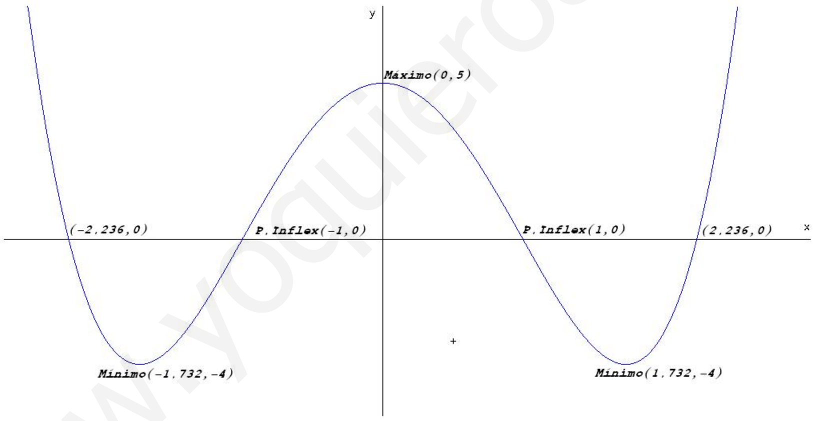
$$P''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Sustituimos en la tercera derivada:

$$\begin{cases} P'''(1) = 24 \neq 0 \\ P'''(-1) = -24 \neq 0 \end{cases}$$

Luego esta función tiene dos puntos de inflexión en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) La gráfica será la siguiente:



Calculamos sus máximos y mínimos:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}, \quad x = 0$$

Por la segunda derivada

$$\begin{cases} P''(0) = -12 < 0 \\ P''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \\ P''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \end{cases}$$

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 5)$ y dos Mínimos en los puntos $(-\sqrt{3}, -4)$ y $(\sqrt{3}, -4)$.

Ahora calculamos puntos de corte:

Con el eje OY : Hacemos $x = 0$ y tenemos $(0, 5)$.

Con el eje OX : Hacemos $P(x) = 0$ y tenemos $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

3.3. Año 2002

3.3.1. Modelo

Opción A

Problema 3.3.1 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4-x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente en $x = r$ es $m = -2r$, y la ecuación de esta recta será:

$$y-(4-r^2) = -2r(x-r) \Longrightarrow 2rx + y - (4+r^2) = 0$$

La base del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de abscisas, haciendo $y = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4+r^2}{2r}$

La altura del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de ordenadas, haciendo $x = 0 \Longrightarrow y = 4 + r^2$.

La función a minimizar será:

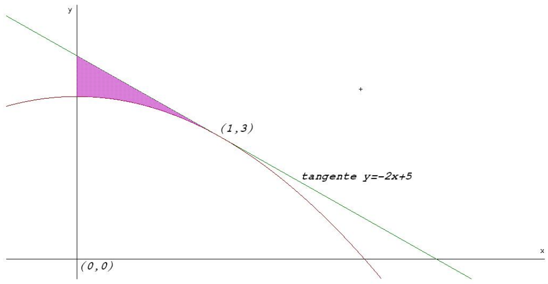
$$S(r) = \frac{\frac{4+r^2}{2r}(4+r^2)}{2} = \frac{(4+r^2)^2}{4r}$$

$$S'(r) = \frac{(4+r^2)(3r^2-4)}{4r^2} = 0 \Longrightarrow r = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

	$(-\infty, -2/\sqrt{3})$	$(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$	$(2/\sqrt{3}, \infty)$
$S'(r)$	$+$	$-$	$+$
$S(r)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego la función es mínima cuando $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) El recinto es el siguiente:



La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $2x + y - 5 = 0 \Longrightarrow y = -2x + 5$. El área es el comprendido entre esta recta y la parábola en el intervalo de integración $[0, 1]$:

$$S = \left| \int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2))dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - 1 + 1 \right| = \frac{1}{3}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p.

Solución:

a) Estudio:

- Dominio: $\text{Dom}(f) = R$
- Signo:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

- Simetría: No hay $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$
- Puntos de corte:
  - Si $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  - Si $f(x) = 0 \Longrightarrow x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales no hay
  - Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} xe^{3x} = \infty$$

$y = -x \Longrightarrow$ si $x \longrightarrow -\infty$ entonces $y \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{3x} = \lim_{y \longrightarrow \infty} ye^{-3y} = \lim_{y \longrightarrow \infty} \frac{-y}{e^{3y}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{y \longrightarrow \infty} \frac{-1}{3e^{3y}} = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Monotonía: $f'(x) = e^{3x}(3x+1) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

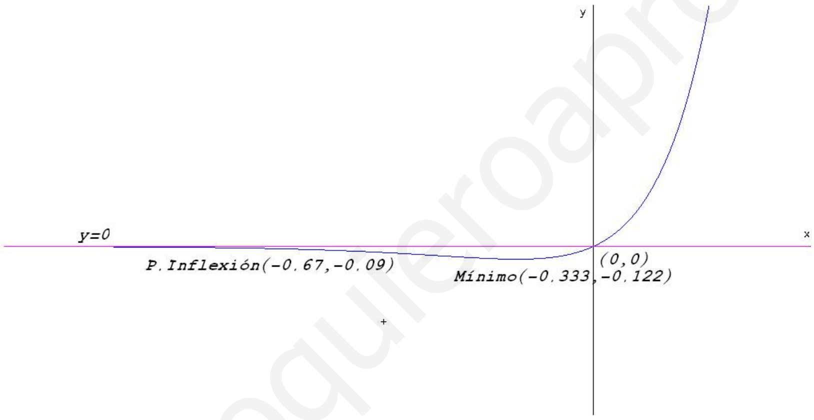
La función presenta un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3e}\right)$

☛ Curvatura: $f''(x) = 3e^{3x}(3x+2) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

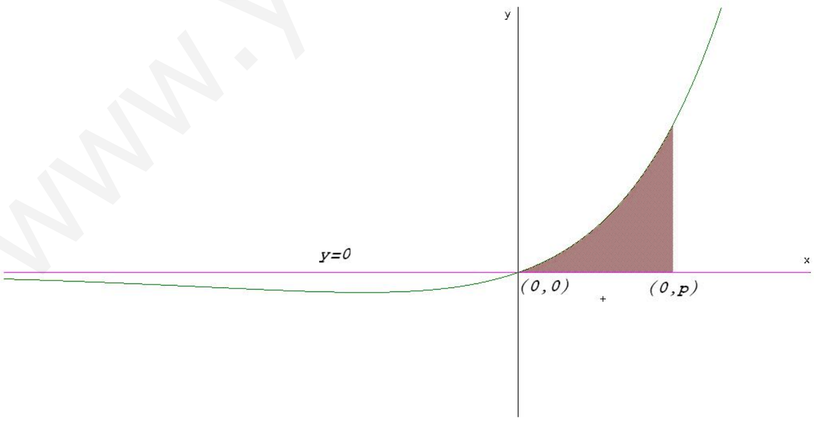
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

La función presenta un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3e^2}\right)$

☛ Representación gráfica:



b) Veamos la figura:



La integral se calcula por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{3x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x}$:

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\int_0^p xe^{3x}\,dx = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)\bigg]_0^p = e^{3p}\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$e^{3p}\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{3}$$

3.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

a) Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sustituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pendiente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

b) El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx$$

Calculamos la integral

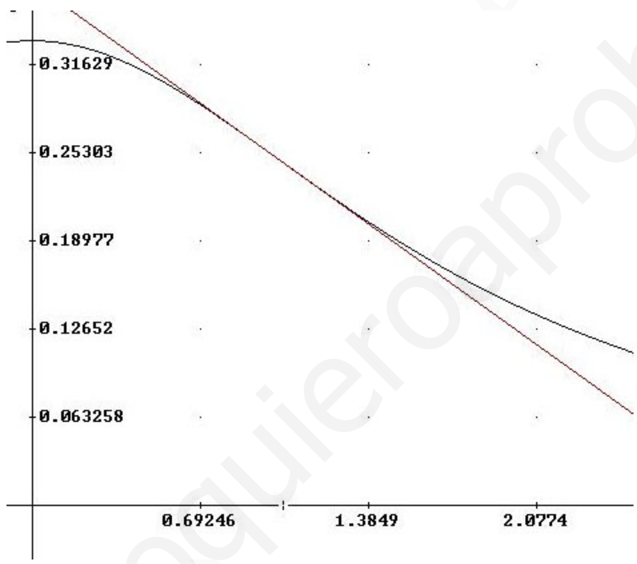
$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$



Opción B

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

a) Calculamos el dominio:

- Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único posible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
- En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:
La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supuesto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- En $x = -1$:
$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$
Luego f es continua en $x = -1$.
- En $x = 0$:
$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
Luego no es continua en $x = 0$.
- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

b) Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:
$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.
- Cuando $x < -1$:
No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.
- Cuando $x < -1$:
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$
Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - ax)$$

- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\longrightarrow\infty} (\frac{x^2+3x+1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

  Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$: No hay asíntotas oblicuas en este intervalo por haber horizontales.

c) El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abscisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x} dx = \int_1^2 (x + 3 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

3.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.3.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\, dx = 1$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $(-1, -1/2)$ tenemos un Mínimo y en el punto $(1, 1/2)$ tenemos un Máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^a = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1) = 1 \Longrightarrow a = \sqrt{e^2-1}$$

Problema 3.3.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3,1)$.

Solución:

a) Estudiamos en el punto $x = 2$:

Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} \sqrt[3]{x-2} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} x(x-2) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Como

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = f(2) \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = 2, \quad f'(2^+) = \infty$$

Como

$$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = 2$$

b) Es en la rama $x \geq 2$:

$$f(3) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-2)^2}} \Longrightarrow m = f'(3) = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x-3) \Longrightarrow x - 3y = 0$$

Opción B

Problema 3.3.7 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Solución:

a)
$$g'(x) = f'(x + f(0))(x + f(0))' = f'(x+1)(1 + f'(0)) = f'(x+1)4$$
$$g'(0) = f'(0+1)4 = 4 \cdot 4 = 16$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{4(f(x))f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = 8$

3.4. Año 2003

3.4.1. Modelo

Opción A

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \Longrightarrow D = 4$$
$$f'(x) = A\cos x + 2Bx + C \text{ como } f'(0) = 0 \Longrightarrow A + C = 0$$
$$f''(x) = -A\sin x + 2B \Longrightarrow A = -3, \;\; B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3\sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6}$$
$$5x-2=A(x-2)+B(x-3)$$

Si $x=2 \Longrightarrow 8=-B \Longrightarrow B=-8$

Si $x=3 \Longrightarrow 13=A \Longrightarrow B=13$. Luego:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6}=1+\frac{13}{x-3}-\frac{8}{x-2}$$
$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx=\int dx+13\int \frac{1}{x-3}\,dx-8\int \frac{1}{x-2}\,dx=$$
$$x+13\ln|x-3|-8\ln|x-2|=x+\ln\frac{|x-3|^{13}}{|x-2|^8}$$

Opción B

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.

d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x=-1$, $x=1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$$

Solución:

a) Monotonía:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}\right)=0 \Longrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty,-1/2)$ y decreciente en $(-1/2,\infty)$. Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2},\sqrt[3]{4}\right)$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- ☛ Verticales: No hay

- ☛ Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})=[\infty-\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2}}=0$$

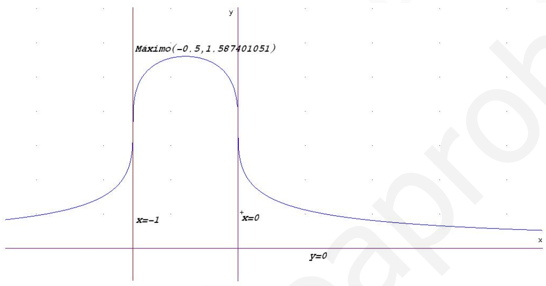
  Luego $y=0$ es una asíntota horizontal.

- ☛ Oblicuas: No hay

b)

$$f'(a)=\infty\Longrightarrow\sqrt[3]{a^2(a+1)^2}=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=-1$$

c) Representación gráfica



d)

$$\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})\,dx=\left.\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\ u^2$$

3.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.4.4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln"significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

a) (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

b) (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 3.4.5 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

a) Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1-x^6=0\Longrightarrow x=1,\ x=-1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{5x^4-8x^7}{-6x^5}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4(5-8x^3)}{-6x^5}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{5-8x^3}{-6x}=\frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x=1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=+\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x=-1$ no es evitable.

b) Por lo visto en el apartado anterior $x=-1$ es una asíntota vertical.

Opción B

Problema 3.4.6 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

a) El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

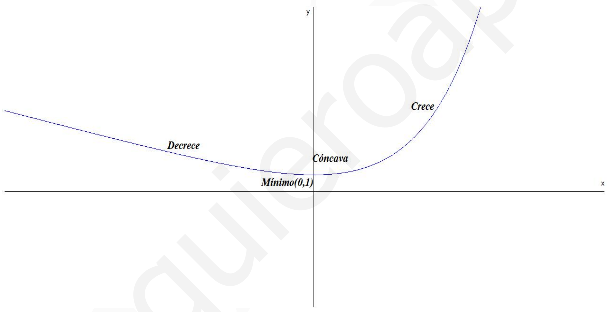
$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.

Su gráfica sería:



b)

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abscisas) es una asíntota horizontal.

c)

$$f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^3} = 0 \Longrightarrow 1-e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x}+e^x(x-4)+2}{(e^x-x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0,1)$ es un máximo.

3.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.4.7 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

Luego $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = -\frac{5\pi}{3}$ son los únicos posibles extremos en el intervalo de definición.
Vamos a recurrir a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f''\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos máximo en los puntos $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{5\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

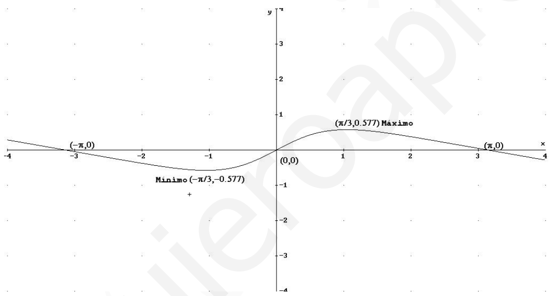
$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos mínimos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Para dibujar la gráfica voy a calcular los puntos de corte: Si $x = 0$ tenemos que $f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$. Si $f(x) = 0$ tenemos que $\frac{\sin x}{2-\cos x} = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow x = \pi,\ x = -\pi$. Luego tenemos los puntos $(\pi, 0)$ y $(-\pi, 0)$. Si tenemos en cuenta que la función es impar:



c) Para resolver la integral hacemos un cambio de variable

$$t = 2 - \cos x \Longrightarrow \sin x\, dx = dt$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{\sin x}{2-\cos x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|2-\cos x| + C$$

Luego la integral pedida valdrá:

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{2-\cos x}\, dx = \ln|2-\cos x|]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$

Opción B

Problema 3.4.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Dibujar su gráfica.

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x \geq 0 \\ -2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -2x(4-x) & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 4} (-2x(4-x)) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 4} (2x(4-x)) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

Luego la función es continua en $x = 4$, y por tanto, en todo R.

$$f'(x) = \begin{cases} 8-4x & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -8+4x & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(4^-) = -8 \\ f'(4^+) = 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f'(4^-) \neq f'(4^+)$$

Luego la función no es derivable en $x = 4$, pero si es derivable en $R - \{4\}$.

b) Para dibujar el recinto estudiamos la gráfica de cada rama por separado:

$f(x) = 8x - 2x^2$ si $x \in (-\infty, 4]$

$f'(x) = 8 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$

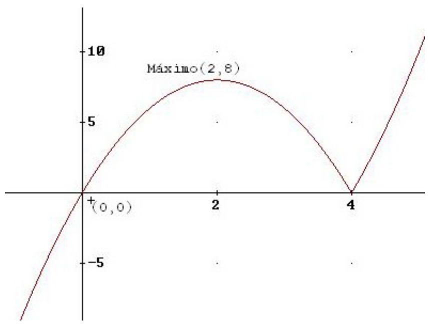
$f''(2) = -4 \Longrightarrow (2, 8)$ es un máximo.

Si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$, como puntos de corte.

$f(x) = -8x + 2x^2$ si $x \in (4, +\infty)$

$f'(x) = -8 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$, que no está en el intervalo $(4, +\infty)$.

En este intervalo la función es siempre creciente, es decir, $f'(x) > 0$ cuando $x \in (4, +\infty)$. Con estos datos estamos en condiciones de dibujar la gráfica:



c) A la vista de la gráfica podemos entender fácilmente de que recinto se trata.

$$\text{Área} = \int_0^4 2x(4-x)dx + \int_4^5 (-2x(4-x))dx =$$

$$= \int_0^4 (8x-2x^2)dx + \int_4^5 (-8x+2x^2)dx = 26\,u^2$$

3.5. Año 2004

3.5.1. Modelo

Opción A

Problema 3.5.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2n\left(\frac{3n-1}{3n}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = e^{-2/3}$$

b)

$$F'(x) = \sqrt{5+e^{x^4}},\quad g'(x) = 2x$$

Por la regla de la cadena:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = 2x\sqrt{5+e^{x^8}}$$

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x^2-x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Solución:

a)
$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{1\} \ \text{ en } x = 0\ f(0) = a$$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = -\infty$$

b) En $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable por el apartado anterior.

En $x = 0$:
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$$

Para que f sea continua en ese punto $a = -1$.

Opción B

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.

b) (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

Solución:

a) $1 + \sin^2 x \neq 0$ siempre $\Longrightarrow$ no hay puntos críticos.

La función es par.

b)
$$f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{(1 + (\sin^2 x))^2} = 0 \Longrightarrow -2\sin x \cos x = 0$$

$$-2\sin x\cos x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = -\pi,\ \ x = \pi \\ \cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \quad x = -\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

En los puntos de abscisa $x = 0$, $x = -\pi$ y $x = \pi$ la función presenta un Máximo.

En el puntos de abscisa $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función presenta un Mínimo.

c)

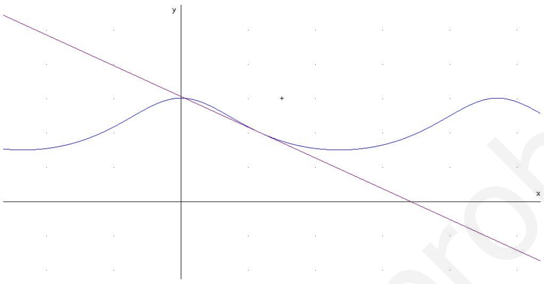
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$$

$$m=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{9}$$

La ecuación de la recta tangente

$$y-\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

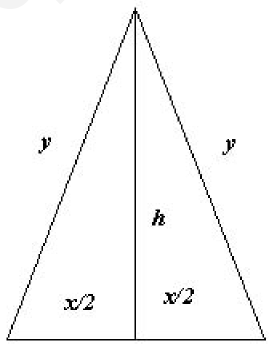
d) Representación gráfica



3.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.5.4 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.
Solución:



$$S=\frac{x\cdot h}{2};\quad x+2y=8;\quad h=\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4-x}$$
$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$
$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3.5.5 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

a) *a*) **Asíntotas:**

- **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Extremos:

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x+1/2$	$-$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

b)

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + C$$
$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$$

Opción B

Problema 3.5.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

a) Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Longrightarrow 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

b) **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1 + a^2 \Longrightarrow A(0, 1 + a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1 - a^2}{2a} = \dfrac{a^2 + 1}{2a}$. Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

c)

$$d(A, P) = \sqrt{(a - 0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1 - a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - a^2)^2}{4a^2} + (1 - a^2)^2} = (1 - a^2)\sqrt{\frac{1 + 4a^2}{4a^2}} = \frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(A, P) = 2d(B, P) \Longrightarrow a\sqrt{1 + 4a^2} = 2\frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2} \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1 - a^2}{a} \Longrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0, 1)$ la solución pedida es la positiva $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.5.7 *(3 puntos)* Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7)$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

a)

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7) = 0 \Longrightarrow x = 4, \ \ x = 1, \ \ x = 7$$

Como $(x-4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1, 7)$.

b) Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\dfrac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.

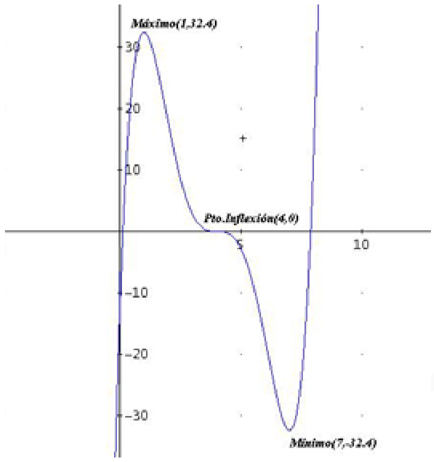
c) Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4, \ \ x = 1,8787, \ \ x = 6,1213$$

Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6(2x^2-16x+29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

Luego se trata de un punto de inflexión.



Opción B

Problema 3.5.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

a) **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

En $x=-1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

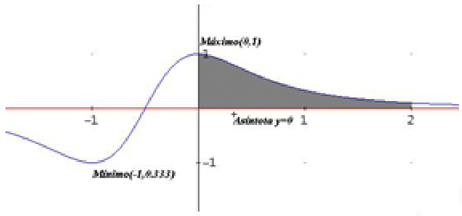
Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- ☛ **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Representación Gráfica:



c)

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+x+1}\Big]_0^2 = \frac{6}{7}$$

3.6. Año 2005

3.6.1. Modelo

Opción A

Problema 3.6.1 *(2 puntos)*

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

a) La función $f(x) = x^{15}+x+1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x, luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX, y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $(-1, 1)$.

Problema 3.6.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Longrightarrow x = \pm 2$$

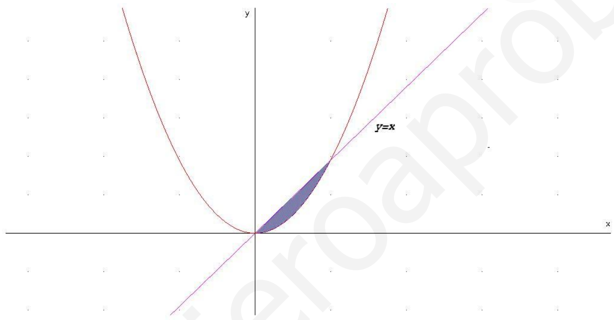
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

b) La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2, 2)$ es $y = x$. Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left.\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\acute{A}rea = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\, u^2$$



Opción B

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

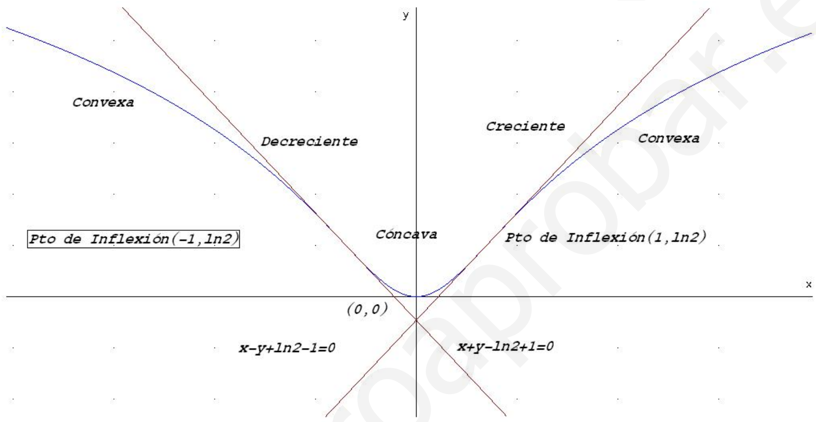
Luego en el punto $(0,0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

b) Representación gráfica



c) La tangente en el punto $(-1,\ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \Longrightarrow y - \ln 2 = -x + 1 \Longrightarrow x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1,\ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = x - 1 \Longrightarrow x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

3.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.6.4 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1-2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1-2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 3.6.5 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- se verifica que

$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$
- $$p''(x) = 6ax + 2b \Longrightarrow p''(0) = 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$
$$p(0) = d = 1$$
- $$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left.\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$
$$\Longrightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a + 2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a + c = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{5}, \quad c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$$

Opción B

Problema 3.6.6 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

3.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.6.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a,f(a))$ para $a>0$

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a>0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Solución:

a)

$$f(a)=\frac{1}{a},\ \ m=f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$

La recta tangente es

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

b) Haciendo $y=0\Longrightarrow A(2a,0)$ y haciendo $x=0\Longrightarrow B\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

c)

$$d(a)=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}$$

$$d'(a)=\frac{2a^4-2}{a^2\sqrt{a^4+1}}=0\Longrightarrow\ a=1,\ \ a=-1$$

Como $a>0\Longrightarrow a=1$ En el intervalo $(-1,1)$ la d' es negativa y en el $(1,+\infty)$ es positiva, luego pasa de decrecer a crecer en $a=1$ y, por tanto, es un mínimo.

Opción B

Problema 3.6.8 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x>1$, hallar un punto $(a,f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Solución:

$$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x(x-1)}=0\Longrightarrow x=2$$

$$f(2)=\ln\frac{4}{1}=\ln 4=2\ln 2\Longrightarrow(4,2\ln 2)$$

Problema 3.6.9 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{4}$$

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}=0\Longrightarrow x=0$$

En el intervalo $(-\infty,0)\Longrightarrow f'(x)>0\Longrightarrow$ la función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(0,+\infty)\Longrightarrow f'(x)<0\Longrightarrow$ la función es decreciente en este intervalo.

Luego en el punto $(0,f(0))=(0,1/4)$ la función presenta un máximo.

b)

$$\int_0^a\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\frac{1}{4}$$

$$\int\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{1+e^x}+C$$

$$\int_0^a\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=-\frac{1}{1+e^x}\Big]_0^a=-\frac{1}{1+e^a}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{4}\Longrightarrow 1+e^a=4\Longrightarrow e^a=3\Longrightarrow a=\ln 3$$

3.7. Año 2006

3.7.1. Modelo

Opción A

Problema 3.7.1 *(3 puntos)* Dada la función:

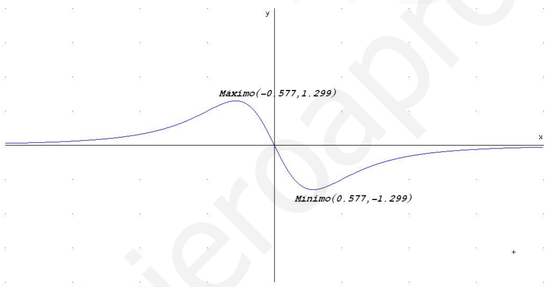
$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x)\,dx = -1$$

Solución:



a)

$$f'(x) = \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Máximo y en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Mínimo.

b)

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx = -2\int_0^a 2x(1+x^2)^{-2}\,dx = -2\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\Big]_0^a =$$

$$\frac{2}{1+x^2}\Big]_0^a = \frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \Longrightarrow a = \pm 1, \text{ como } a > 0 \Longrightarrow a = 1$$

Opción B

Problema 3.7.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$$

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Solución:

a)

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{2}{x} = \sqrt{x^2 - 3} \Longrightarrow x = \pm 2$$

La solución negativa no vale, luego $x = 2$ es el único punto común.

b) Tangente a $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(2) = 1 \Longrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Tangente a $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \Longrightarrow m' = g'(2) = -2, \text{ y } g(2) = 1 \Longrightarrow y - 1 = 2(x - 2)$$

Como $m = -\dfrac{1}{m'} \Longrightarrow$ las dos rectas son perpendiculares.

Problema 3.7.3 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Solución:

a)

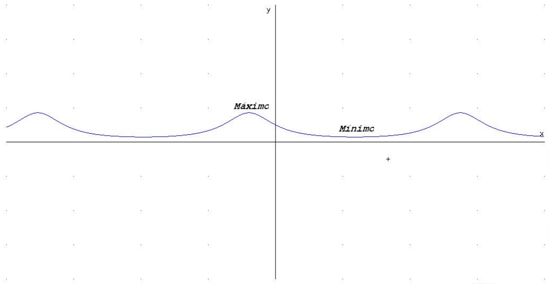
$$f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{(2 + \sin x - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\Longrightarrow \tan x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \;\; x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo y no se anula nunca.

	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4}, 0)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Mínimo y en el punto $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Máximo.



b) Como $f''(x)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f'(\pi) = f'(-\pi) = 1/9$ por el teorema de Rolle existe un punto $c \in [-\pi, \pi]$ en el que $f''(c) = 0$.

   Como el punto c anula la segunda derivada y en él la función es continua tiene que tratarse de un punto de inflexión.

3.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.7.4 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Solución:

a) ☛ $Domf = R - \{-1\}$.

   ☛ Asíntotas:

   a) Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

   b) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

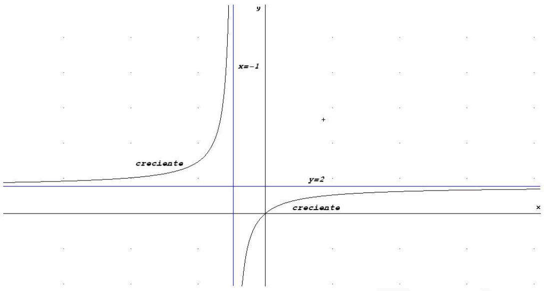
   c) Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow \text{siempre creciente}$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

☛ Representación gráfica:



b) Si tenemos en cuenta que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales excluido el cero, y si tenemos en cuenta que la función $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ hemos demostrado en el apartado anterior que es creciente en $R - \{-1\}$, con mayor razón lo es en el conjunto $N - \{0\}$.

Otra manera de demostrarlo:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

luego la sucesión es creciente.

c)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n+2} = 2$$

Opción B

Problema 3.7.5 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

a) *a)* ☛ $Dom f = R - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.

☛ Asíntotas:

1) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

2) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

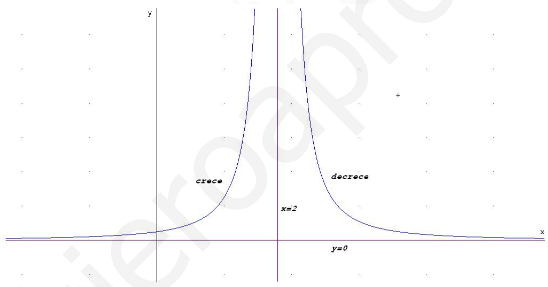
3) Oblicuas: No hay por haber horizontales.

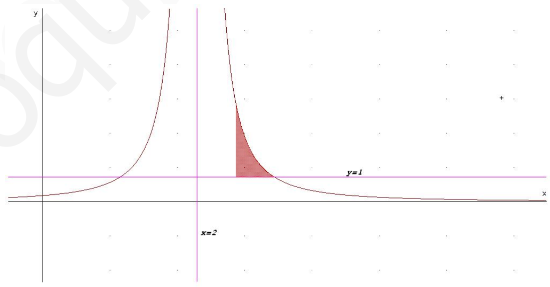
☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece





b)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

c)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = -\frac{1}{x-2} - x \Big]_{5/2}^{3} = \frac{1}{2}$$

3.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.7.6 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x}$$

$$\begin{array}{ll} & 1 = A(x+2) + Bx \\ \text{si } x = 0 & 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2 \\ \text{si } x = -2 & 1 = -2B \Longrightarrow B = -1/2 \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2} = \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Problema 3.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

sea continua en todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) Continua en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (3x+2) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (x^2 + 2a\cos x) = 2a \end{array} \right\} \Longrightarrow a = 1$$

Continua en $x = \pi$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \pi} (x^2 + 2a\cos x) = \pi^2 - 2a = \pi^2 - 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \pi} (ax^2 + b) = a\pi^2 + b = \pi^2 + b \end{array} \right\} \Longrightarrow b = -2$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 + 2\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

b)

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 3 & \text{si} & x<0\\ 2x-2\sin x & \text{si} & 0\le x<\pi\\ 2x & \text{si} & x\ge\pi \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=3\\ \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\}\Longrightarrow \text{No es derivable en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=2\pi\\ \\ f'(\pi^+)=2\pi \end{array}\right\}\Longrightarrow \text{Es derivable en } x=\pi$$

Opción B

Problema 3.7.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1\le x\le 1$.

Solución:

a) $Dom(f)=R$

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} xe^{2x}=\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} xe^{2x}=\lim_{t\longrightarrow\infty}(-te^{-2t})=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{-1}{-2e^{2t}}=0$$

Luego cuando la $x\longrightarrow-\infty$ hay una asíntota $y=0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Monotonía:

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(1+2x)=0\Longrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece

La función es creciente en el intervalo: $(-1/2,\infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty,-1/2)$

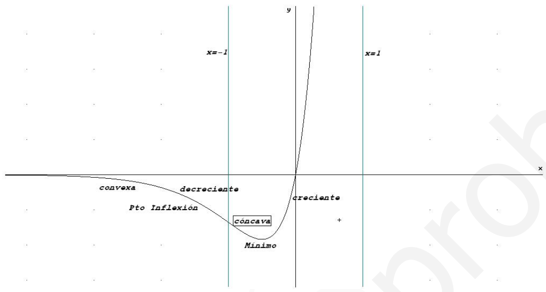
Como en el punto $(-1/2,-1/(2e))$ la función pasa de decrecer a crecer estamos ante un mínimo.

Curvatura:

$$f''(x) = 4e^{2x}(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Como en el punto $(-1, -1/(e^2))$ la función pasa de convexa a cóncava estamos ante un punto de inflexión.



b)

$$Área = \left| \int_{-1}^{0} xe^{2x}\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} xe^{2x}\, dx \right|$$

La integral $\displaystyle\int xe^{2x}\, dx$ se resuelve por partes, llamamos:

$u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = e^{2x}\left(\frac{2x-1}{4}\right) = F(x)$$

$$Área = |F(0) - F(-1)| + |F(1) - F(0)| = \left|\frac{3e^{-2}-1}{4}\right| + \left|\frac{e^2+1}{4}\right| = 2{,}245762562$$

3.8. Año 2007

3.8.1. Modelo

Opción A

Problema 3.8.1 *(3 puntos)*

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función continua si

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

b)

$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$

$$F(1) = \int_0^1 (f(t) + t^2 + t^3)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^3\,dt = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\Big]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

$$y - \frac{19}{4} = 3(x-1)$$

Opción B

Problema 3.8.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$

$$f'(x) = 12x - 3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \Longrightarrow a = 5,\quad a = -1$$

Como $a > 0 \Longrightarrow$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \Longrightarrow (5, 25)$ es el punto buscado.

b) Los puntos de corte con el eje OX son

$$6x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0,\quad x = 6$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = 2x^3 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^6 = 108\,u^2$$

Problema 3.8.3 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} (kx+5)\left(\frac{x+3}{x} - 1\right) = 3k$$

Luego $3k = 2 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

3.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.8.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = x^2+m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) $(a, f(a)) = (a, a^2+m)$, $f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(a) = 2a$. Luego la recta tangente sería: $y-a^2-m = 2a(x-a)$. Si imponemos que pase por el punto $(0,0) \Longrightarrow -a^2 - m = -2a^2 \Longrightarrow a = \sqrt{m}$ (la solución negativa no vale).

b) La recta $y = x$ tiene de pendiente $1 \Longrightarrow f'(a) = 2a = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$, luego el punto de tangencia es el $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, es decir, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + m = \frac{1}{2} \Longrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Opción B

Problema 3.8.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Solución:

$$\frac{x^2-12}{x^2+4} = 0 \Longrightarrow x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2-12}{x^2+4}\, dx \right|$$

$$F(x) = \int \frac{x^2-12}{x^2+4}\, dx = \int \left(1 - 16\frac{1}{x^2+4}\right) dx = x - 16 \int \frac{1}{x^2+4}\, dx =$$

$$x - 16 \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \right) dx = x - 4 \int \frac{2}{t^2+1}\, dt = x - 8 \arctan t = x - 8 \arctan \frac{x}{2}$$

$$S = |F(2\sqrt{3}) - F(-2\sqrt{3})| = \left| \frac{4(3\sqrt{3} - 4\pi)}{3} \right| = |-9,8269| = 9,8269\ u^2$$

Problema 3.8.6 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

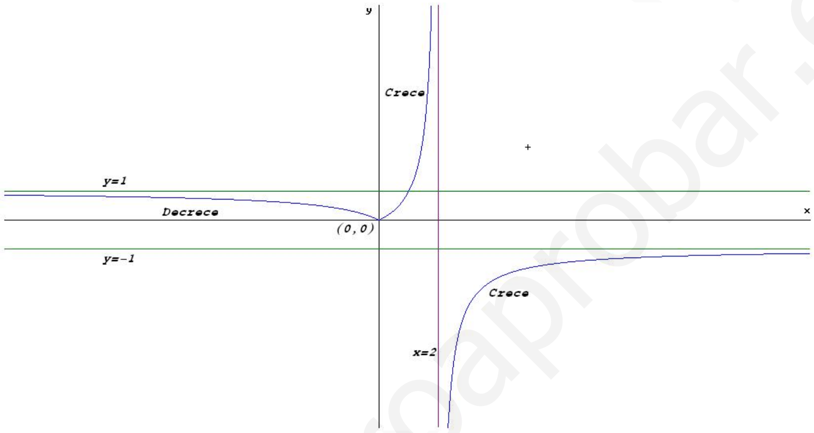
$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$



Monotonía: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$. Asíntotas:

- Verticales:
  Si $x < 0$ no hay
  Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:
  Si $x < 0 \Longrightarrow y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

  Si $x \geq 0 \Longrightarrow y = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

3.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.8.7 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$

Luego la función tiene un mínimo en el punto $(-1, 5/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

Como la función en estos tres puntos cambia de curvatura y hay continuidad, los tres son puntos de inflexión:

$$(0, 3), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right), \quad \left(-\sqrt{3}, \frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$$

b)

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}\, dx = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$$

$$F(0) = 4 \Longrightarrow C = 4 \Longrightarrow F(x) = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 4$$

Opción B

Problema 3.8.8 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- ☛ $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- ☛ $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- ☛ $g(-1) = 0, \ \ g(0) = 2, \ \ g(2) = 1$.

☛ $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto) Si $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

Solución:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

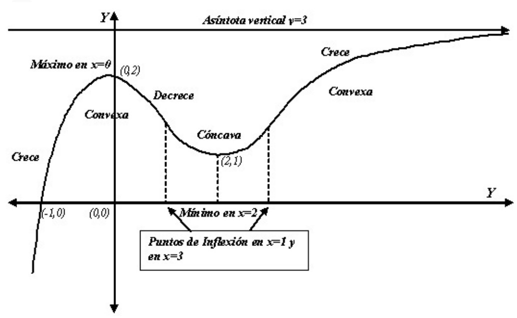
	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene dos puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = 3$.

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: No hay, ya que la función es continua y derivable en todo R.
- ☛ Horizontales: en $y = 3$, ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = 3$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

b) Su representación sería:



c) $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, como $g(x)$ es continua y derivable podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y tenemos que $G'(x) = g(x) \Longrightarrow G'(x_0) = g(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 = -1$

3.9. Año 2008

3.9.1. Modelo

Opción A

Problema 3.9.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a) (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

b) (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

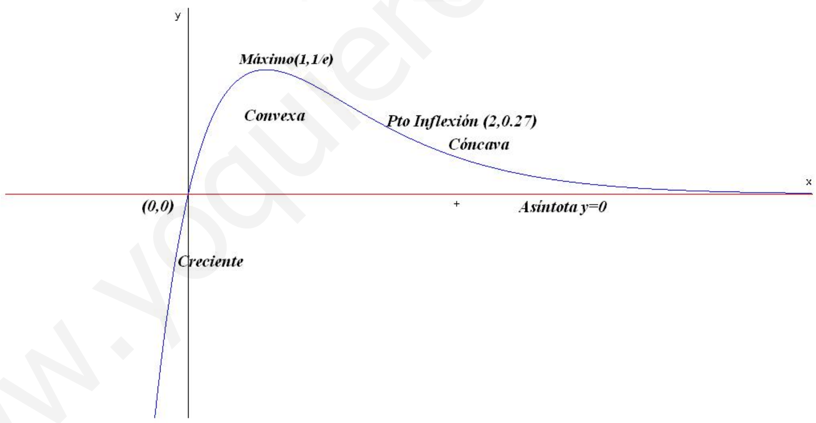
- Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

b) Representación gráfica



$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 3.9.2 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución:

a)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-5}$$

$$\lambda = \lim_{n\longrightarrow\infty}(1-5n)\cdot\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right) = -5$$

b)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n})(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2+1/n^2-3/n^3}{(1+5/n)(\sqrt{1+2/n-3/n^4}+\sqrt{1-1/n^3})} = 1$$

Opción B

Problema 3.9.3 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2+b & \text{si} & |x|<2 \\ 1/x^2 & \text{si} & |x|\ge 2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

b) (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x=1$, $x=3$.

Solución:

a)

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2+b & \text{si} & |x|<2 \\ 1/x^2 & \text{si} & |x|\ge 2 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1/x^2 & \text{si} & x\le -2 \\ ax^2+b & \text{si} & -2<x<2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x\ge 2 \end{array}\right.$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (ax^2 + b) = 4a + b$$

$$4a + b = \frac{1}{4} \Longrightarrow 16a + 4b = 1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

La derivada será:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -2/x^3 & \text{si} & x \leq -2 \\ 2ax & \text{si} & -2 < x < 2 \\ -2/x^3 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = -2$:

$$f'(-2^-) = \frac{1}{4}, \quad f'(-2^+) = -4a$$

$$-4a = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Si $a = -\dfrac{1}{16} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1/x^2 & \text{si} & x \leq -2 \\ -1/16x^2 + 1/2 & \text{si} & -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

b) El signo de la función f en el intervalo $[1, 2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2, 3]$

$$-1/16x^2 + 1/2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Los íntervalos de integración serán $(1, 2)$ y $(2, 3)$

$$S_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left. \frac{-x^3}{48} + \frac{x}{2} \right]_1^2 = \frac{17}{48}$$

$$S_2 = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \left. -\frac{1}{x} \right]_2^3 = \frac{1}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{17}{48} + \frac{1}{6} = \frac{25}{48} \ u^2$$

3.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.9.4 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(e^x - x^2) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^x = \infty$$

ya que:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right)}{6^x\left(\left(\frac{3}{6}\right)^x+1\right)} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1} = 0$$

Problema 3.9.5 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = e^{-2}$$

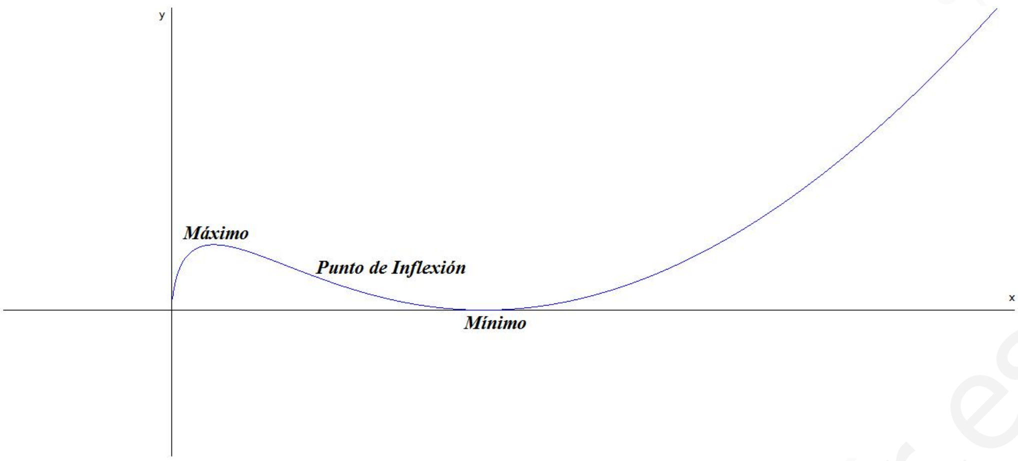
	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, ∞)
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función presenta un punto de Inflexión en el (e^{-1}, e^{-1})



Opción B

Problema 3.9.6 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Solución:

a)

$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow c^2x^4 + x^2 + c = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 10$, ya que el discriminante $1 - 4c^2 < 0$, esto quiere decir que, la función no corta el eje OX en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$S = \left| \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) \, dx \right| = \left| \frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right]_0^1 \right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

b)

$$S'(c) = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} = 0 \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

	$(0, -\sqrt{5}/3)$	$(-\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$	$(\sqrt{5}/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en $c = -\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c = \sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

3.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.9.7 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

a) ☛ Asíntotas:

a) Verticales: No Hay

b) Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, pero no lo es cuando $x \longrightarrow -\infty$.

c) Oblicuas: No hay por haber horizontales

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

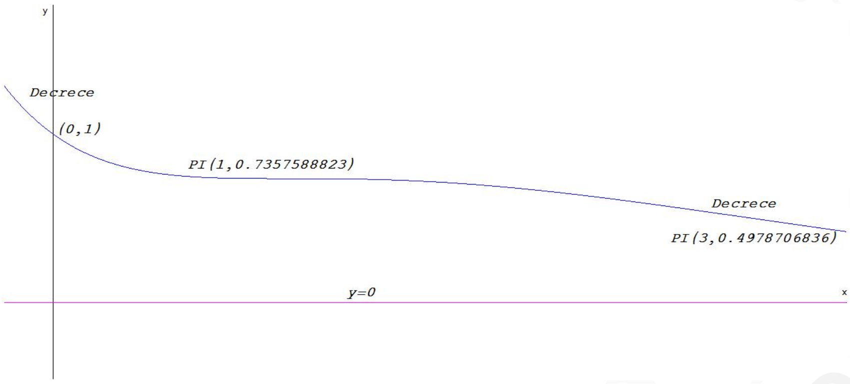
Además, $f'(x) \leq 0$ siempre y, por tanto, la función es siempre decreciente. Esto quiere decir que, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

☛ Curvatura:

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

☛ Representación:



b) Se trata de una integral por partes donde $u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{e^{-x}}\,dx = -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}dx =$$

(Volviendo a resolver por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$)

$$= -e^{-x}(x^2+1) + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\right] = -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+3) = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}\Big]_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$$

Opción B

Problema 3.9.8 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\,dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Indicación : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Solución:

a) Se trata de una integral por partes, donde hacemos: $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = x^3dx \Longrightarrow$ $v = \dfrac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{4x^4 \ln x - x^4}{16} + C$$

b) $x = e^t - e^{-t} \Longrightarrow dx = (e^t + e^{-t})dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{4 + (e^t - e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}\, dt =$$

$$\int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int dt = t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right) + C$$

3.10. Año 2009

3.10.1. Modelo

Opción A

Problema 3.10.1 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) (1 punto) Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} \frac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) = \frac{7}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \Longrightarrow$$

f es continua en $x = \dfrac{3}{2}$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{-7(x-2)}{6} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 3/2$

b) Estudiamos su representación gráfica

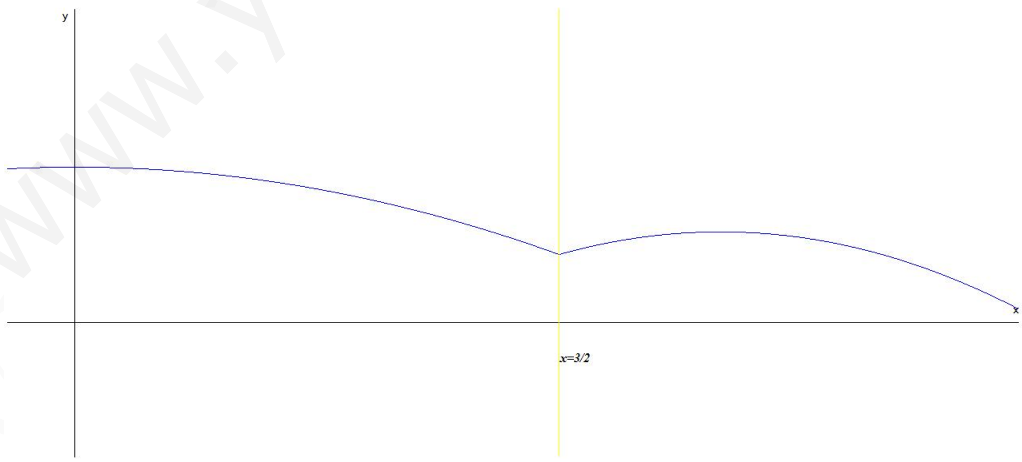
Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = 2 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Recurrimos a la segunda derivada para discernir su clase

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Máximo} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{-7}{6} \Longrightarrow \text{Máximo} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

x	$f(x)$
0	1
3/2	7/16
2	7/12



Opción B

Problema 3.10.2 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 0)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$f\,(0) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f\,(0) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 0$

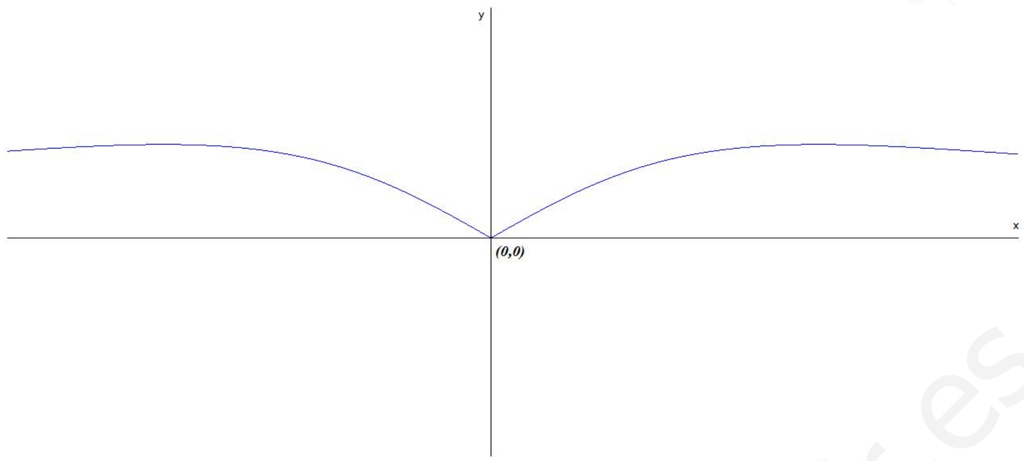
Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\,(0^-) = -1 \\ f'\,(0^+) = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 0$



b) Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1,1)$ y derivable en el intervalo $[-1,1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 3.10.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

☛ Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \left((x-1)^2\right) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

☛ Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = 1$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x = 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x = e & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

☛ Calculamos el área:

$$S = |S_1| + |S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

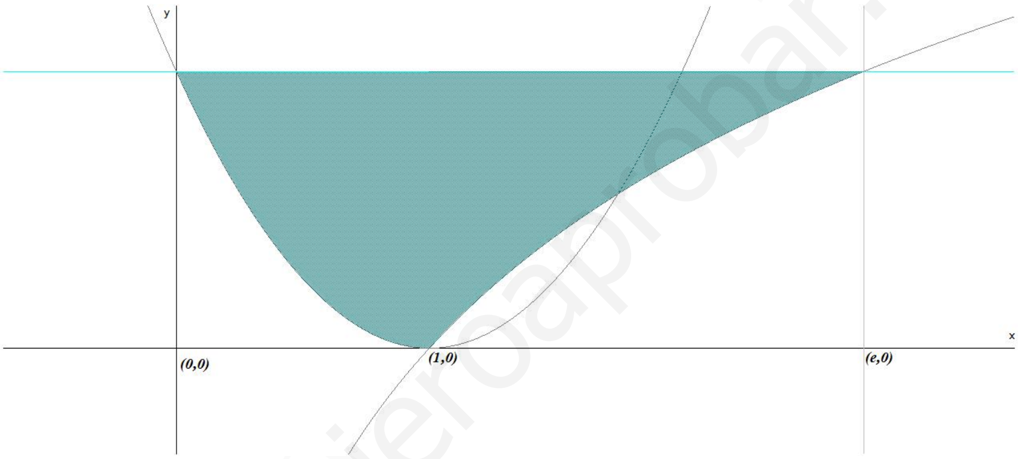
$$S_1 = \int_0^1 (1-(x-1)^2)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow |S_1| = \frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u = \ln x \Longrightarrow u' = dx/x$ y $dv = dx \Longrightarrow v = x$

$$\int (1-\ln x)dx = x - \left(x\ln x - \int dx\right) = 2x - x\ln x$$

$$S_2 = \int_1^e (1-\ln x)dx = 2x - x\ln x]_1^e = e-2 \Longrightarrow |S_2| = e-2$$

$$S = \frac{2}{3} + e - 2 = e - \frac{4}{3}\, u^2$$



3.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.10.4 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow +\infty}(x+1)\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}\right)$$

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{4x+8}\right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 3.10.5 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$\left(u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt; \quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt = -t^2 e^{-t} + 2\int te^{-t}\, dt =$$

$$\left(u = t \Longrightarrow du = dt; \quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$= -t^2e^{-t} + 2\left[-te^{-t} + \int e^{-t}\, dt\right] = -t^2e^{-t} + 2\left[-te^{-t} - e^{-t}\right] = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\Big]_0^x = -e^{-x}(x^2+2x+2)+2$$

Opción B

Problema 3.10.6 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

a)

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

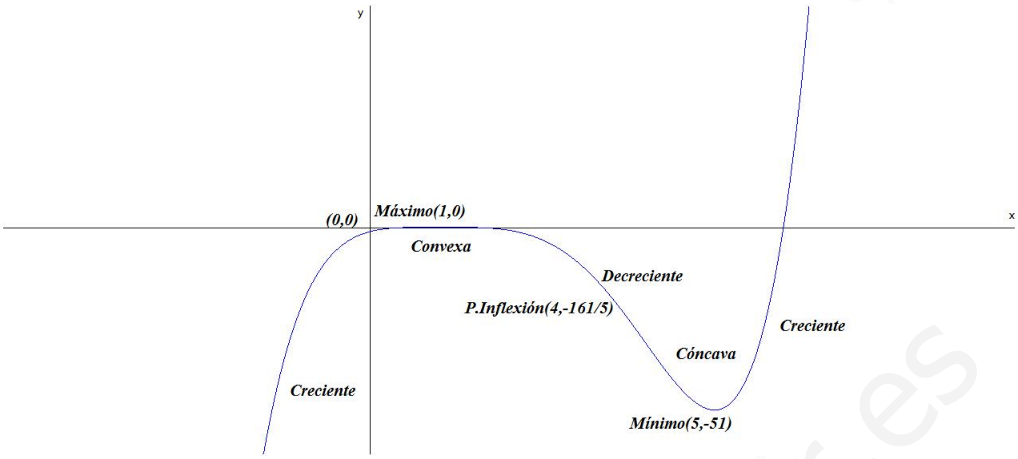
b) En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x-4)(x-1)^2$$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$

c)



$$f(x) = \int \left[x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5\right] dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C$$

$$f(0) = 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$

3.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.10.7 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2}$$

Si $a \neq b$ este límite no tiene solución, por tanto continuamos con la condición de que $a = b$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-a^2x}{2x + 2ax^2} = -\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = b = \pm 1$$

b) Si $a = b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si} \quad 1 + x > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad x = 0 \end{cases}$$

La definición de derivada en el punto 0 es

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f(0+h) = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}, \quad f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h + h^2}{2h^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1 + 2h}{6h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1+2h}{6h+6h^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

Luego no es derivable en el punto $x = 0$.

Opción B

Problema 3.10.8 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

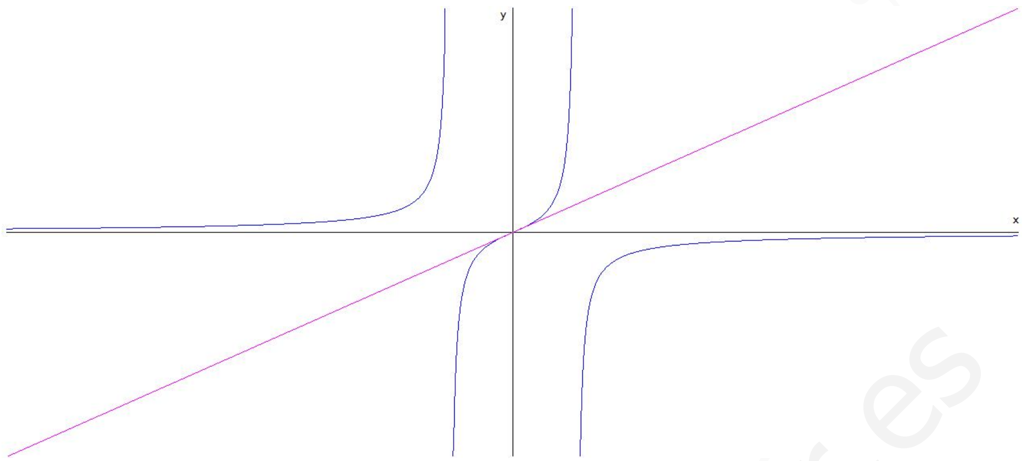
Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = 1$:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Los puntos serán: $(0,0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/8)$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/8)$

b) En $x = 0$ la recta tangente es $y = x$



c) Se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 2]$ y por tanto $\exists c \in [0, 2]$ que cumple

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

3.10.4. Reserva

Opción A

Problema 3.10.9 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.

b) (1 punto) $g(x) = \cos \dfrac{\pi}{8}$.

c) (1 punto) $h(x) = \displaystyle\int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\, dt$.

Solución:

a) $f'(x) = 3(2x)^{3x}(1 + \ln(2x))$

b) $g'(x) = 0$

c)

$$s(x) = \int_{5\pi}^{x} e^{\cos t}\, dt \Longrightarrow s'(x) = e^{\cos x}$$

$$h(x) = s(6x) \Longrightarrow h'(x) = 6e^{\cos x}$$

Opción B

Problema 3.10.10 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x) + V(y)$ si $x + y = 5$.

Solución:

$$f(x) = V(x) + V(y) = x^3 + y^3, \quad y = 5 - x \Longrightarrow f(x) = x^3 + (5 - x)^3 \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(5-x)^2 = 30x - 75 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f''(x) = 30 \Longrightarrow f''\left(\frac{5}{2}\right) = 30 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Sustituyendo en $f(x)$:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{4} = 31,25\ cm^3$$

Problema 3.10.11 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\displaystyle\int (2x+1)^3\, dx$, $\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\, dx$

b) (1 punto) $\displaystyle\int 2^x\, dx$, $\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{x^3}\, dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int (2x+1)^3\, dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^3\, dx = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$

$\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 e^{x^4}\, dx = \frac{e^{x^4}}{4} + C$

b) $\displaystyle\int 2^x\, dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 \cdot 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C$

3.11. Año 2010

3.11.1. Modelo

Opción A

Problema 3.11.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\, e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

a) (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

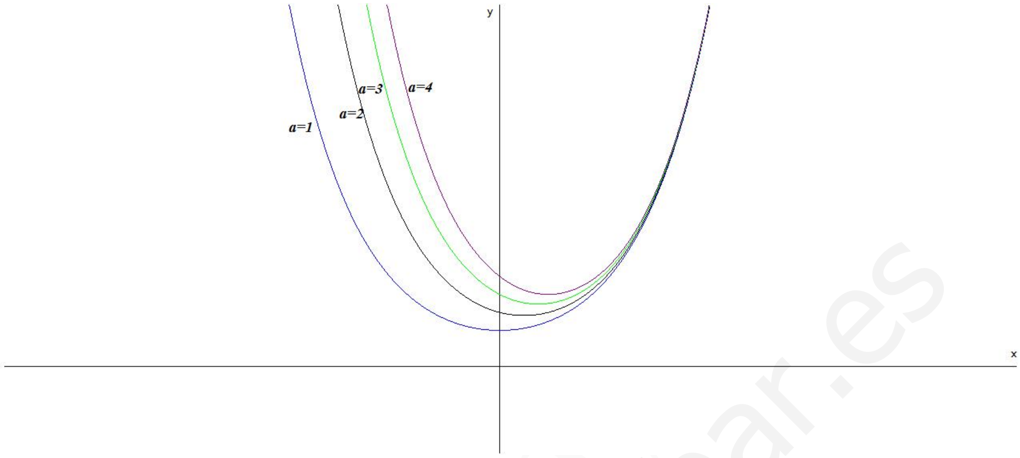
b) (1 punto) Estudiar para que valor , o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

a) $f'(x) = e^x - a\, e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\ln a}{2}$

☛ Si $a > 0$:

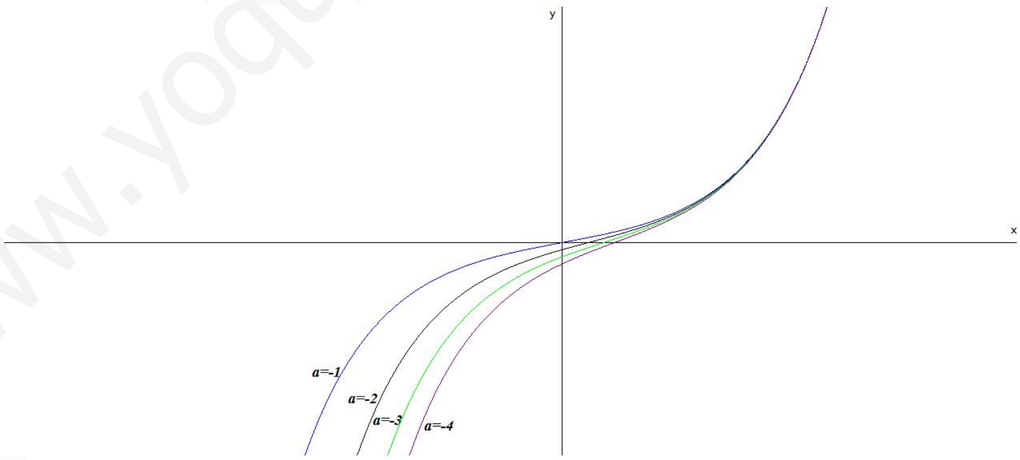


	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el inetervalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\dfrac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$

☛ Si $a \leq 0 \Longrightarrow \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.



$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2e^x = \infty$$

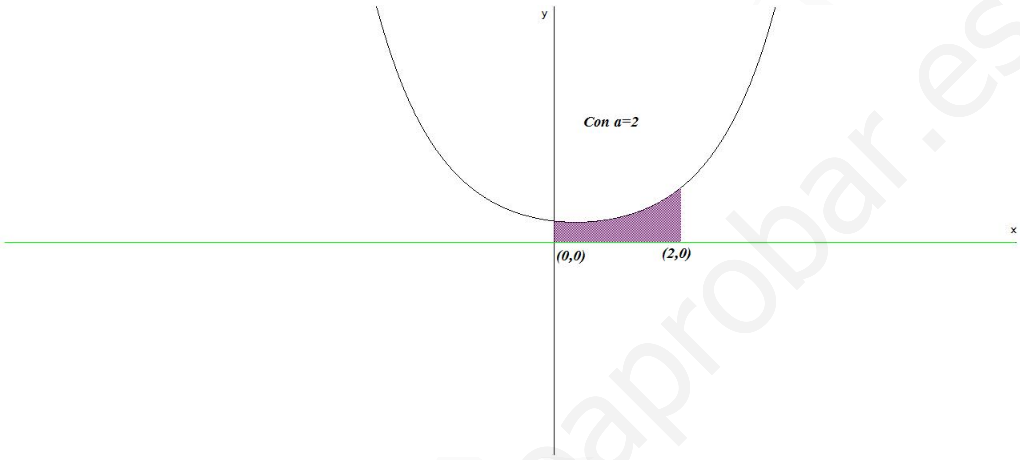
En este caso no hay asíntotas horizontales sea cual sea el valor de a.

Cuando $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{e^{2x}-a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} (e^{-x} + a\, e^x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1+ae^{2x}}{e^x} = \infty \text{ si } a \neq 0$$

Es decir, no hay asíntotas horizontales en este caso siempre que $a \neq 0$. Si $a = 0 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1+ae^{2x}}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En este caso hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) Con $a > 0$:



$$S = \int_0^2 (e^x + a\, e^{-x})\, dx = e^x - a\, e^{-x}\Big]_0^2 = a(1 - e^(-2)) + e^2 - 1\, u^2$$

Opción B

Problema 3.11.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.

b) (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

a) $f(-1) = 0$. El punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow m = f'(-1) = 2$. Luego la recta tangente es:

$$y = 2(x+1) \Longrightarrow 2x - y + 2 = 0$$

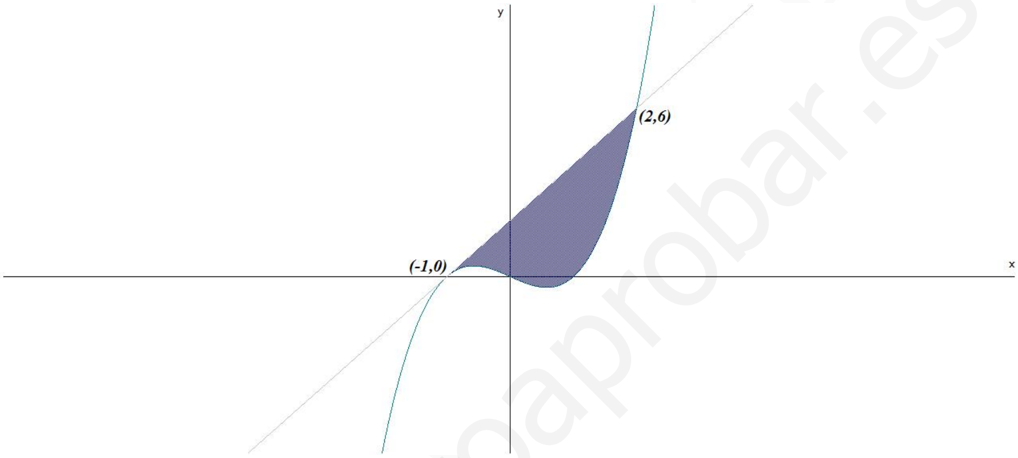
b) Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

$$x^3 - x = 2x + 2 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 2$$

Los puntos de intersección son: $(-1, 0)$ y $(2, 6)$.

c)

$$S = \int_{-1}^{2} (2x + 2 - x^3 + x)\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx = -\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}\; u^2$$



3.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 3.11.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$

b) $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

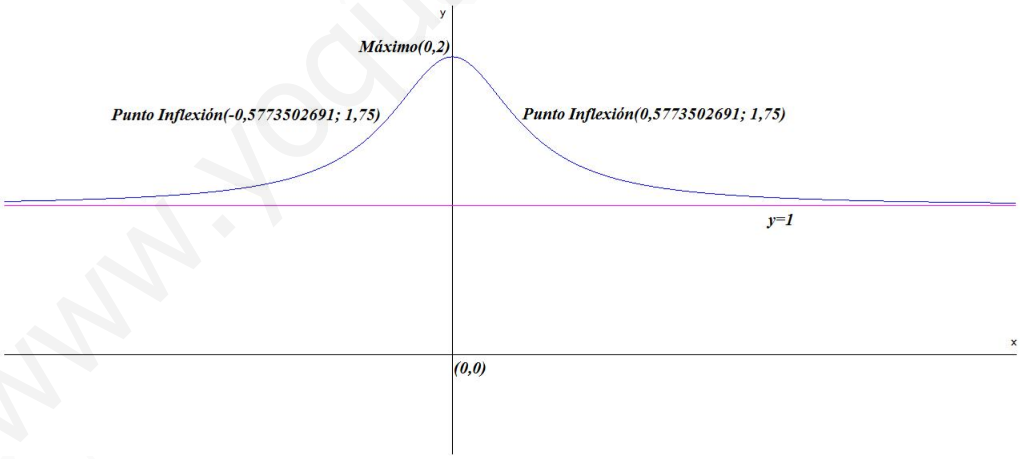
La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y es convexa el intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7}{4}\right)$

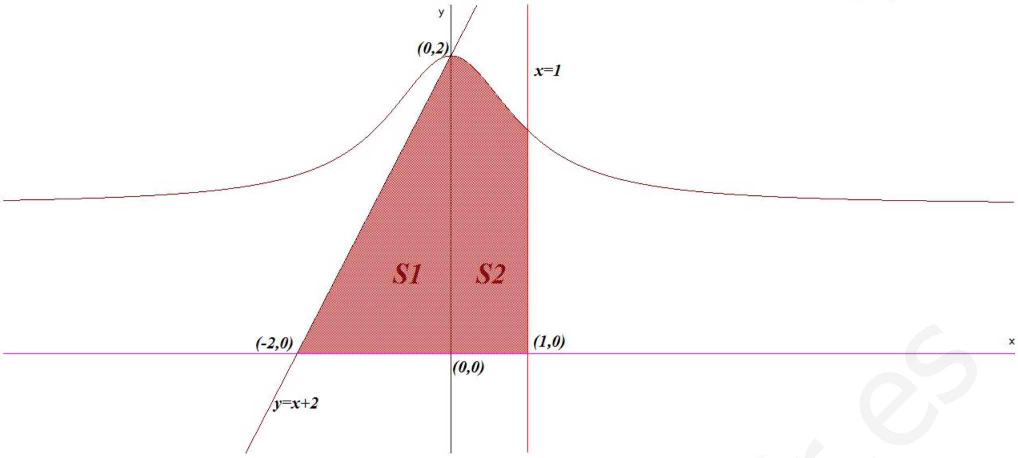
c) Como el denominador no se anula nunca no hay asíntotas verticales y, pasamos a estudiar las horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

y, por tanto, no hay asíntotas oblicuas.



d) $S1 = \dfrac{4}{2} = 2$ y $S2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$:



$$\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \arctan x + x]_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}$$

$$\acute{A}rea = |S1| + |S2| = 3 + \frac{\pi}{4} = \frac{12+\pi}{4}\,u^2$$

Opción B

Problema 3.11.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ x + k & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en **R**.

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (x+k) = k$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2\sqrt{x} - 2^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x \cdot x \cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

b) Si $x=0 \Longrightarrow f(0)=0 \Longrightarrow (0,0)$. Si $f(x)=0 \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=0 \Longrightarrow x=0,\ \ x=1 \Longrightarrow (0,0)$ y $(1,0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0,0)$.

c) Se pide la tangente en la rama $x>1$:

$$f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)2^x-\sqrt{x}\ln x\cdot 2^x\ln 2}{2^{2x}}$$

$$m=f'(1)=\frac{1}{2}$$

La recta tangente es $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$

3.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 3.11.5 *(2 puntos)* Hallar:

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x}\right]^{25}=(-1)^{25}=-1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}=\lambda \Longrightarrow \ln\lambda=\lim_{x\longrightarrow 0}\ln(1+4x^3)^{2/x^3}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\ln(1+4x^3)}{x^3}=$$

$$\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{24}{3(1+4x^3)}=8 \Longrightarrow \lambda=e^8$$

Problema 3.11.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Hay que estudiar la inecuación: $x^2+4x-5>0$.

$$x^2+4x-5=0 \Longrightarrow x=-5,\quad x=1$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$. Las asíntotas verticales son:

☛ $x=-5$:

$$\lim_{x\longrightarrow -5^-}\ln(x^2+4x-5)=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow -5^+}\ln(x^2+4x-5)\ \text{no existe}$$

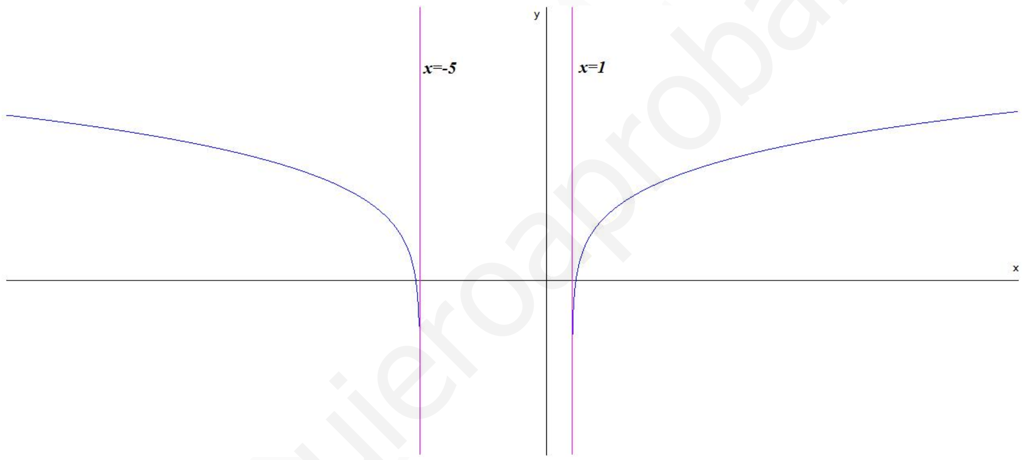
☛ $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\ln(x^2+4x-5)\ \text{no existe},\quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}\ln(x^2+4x-5)=-\infty$$

b) $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-5}=0\Longrightarrow x=-2$ Estudio la derivada sin tener en cuenta que procede de un logaritmo y luego restringiré la conclusiones al dominio de esta función:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-5)$ y creciente en el $(1,\infty)$.



Opción B

Problema 3.11.7 *(3 puntos)* Dadas las funciones:

$$y=9-x^2,\quad y=2x+1$$

se pide:

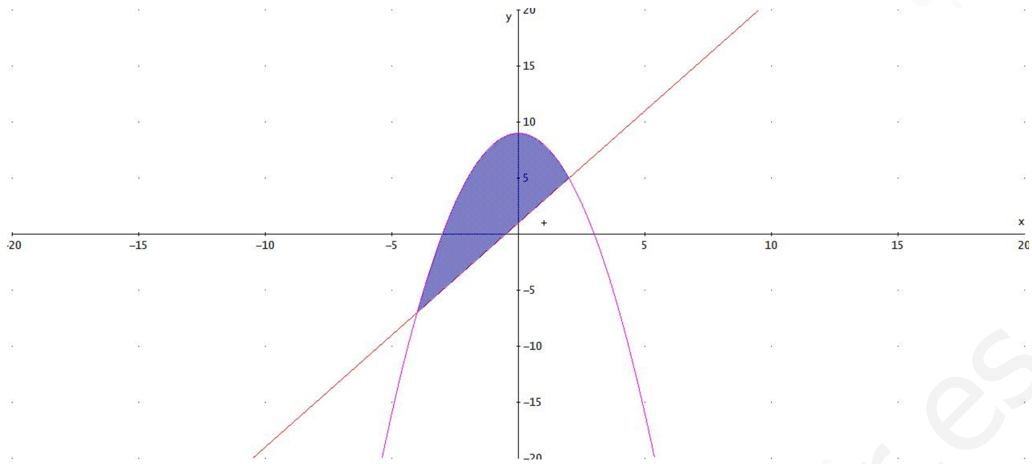
a) (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y=9-x^2$ y el eje OX.

Solución:

a) La función $f(x)=9-x^2$ tiene los puntos de corte con los ejes: $(0,9)$, $(3,0)$ y $(-3,0)$, presenta un máximo en $(0,9)$ y es una función par (simétrica respecto a OY). La función $g(x)=2x+1$ es una recta que pasa por los puntos: $(0,1)$ y $(-1/2,0)$

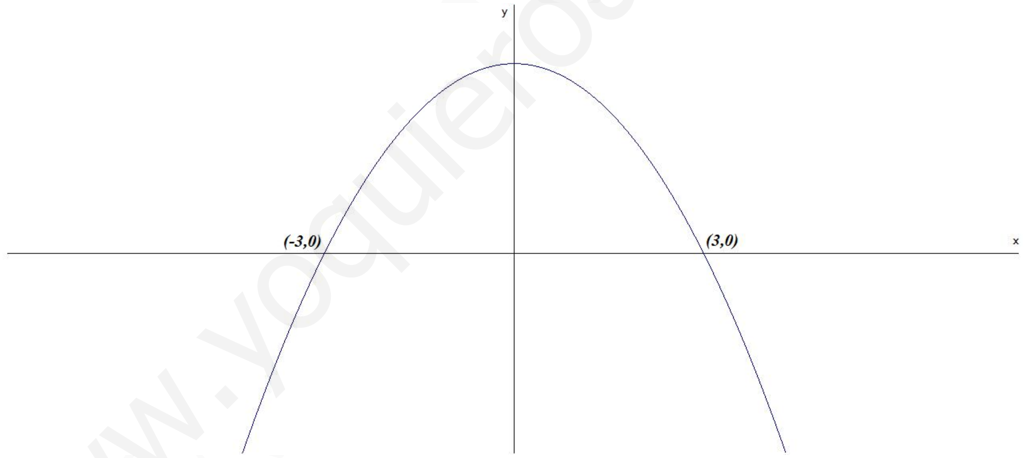


b) Calculamos los puntos de corte de estas dos gráficas:

$$9 - x^2 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -4, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-4}^{2} (9 - x^2 - 2x - 1)\, dx = \int_{-4}^{2} (-x^2 - 2x + 8)\, dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\Big]_{-4}^{2} = 36\ u^2$$

c) Dibujamos $y = 9 - x^2$ y por simetría podemos hacer:



$$V = 2\pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2\, dx = 2\pi \int_{0}^{3} (81 + x^4 - 18x^2)\, dx = 81x + \frac{x^5}{5} - 6x^3\Big]_{0}^{3} = \frac{1296\pi}{5}\ u^3$$

3.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 3.11.8 *(2 puntos)* Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+\arctan x)^{a/x}=\lambda \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{a\ln(1+\arctan x)}{x}=\ln\lambda$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a\ln(1+\arctan x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{a}{1+x^2}}{1+\arctan x}=a=\ln\lambda\Longrightarrow \lambda=e^a$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3+2e^x}{7+5e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2e^x}{5e^x}=\frac{2}{5}$$

Problema 3.11.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$

Solución:

a)

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)(4-x^2)^{-1/2}\,dx=\left.-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1=2-\sqrt{3}$$

b) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$ se resuelve por partes $u=x$ y $dv=\cos x\,dx\Longrightarrow du=dx$ y $v=\sin x$:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=\left.x\sin x+\cos x\right]_0^\pi=-2$$

Opción B

Problema 3.11.10 *(3 puntos)* Los puntos $P(1,2,1)$, $Q(2,1,1)$ y $A(a,0,0)$ con $a>3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Solución:

$\overrightarrow{AP}=(1-a,2,1)$ y $\overrightarrow{AQ}=(2-a,1,1)$ y como punto elijo el $A(a,0,0)$:

$$\pi:\begin{vmatrix}1-a&2-a&x-a\\2&1&y\\1&1&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi: x+y+(a-3)z-a=0$$

Punto de corte de π con OY: hacemos $x = 0$ e $z = 0 \Longrightarrow B(0, a, 0)$.

Punto de corte de π con OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, a/(a-3))$.

Tendremos los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0), \ \ \overrightarrow{OB} = (0, a, 0), \ \ \overrightarrow{OC} = (0, 0, a/(a-3))$$

El volumen del tetraedro será:

$$V(a) = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a/(a-3) \end{vmatrix}| = \frac{a^3}{6a-18}$$

Para calcular el mínimo hacemos su derivada e igualamos a cero:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a-9)}{6(a-3)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \frac{9}{2}$$

El único punto a estudiar será el $a = 9/2$:

	$(-\infty, 9/2)$	$(9/2, \infty)$
$V'(a)$	$-$	$+$
$V(a)$	decrece	crece

$\Longrightarrow$ Mínimo $\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{8}\right)$

Luego los puntos pedidos son:

$$A\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right), \ \ B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right), \ \ C\left(0, 0, 3\right)$$

3.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 3.11.11 *(2 puntos)* Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(ax^2)\left(\frac{x^2-3}{x^2+3} - 1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-6ax^2}{x^2+3} = -6a$$

$$e^{-6a} = 4 \Longrightarrow \ln e^{-6a} = \ln 4 \Longrightarrow -6a = \ln 4 \Longrightarrow a = -\frac{\ln 4}{6}$$

Problema 3.11.12 *(2 puntos)* Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_{14}^{16}(x-15)^8\,dx$

b) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x-15)^8\,dx = \left.\frac{(x-15)^9}{9}\right]_{14}^{16} = \frac{2}{9}$

b) $\displaystyle\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx$ se resuelve por partes: $u = x-9 \Longrightarrow du = dx$ y $dv = (x-10)^{19}dx \Longrightarrow$ $v = \dfrac{(x-19)^{20}}{20}$

$$\int (x-10)^{19}(x-9)\,dx = \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \int (x-10)^{20}\,dx =$$

$$\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} + C$$

$$\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx = \left.\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21}\right]_9^{11} = \frac{2}{21}$$

Opción B

Problema 3.11.13 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -5$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^+} \frac{3x^2+5x-20}{x+5} = \left[\frac{30}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^-} \frac{3x^2+5x-20}{x+5} = \left[\frac{30}{0^-}\right] = -\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+5x-20}{x+5} = +\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx+n \Longrightarrow y = 3x-10$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+5x-20}{x^2+5x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5} - 3x\right) = -10$$

b) Estudio completo:

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = -5+\sqrt{10},\ \ x = -5-\sqrt{10}$$

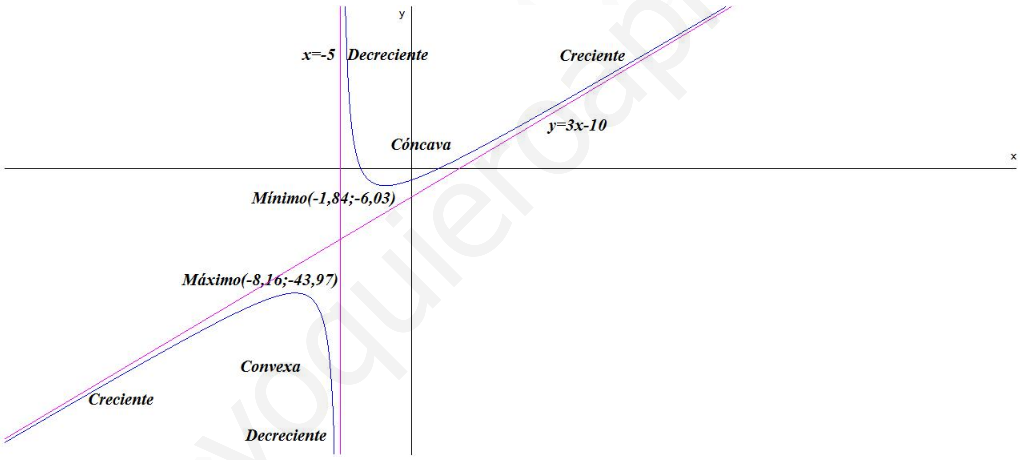
	$(-\infty, -5-\sqrt{10})$	$(-5-\sqrt{10}, -5+\sqrt{10})$	$(-5+\sqrt{10}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función tiene un Máximo en el punto $(-8,16; -43,97)$ y un Mínimo en el punto $(-1,84; -6,03)$.

☛ Curvatura: $f''(x) = \dfrac{60}{(x+5)^3} \neq 0$ Luego la función no tiene puntos de Inflexión.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

c) Representación gráfica:



3.12. Año 2011

3.12.1. Modelo

Opción A

Problema 3.12.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.

b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

a) ☛ Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función presenta un Máximo en el punto $\left(3, \dfrac{1}{8}\right)$. En el punto $x = -1$ la función no es continua, en ese punto habrá una posible asíntota vertical.

☛ Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

☛ Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo $[0, 3]$:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Los límites de integración serán de 0 a 1 y de 1 a 3. Calculamos la integral indefinida de la función por descomposición polinómica:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

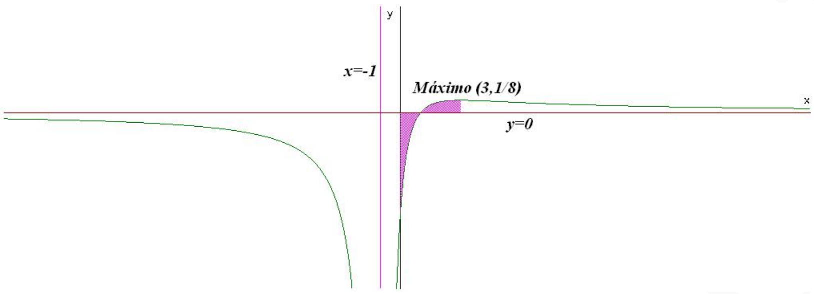
$$x - 1 = A(x+1) + B \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \Longrightarrow B = -2 \\ x = 0 \Longrightarrow -1 = A + B \Longrightarrow A = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = F(1) - F(0) = \ln 2 - 1$$

$$S_2 = \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = F(3) - F(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.12.2 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{(-1/x^2)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1/\cos^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}} - \frac{-1/\cos^2 x}{2\sqrt{1-\tan x}}\right) = 1$$

Problema 3.12.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} - \sin x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Los límites de integración serán de 0 a $\pi/6$ y de $\pi/6$ a $\pi/2$. Calculamos la integral indefinida:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\, dx = \frac{x}{2} + \cos x$$

$$S_1 = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\, dx = F(\pi/6) - F(0) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = F(\pi/2) - F(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} = 0,47$$

3.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.12.4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

a)

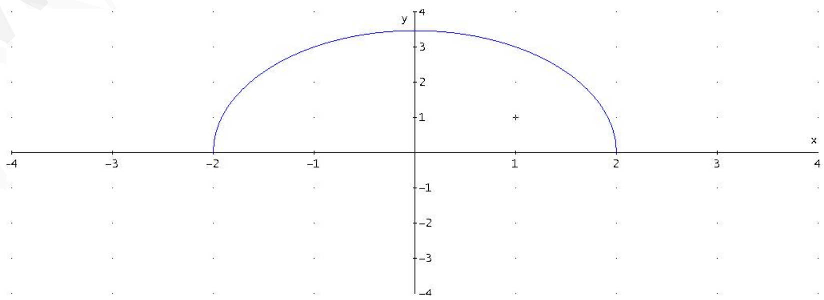
$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx = \left.\frac{\sqrt{(4+5x^2)^3}}{15}\right]_1^3 = \frac{316}{15}$$

b) El dominio de la función viene dado por la inecuación $12 - 3x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f) = [-2, 2]$ y su signo es siempre positivo, la función siempre está por encima del eje de abscisas; como en $x = \pm 2$ la función vale cero en estos dos puntos que serán mínimos relativos. Por otra parte:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-2, 0)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego hay un máximo en el punto $(0, 2\sqrt{3})$ que, por ser el único, será un máximo absoluto. Alcanzará un mínimo absoluto en los puntos en los que $f(x) = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$.



Problema 3.12.5 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

b) Sea cual sea el valor de m, la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$ es una función polinómica y, por tanto, continua y derivable en R.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} (x^5 + 3x + m) = \infty \ \text{ y } \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^5 + 3x + m) = -\infty$$

Luego la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y, por el teorema de Bolzano, necesariamente tiene cortar al eje de abscisas.

$$f'(x) = 20x^4 + 3 \geq 0 \ \ \forall x \in R$$

Luego la función es siempre creciente, en consecuencia sólo puede haber un punto de corte (Teorema de Rolle).

Opción B

Problema 3.12.6 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{ax^4 - 3}{x^4} = 0 \ \text{ y } \ f'(1) = 0 \Longrightarrow a = 3$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(1) = 12 > 0$$

Luego en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3x^4 = 3 \Longrightarrow x = \pm 1$$

En $x = -1$:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(-1) = -12 < 0$$

Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

b) Si $a = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

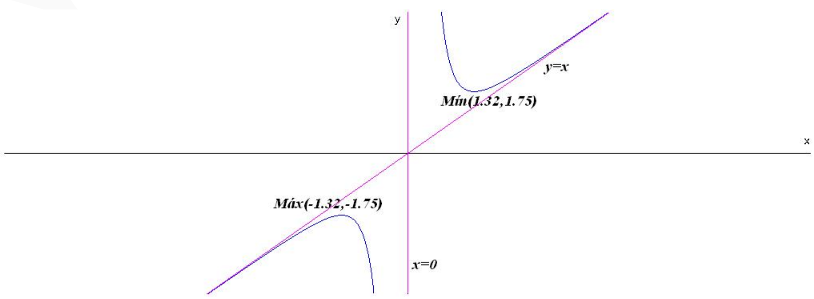
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

c) La gráfica para $a = 1$:



Se trata de una función IMPAR, bastaría con calcular sus extremos

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = -1,32, \;\; x = 1,32$$

	$(-\infty; -1,32)$	$(-1,32; 1,32)$	$(1,32; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1,32; -1,75)$ y un mínimo relativo en el punto $(1,32; 1,75)$

3.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.12.7 *(3 puntos).*

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$$

b) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2}\, dx$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2}\, dx = \frac{1}{6} \ln|1 + 3x^2|\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$

c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f) = (-\infty, -7] \cup [-2, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x - 9}{2\sqrt{x^2 + 9x + 14}}$$

La función tiene derivada en $(-\infty, -7) \cup (-2, \infty)$.

Opción B

Problema 3.12.8 *(2 puntos).* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.
Solución: f es continua en $x = 0$ si

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Como $f(0) = k \Longrightarrow k = 0$

Problema 3.12.9 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

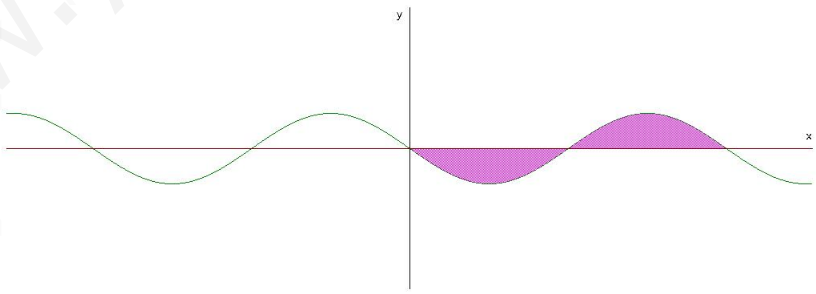
Solución:

a) $f(x) = -\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pi$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ hay dos recitos de integración $S_1 \equiv [0, \pi]$ y $S_2 \equiv [\pi, 2\pi]$

$$S_1 = \int_0^{\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$



b)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \pi \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_0^{\pi} = \pi^2\ u^3$$

3.13. Año 2012

3.13.1. Modelo

Opción A

Problema 3.13.1 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\lambda(e^{\lambda x^2}+2\lambda x^2 e^{\lambda x^2})}{6} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

Para que f sea continua en $x=0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Luego $\dfrac{\lambda}{3} = 2 \Longrightarrow \lambda = 6$ verificaría la primera igualdad, pero no la segunda, dado que $f(0) \neq 2$. Es decir, con $\lambda = 6$ la función será continua en $R - \{0\}$, en $x = 0$ presenta una discontinuidad evitable y sería continua si incluimos la rama $f(0) = 2$.

Problema 3.13.2 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} P'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{2a}{3} + b = 0 \\ \\ P'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ \\ P'(0) = 1 \text{ pendiente de } y = x + 3 \Longrightarrow b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El punto $(0, P(0))$ también pertenece a la recta $y = x + 3$ luego para $x = 0 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow P(0) = 3 \Longrightarrow c = 3$ El polinomio buscado es

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

.

Opción B

Problema 3.13.3 *(3 puntos)* Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1,\quad F(3) = 2,\quad F(4) = 6,\quad F(5) = 3,\quad f(3) = 3\ \text{ y }\ f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx.$

Solución:

a) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = F(5) - F(2) = 3 - 1 = 2$

b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx =$
$= 5(F(3) - F(2)) - 7(3 - 2) = 5(2 - 1) - 7 = -2$

c) $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx = \left.\frac{(F(x))^2}{2}\right]_2^4 = \frac{F(4)^2}{2} - \frac{F(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$

3.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.13.4 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,\quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 2 \Longrightarrow a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = -3 \\ f''(3) = 0 \Longrightarrow a = -9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -9 \\ b = 15 \\ c = -5 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$$

Problema 3.13.5 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x}\,dx$

Solución:

- (1 punto). $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx = -\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\cos x \Longrightarrow du=-\sin x \\ dv=e^{2x}\,dx \Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{c} u=\sin x \Longrightarrow du=\cos x \\ dv=e^{2x}\,dx \Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}\sin x}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$

$$I=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{2x}\sin x}{2}-\frac{1}{4}I \Longrightarrow I+\frac{1}{4}I=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{4}\Longrightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{5}$$

- $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

Opción B

Problema 3.13.6 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}},\;\; g(x)=(lnx)^x,\;\; h(x)=sen(\pi-x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0,2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $Dom(f)=(\sqrt{3},\infty)$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3+\frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}}=3$$

b)

$$g'(x)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln(x)+\frac{1}{\ln x}\right)\Longrightarrow g'(e)=1$$

c) $h(x)sen(\pi-x)=0\Longrightarrow \pi-x=k\pi\Longrightarrow x=(1-k)\pi$,, el único punto de corte en este intervalo es en $x=\pi$.

$$h'(x)=-\cos(\pi-x)=0\Longrightarrow \pi-x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Longrightarrow x=\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)$$

Luego $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$.

3.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.13.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Solución:

$$f'(x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z$$

a) En el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -2\cos 2x$:

$$f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 0 \text{ hay un Máximo}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

b)

$$f''(x) = -2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z$$

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$ y $x = \pm 3\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 4\sin 2x$:

$$f'''(\pm\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(\pm 3\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm 3\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$g(x) = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

$$g(\pi/4) = \frac{\pi/2 + \sin\pi/2}{4} + C = \frac{\pi + 2}{8} + C = 0 \Longrightarrow C = -\frac{\pi + 2}{8}$$

$$g(x) = \frac{2x + \sin 2x}{4} - \frac{\pi + 2}{8}$$

Opción B

Problema 3.13.8 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}=\lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=-\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=-1$$

Problema 3.13.9 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du=3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x)=\sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

a)

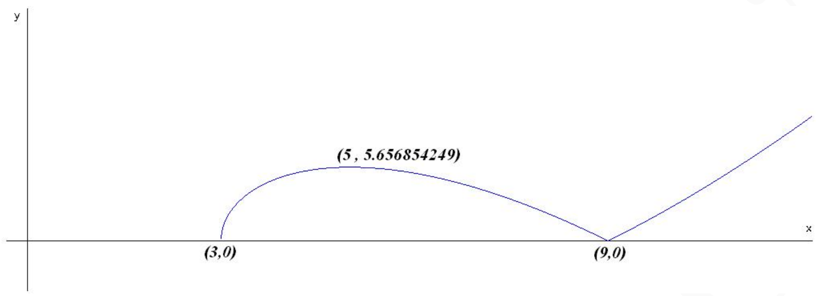
$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx=[u=x^3]=\frac{1}{3}\int_1^8 f(u)\,du=1$$

b) $\text{Dom}(F(x))=[3,+\infty)$

$$F'(x)=\frac{3(x-5)(x-9)}{2\sqrt{(x-3)(9-x)^2}}=0\Longrightarrow x=5,\ x=9$$

	$(3,5)$	$(5,9)$	$(9,\infty)$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(5,4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en el punto $(9,0)$ hay un mínimo relativo. En el punto $(3,0)$ hay un mínimo global.



3.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.13.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6 + A; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 17$$

$$9 + A = 17 \Longrightarrow A = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \le 3 \\ 10 - 2x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3^-) = 3 \ne f'(3^+) = 4 \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 3$$

b) $f'(x) = 0$ sólo en el intervalo $(3, \infty)$ y será: $10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$

c) $f(4) = 20$, $f(8) = 12$, $f(5) = 21$, luego tendríamos un máximo absoluto en el punto $(5, 21)$ y un mínimo absoluto en el punto $(8, 12)$.

Opción B

Problema 3.13.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) $x^2 \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$ y $\sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$, luego podemos concluir que $f(x) = x^2 \sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$.

b) La integral se calcula por partes:

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x\, dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x\, dx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \left.(2 - x^2)\cos x + 2x \sin x\right]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$$

c) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(\pi) = -\pi^2 \Longrightarrow m = 1/\pi^2$, $f(\pi) = 0$:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \text{ recta normal}$$

$$y = -\pi^2(x - \pi) \text{ recta tangente}$$

3.14. Año 2013

3.14.1. Modelo

Opción A

Problema 3.14.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2x^2+3x}{x-1} = 0; \ \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0; \ f(0) = a$$

Luego $a = 0$.

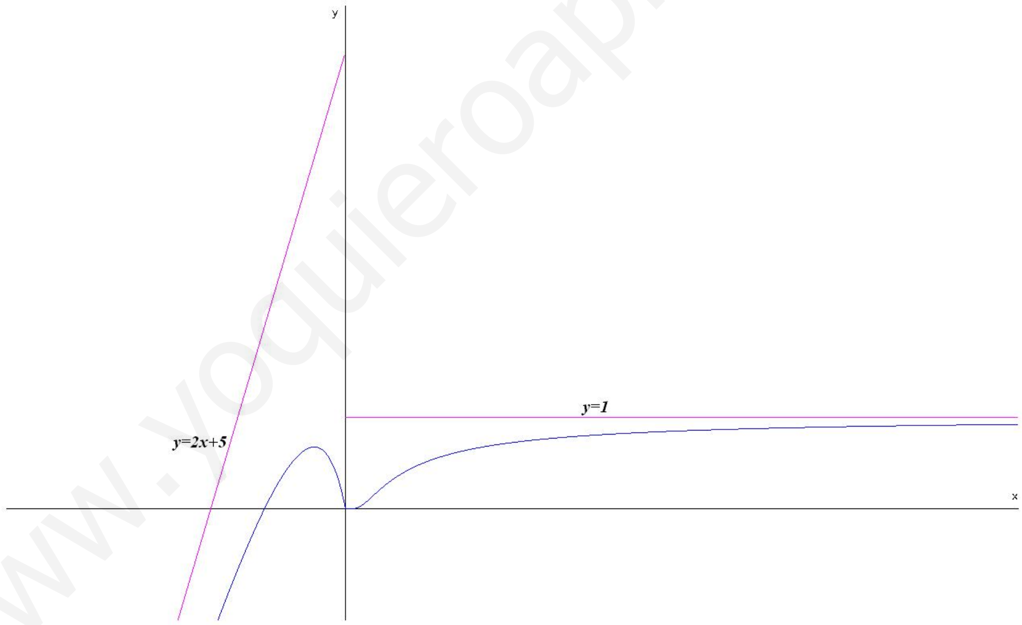
b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 3; \ f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1/h}{e^{1/h}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{-1/h^2}{-1/h^2 e^{1/h}} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/h}} = 0$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.



c) Si $x < 0$:

- Verticales: La única posible sería en $x = 1$, pero no está en la rama y, por tanto no es válida.
- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{x-1} = -\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x - 1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x - 1} \right) = 5 \Longrightarrow y = 2x + 5$$

Si $x > 0$:

- ☛ Verticales: No puede haberlas.
- ☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Opción B

Problema 3.14.2 *(3 puntos)*

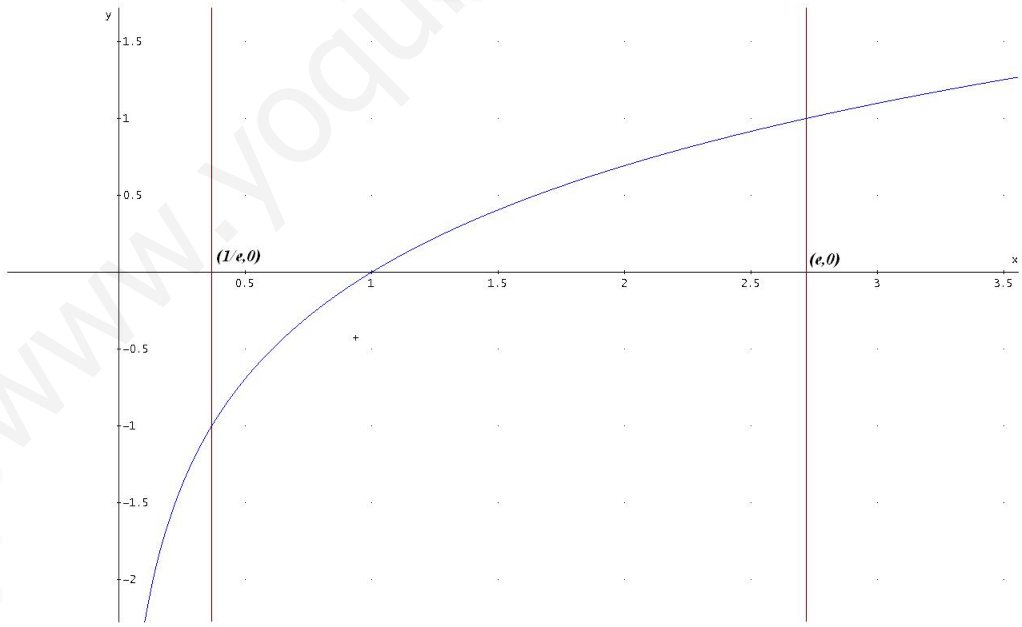
a) (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.

b) (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.

c) (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

Solución:

a) $f(1/e) = -1$, $f(e) = 1$ y $f(1) = 0$:

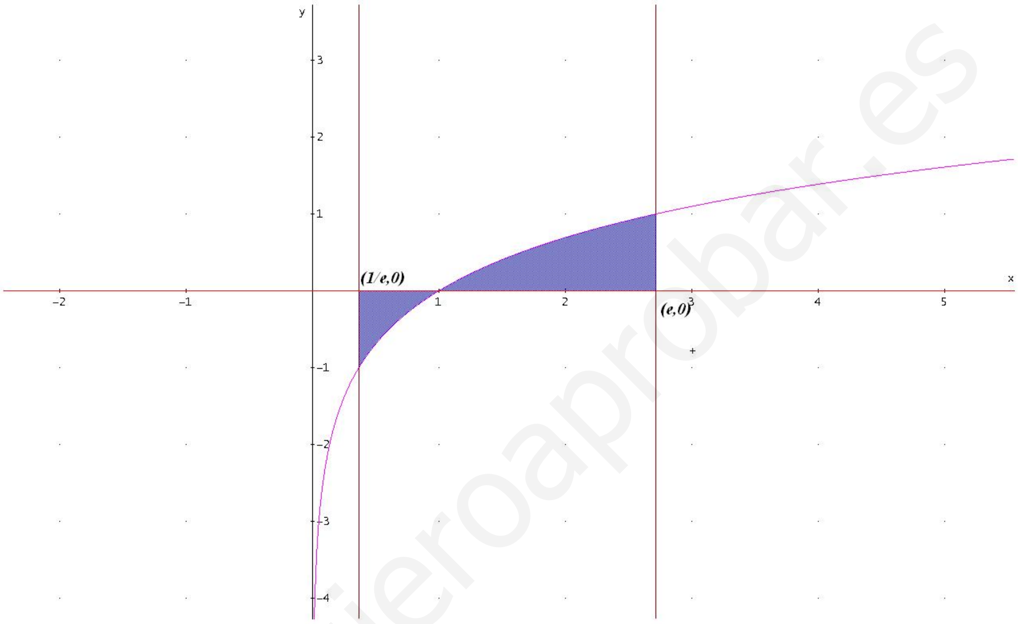


b)

$$F(x) = \int \ln x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array} \right] = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1)$$

$$S_1 = F(1) - F(1/e) = \frac{2-e}{e}; \quad S_2 = F(e) - F(1) = 1$$

$$\acute{A}rea = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{2-e}{e}\right| + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = \frac{2(e-1)}{e}\, u^2$$



c)

$$F(x) = \int (\ln x)^2\, dx = \left[\begin{array}{c} u = (\ln x)^2 \Longrightarrow du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array} \right] =$$

$$x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1)$$

$$V = \pi \int_{1/e}^{e} (\ln x)^2\, dx = \pi(F(e) - F(1/e)) = \frac{\pi(e^2-5)}{e}\ u^3$$

3.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.14.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) ☛ Verticales: $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\left[\frac{27}{0^+}\right]=+\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\left[\frac{27}{0^+}\right]=+\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3}{(x-3)^2}=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^3}{(x-3)^2}=+\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow -\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+9}-x\right)=$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{6x^2-9x}{x^2-6x+9}\right)=6\Longrightarrow y=x+6$$

b) $f'(x)=\dfrac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}$ en el punto de abscisa $x = 2$ el valor de la pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 28$ y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 8)$, la recta buscada en su ecuación punto pendiente será:

$$y-8=28(x-2)$$

Problema 3.14.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)}\ \int\frac{x-3}{x^2+9}\,dx\qquad \text{b)}\ \int_1^2\frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$$

Solución:

a)

$$\int\frac{x-3}{x^2+9}\,dx=\int\frac{x}{x^2+9}\,dx-3\int\frac{1}{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+9|-\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

b)

$$\int_1^2\frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2x^2}-\ln|x|\Big]_1^2=\frac{21}{8}-\ln 2$$

Opción B

Problema 3.14.5 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

c) (1 punto). Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

Solución:

a)

$$f'(x) = -2\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -4\cos 2x$:

$$f''(0) = -4 < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo absoluto}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

b)

$$f''(x) = -4\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ \ k \in Z$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 8\sin 2x$:

$$f'''(\pi/4) = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = \pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(-\pi/4) = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = -\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)\,dx = x + \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

3.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Solución:

a)

$$f(x) = e^{-x} - x \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x} - 1 \Longrightarrow f''(x) = e^{-x}$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow P'(x) = 2ax + b \Longrightarrow P''(x) = 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} P(0) = f(0) = c = 1 \\ P'(0) = f'(0) = b = -2 \\ P''(0) = f''(0) = 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

b) La función f es continua en $\mathbb{R}$, además.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(e^{-x}-x)=+\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(e^{-x}-x)=-\infty$$

la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty,+\infty)$ y por el teorema de Bolzano aseguramos que $\exists\, c\in\mathbb{R}/f(c)=0$.
La función f es siempre decreciente ya que $f'(x)=-e^{-x}-1<0$ y, por tanto, ese punto c es único.

Problema 3.14.7 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} a & \text{si} & x<0\\ 1+xe^{-x} & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular, en función de a, la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-} a=a\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}(1+xe^{-x})=1\end{array}\right. \Longrightarrow a=1$$

Derivabilidad en $x=0$: $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x<0\\ e^{-x}(1-x) & \text{si} & x>0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=1\end{array}\right. \Longrightarrow f$ no es derivable en $x=0$.

b) $\displaystyle\int(1+xe^{-x})\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\Longrightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right]=x-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=x-xe^{-x}-e^{-x}=$ $x-e^{-x}(x+1)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} a\,dx+\int_{0}^{1}(1+xe^{-x})\,dx=[ax]_{-1}^{0}+\left[x-e^{-x}(x+1)\right]_{0}^{1}=$$

$$a+(1-2e^{-1})-(-1)=a+2(1-e^{-1})$$

Opción B

Problema 3.14.8 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} & x<0\\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x), \lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)$

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ f no es continua en $x = 0$ presenta una discontinuidad no evitable, hay un salto.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

3.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.14.9 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} = \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)}$$

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -1$ y $x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5(7x - 20)}{2(x + 1)(x - 4)} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{5(7x^2 - 40x + 88)}{2(x + 1)^2(x - 4)^2} < 0 \;\forall x \in R$. Luego f decrece en todo el dominio $R - \{-1, 4\}$.

$f''(x) = \dfrac{5(7x^3 - 60x^2 + 264x - 344)}{(x + 1)^3(x - 4)^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

Hay un punto de inflexión en $(2, 5/2)$.

c) La gráfica es:

Opción B

Problema 3.14.10 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0, \;\; m = f'(0) = 1; \;\; f(0) = 0 \Longrightarrow y = x$$

b)

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = x - \arctan x]_0^1 =$$

$$1-\frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

Problema 3.14.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

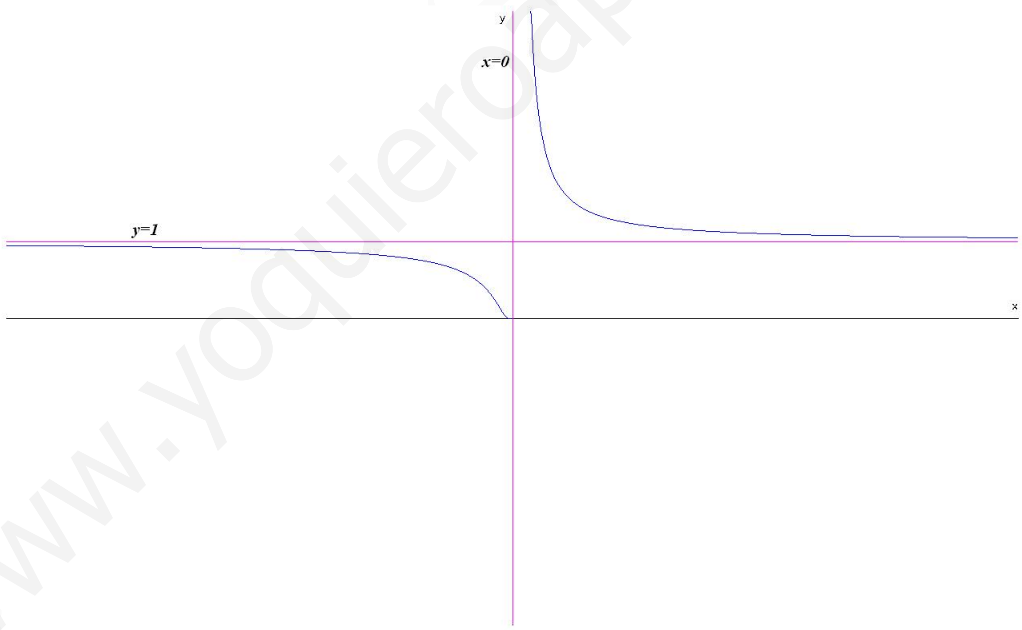
b) (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$; luego en 0 no extiste el límite.

b) La gráfica sería:



Por el apartado anterior la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0,\ \forall x \in R - \{0\}$$

Luego la función es siempre decreciente.

3.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.12 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abscisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.

b) (0,5 puntos). ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(2/3) = 0 \Longrightarrow 4 + 2a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

b)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f''(x) = 6x - 4$$

$f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo.

Problema 3.14.13 *(2 puntos)*Dada la función:

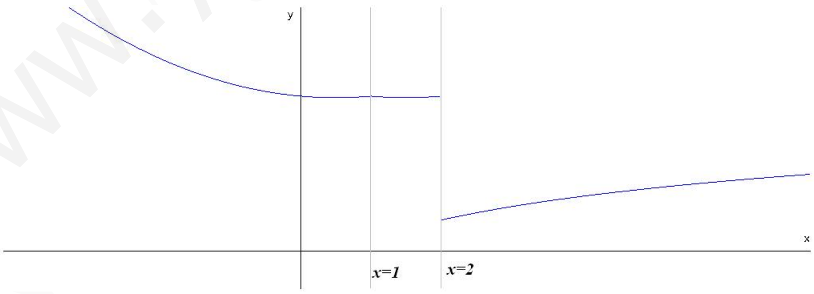
$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x^2 - x + 25 & \text{si} & x \le 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si} & 1 < x < 2 \\ \frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si} & x \ge 2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

Solución:



a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - x + 25) = 25$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}(5\sqrt{(2+x)^2+(5-x)^2}) = 25$$
$$f(1) = 25$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.
Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-}(5\sqrt{(2+x)^2+(5-x)^2}) = 25$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+}(\frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5}) = 5$$

Luego $f(x)$ es discontinua no evitable en $x = 2$, hay un salto.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \frac{5(2x-3)}{\sqrt{2x^2-6x+29}} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{10x}{(x^2+1)\ln 5} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = -1$ luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 2$: No puede ser derivable ya que no es continua.
En resumen, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Opción B

Problema 3.14.14 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,5 puntos). Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.

c) (1,5 puntos). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2x(1-\alpha)}{(x^2+1)^2}$

$$b = f(1) = \frac{1+\alpha}{2}, \quad m = f'(1) = \frac{1-\alpha}{2}$$
$$y - \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1-\alpha}{2}(x-1)$$

b) $m = 0 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$

c) Si $\alpha = 2$ tenemos $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

- ☛ Dom$(f) = R$, es una función par, con corte con OY en $(0, 2)$ y siempre positiva.
- ☛ Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 1$ ya que $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2+1} = 1$ y por tanto no hay oblicuas.

☛ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

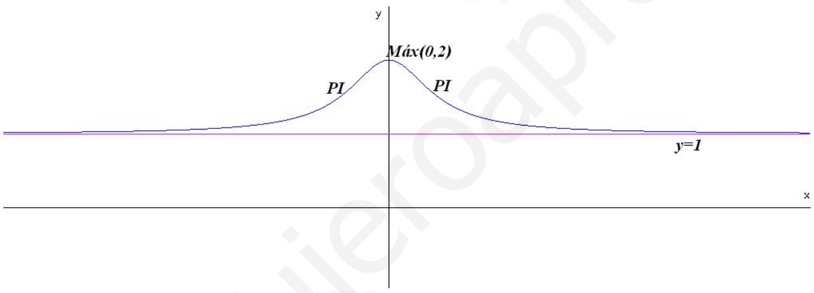
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$.

☛ $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ y Convexa: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



3.15. Año 2014

3.15.1. Modelo

Opción A

Problema 3.15.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}[1-\sin x]^{1/x} = [1^\infty] = \lambda$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{-\cos x}{1-x}}{1} = -1 = \ln \lambda \Longrightarrow \lambda = e^{-1}$$

Problema 3.15.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\displaystyle\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx.$$

Solución:

a)

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x-5 \Longrightarrow du = dx \\ dv = g'(x)dx \Longrightarrow v = g(x) \end{array}\right] =$$

$$(x-5)g(x)]_5^6 - \int_5^6 g(x)\,dx = g(6) - 0 - g(6) = 0$$

b)

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{x/2} \Longrightarrow 2du = e^{x/2}dx \\ x = 0 \Longrightarrow u = 1 \\ x = 2 \Longrightarrow u = e \end{array}\right] = 2\int_1^e f(u)\,du = 1$$

Opción B

Problema 3.15.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.

b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{2x^2+6}{x-1}=-6$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^2-1}{x^2+1}=-1$$

Como $\lim_{x\longrightarrow 0^-}\neq\lim_{x\longrightarrow 0^+}$ la función tiene en $x=0$ un discontinuidad no evitable, hay un salto.

b) Cuando $x<0$: No hay asíntotas verticales ni horizontales, pero hay oblicuas: $y=mx+n\Longrightarrow y=2x+2$

$$m=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x}=2$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=2$$

Cuando $x\geq 0$: No hay asíntotas verticales pero si horizontales y, por tanto, no hay oblicuas. $y=1$

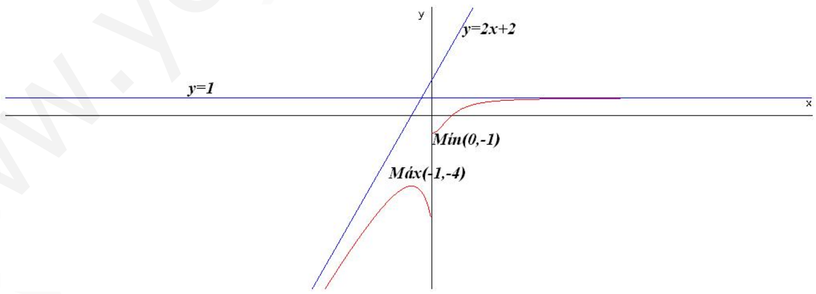
$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

c)

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2} & \text{si} & x<0\\[2ex] \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$$

Cuando $x<0$: $x^2-2x-3=0\Longrightarrow x=-1,\ \ x=3$ No vale. En $x=-1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un máximo en el punto $(-1,-4)$

$x\geq 0$: $4x=0\Longrightarrow x=0$. En $x=0$ la función empieza a crecer, luego hay un mínimo en el punto $(0,-1)$



3.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.15.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $f : R \longrightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

Solución:

a) Por ser $x = -2$ la abscisa del punto de tangencia con la recta $y = 16x + 16 \Longrightarrow f(-2) = -32 + 16 = -16$.
La pendiente de esta recta es $m = f'(-2) = 16$ y, por último, al ser punto de inflexión $f''(-2) = 0$.

b) $g(x) = x^4 + 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = -4$

$$\int_{-4}^{0} (x^4 + 4x^3)\, dx = \left.\frac{x^5}{5} + x^4\right]_{-4}^{0} = -\frac{4^4}{5}$$

$$S = \left|-\frac{4^4}{5}\right| = \frac{256}{5}\ u^2$$

Problema 3.15.5 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-2 - e^x + 3\cos(3x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-e^x - 9\sin(3x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$$

Opción B

Problema 3.15.6 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1 - x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (a + \ln(1-x)) = \infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} (a + \ln(1-x)) = a, \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow a = 0$$

c)

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{1-x} & \text{si} & x < 0 \\ xe^{-x}(2-x) & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right.$$

Luego la función no es derivable en $x = 0$. Concluimos con que f es continua y derivable en $R - \{0\}$ y sería continua en $x = 0$ pero no derivable para $a = 0$.

3.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.

c) (1 punto). En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{mx^3 + 2}{x^3}; \quad f'(1) = 0 \Longrightarrow m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -2$$

b) Para $m = -2$: $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 1}{x^2}$

☛ Verticales en $x = 0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales no hay: $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-2x^3-1}{x^2}=-\infty$
- ☛ Oblicuas $y=mx+n$:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x^3-1}{x^3}=-2$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(-2x^3-1x^2+2x\right)=0$$

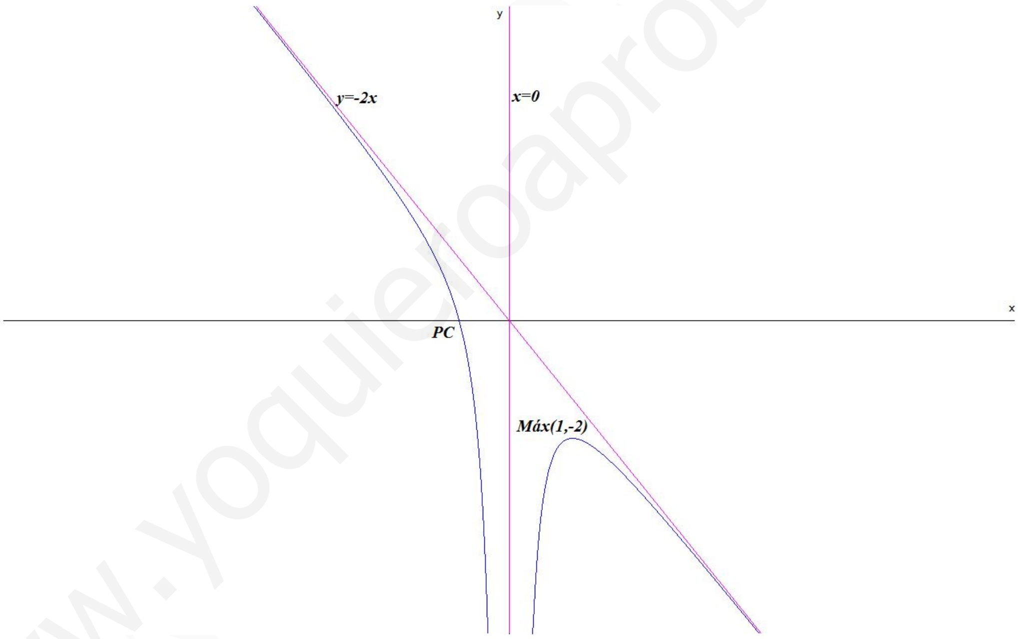
$$y=-2x$$

c) Puntos de corte con eje de ordenadas: no hay

Puntos de corte con eje de abscisas: $-2x^3-1=0\Longrightarrow x=-1/\sqrt[3]{2}\Longrightarrow(-1/\sqrt[3]{2},0)$.

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2}{x^3};\quad f''(x)=\frac{-6}{x^4};\quad f''(1)=-6<0$$

Luego hay un máximo en el punto $(1,-2)$



Opción B

Problema 3.15.8 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0)=1$ y $f'(0)=2$. Se considera la función $g(x)=2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y=g(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a) $y-b=m(x-a)$, $a=0$, $b=g(a)=g(0)=2(f(0))^2=2$ y $m=g'(a)=g'(0)=4f(0)f'(0)=8$ (ya que $g'(x)=4f(x)f'(x)$) Luego la recta tangente tiene de ecuación: $y-2=8(x-0)\Longrightarrow y=8x+2$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f'(x)}{-e^{-x}}=-2$

Problema 3.15.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{dx}{1-4x^2}=\frac{1}{4}\left(\ln|2x+1|-\ln|2x-1|\right)\Big]_1^{3/2}=-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)=-0,1$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$ $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{-1}{\ln x+\frac{x}{x}+1}=-\frac{1}{2}$

3.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.15.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}=\frac{x+4+x(x+1)}{(x+1)(x+4)}=\frac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}$$

a) $Dom(f)=R-\{-1,-4\}$ y asíntotas:

☛ Verticales:

$$x=-1:\quad \lim_{x\longrightarrow -1^-}f(x)=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow -1^+}f(x)=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$$

$$x=-4:\quad \lim_{x\longrightarrow -4^-}f(x)=\left[\frac{12}{0^+}\right]=+\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow -4^+}f(x)=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)} = 1$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{3(x^2-4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

Luego la función tiene un máximo en el punto $(-2,-2)$ y un mínimo en el punto $(2, 2/3)$.

c)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + 1 - \frac{4}{x+4}\right) dx =$$

$$= x + \ln|x+1| - 4\ln|x+4|\Big]_0^1 = 1 + 9\ln 2 - 4\ln 5 = 1 - \ln\left(\frac{625}{512}\right) \simeq 0,8$$

Opción B

Problema 3.15.11 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\, dx$$

,

donde ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

a) La función es continua si: $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

☛ $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \left(\frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{10\sin x + 2x}{4x} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{10\cos x + 2}{4} = 3$$

☛ $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (xe^x + 3) = 3$$

☛ $f(0) = a \Longrightarrow a = 3$

b) De ser derivable en $x = 0$ sólo sería para $a = 3$, para cualquier otro valor de a la función no sería continua y, por tanto, tampoco sería derivable. Para que sea derivable tiene que cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$:

☛ $$f'(0^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{\frac{5\sin(0+h)}{2(0+h)} + \frac{1}{2} - 3}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{5\sin h - 5h}{2h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{5\cos h - 5}{4h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{5\sin h}{4} = 0$$

☛ $$f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{(0+h)e^{0+h} + 3 - 3}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{he^h}{h} = 1$$

☛ Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x = 0$.

c)

$$\int (xe^x + 3)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x\,dx + 3x = 3x + e^x(x-1) + C$$

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\,dx = 3x + e^x(x-1)\Big]_1^{\ln 5} = 8(\ln 5 - 1) = 4,88$$

3.16. Año 2015

3.16.1. Modelo

Opción A

Problema 3.16.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Solución:

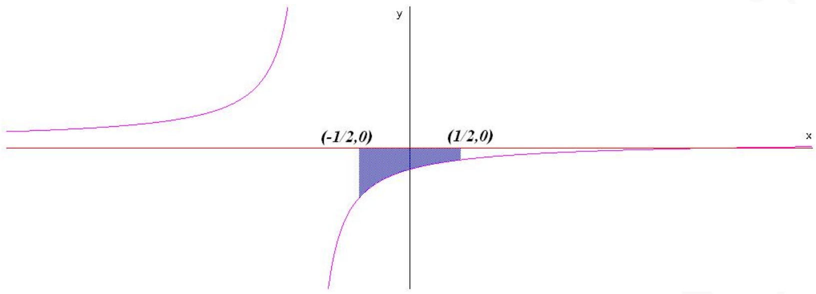
a) $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow$ La función es creciente en todo el dominio de la función $R - \{\pm 1\}$

c)

$$S_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x-3}{x+1}\,dx = x - 4\ln(x+1)\Big]_{-1/2}^{1/2} = 1 - 4\ln 3$$

$$S = |S_1| = 4\ln 3 - 1\ u^2$$



Opción B

Problema 3.16.2 *(3 puntos)* Hallar

a) (1 punto). $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\, dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} - \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1} = 1$$

b) $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = 3x+5 \Longrightarrow du = 3dx \\ dv = \cos x \Longrightarrow v = \sin x \end{array}\right] =$

$$(3x+5)\sin x - 3\int \sin x\, dx = (3x+5)\sin x + 3\cos x + C$$

c) $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$. Si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Si $x < 1 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ En $x = 1$ hay un máximo local.

3.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.16.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $x > -1$, y $x \neq \pm 2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-1, 2) \cup (2, \infty)$
Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = -2$: no hay asíntota en el intervalo $(-2, -1)$ la función no existe.
  En $x = 2$: $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
  En $x = -1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) =$ No existe y $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
- Horizontales: $y = 0$; $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} + \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.
$f(0) = 0$ y $f'(0) = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow y = \dfrac{3}{4}x$ es la recta tangente buscada.

c)

$$\int \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx = \int \frac{x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx =$$
$$= \frac{\ln|x^2-4|}{2} + \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + C$$

Opción B

Problema 3.16.4 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (xe^x + 1) = 1, \text{ y } f(0) = 1$$

La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en R.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\sin h - h}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{2} = 0$$

$$f'(0^+) = 1$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow$ la función es derivable en $R - \{0\}$

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = e^x(x-1) + x]_1^3 = 2e^3 + 2 = 42,17$

3.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.5 *(3 puntos)*

a) (2 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Solución:

a) Continua en $x = 0$: $f(0) = -1$ y $\lim_{x \longrightarrow 0^+}(ax - b) = -b \Longrightarrow b = 1$

Continua en $x = 1$: $\lim_{x \longrightarrow 1^-}(ax - b) = a - b$ y $\lim_{x \longrightarrow 1^+}(x^2 + bx + c) = 1 + b + c \Longrightarrow a - b = 1 + b + c \Longrightarrow a - 2b - c = 1$

Luego $a - 2 - c = 1 \Longrightarrow a - c = 3$

Derivable en $x = 1$: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ a & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ $f'(1^-) = a$, $f'(1^+) = 2 + b \Longrightarrow a - b = 2 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow c = 0$

b) La función g es continua en el intervalo $[1, 2]$ y también derivable en $(1, 2)$. ($g(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = 2x + 1$) Por el Teorema del Valor Medio $\exists c \in (1, 2)/g'(c) = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{6 - 2}{1} = 4$

$g'(c) = 2c + 1 = 4 \Longrightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Opción B

Problema 3.16.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, puntos de corte :$(0,0)$
Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
  $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^2e^{-x} = \infty$ No hay.
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

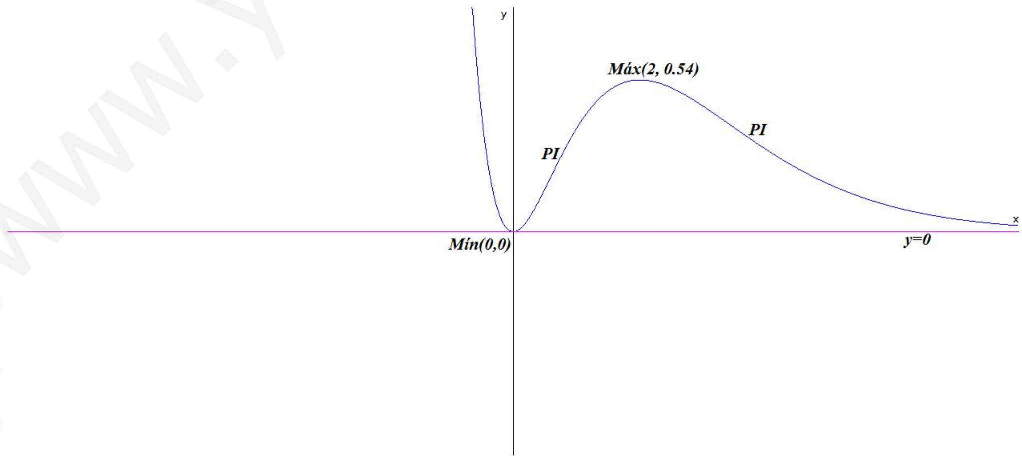
b) $f'(x) = xe^{-x}(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$:

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0,0)$ y decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$. Tiene un mínimo en el punto $(0,0)$ y un máximo en $(2,4e^{-2})$.

c) $f''(x) = e^{-x}(x^2-4x+2) = 0 \Longrightarrow x = 2\pm\sqrt{2}$ son los puntos de inflexión:

	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2},\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	cónvexa $\frown$	cóncava $\smile$



3.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.16.7 *(2 puntos)*

a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una úunica solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Solución:

a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 > 0 \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.

b) Es una función polinómica y, por tanto, continua:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene puntos de corte con el eje OX y, como esta función es creciente en R, concluimos que sólo hay un punto de corte.(Sólo hay una solución)
$f(0) = 1$ y $f(-1) = -2 \Longrightarrow$ por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene el punto de corte en el intervalo $(-1, 0)$ de longitud 1.

Problema 3.16.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx$

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty}(1-x)e^{-x}$

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx = xe^{-x}\Big]_1^4 = 4e^{-4} - e^{-1} = -0,29$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{1-x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-1}{e^x} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty}(1-x)e^{-x} = \infty$

Opción B

Problema 3.16.9 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x\ln(x)\text{si} & x > 0 \\ x^2e^x & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano y a es un núumero real) se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo R.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a)
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} x^2e^x = 0$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = a + \lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln(x) = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

La función es continua en $x = 0$ si $a = 0$.

b)
$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2xe^x + x^2e^x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
$$f'(0^-) = 0$$
$$f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{h\ln h}{h} = -\infty$$

$f'(0^-) \neq f'(0^-) \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow$ la función es derivable en $R - \{0\}$

c) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) - x\Big]_{-1}^{0} = 2 - \frac{5}{e} = 0,161$

3.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.10 *(2 puntos)* Dada $f(x)$, función derivable, con derivada continua, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se define la función $g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)}$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar $g(0)$, $g'(0)$ y $(fg)'(0)$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,5 puntos). Obtener el valor de $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Solución:
$$g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)} \Longrightarrow g'(x) = 2(f(x))f'(x) - f'(x)e^{f(x)}$$
$$y = (fg)(x) = f(g(x)) \Longrightarrow y' = (fg)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

a) $g(0) = (f(0))^2 - e^{f(0)} = 0 - e^0 = -1$; $g'(0) = 2(f(0))f'(0) - f'(0)e^{f(0)} = -1$ y $(fg)'(0) = f'(g(0))g'(0) = -f'(-1)$.

b) $y - b = m(x - a)$ donde $a = 0$, $b = f(a) = f(0) = 0$ y $m = f'(a) = f'(0) = 1 \Longrightarrow y = x$

c) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = 1$

Problema 3.16.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) (1 punto). Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0,1]$ y calcular $\displaystyle\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$.

Solución:

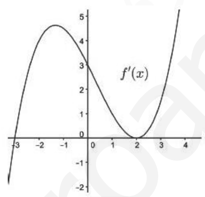
a) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = -1$

b) $x^2-4x+3 \geq 0 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, luego la función está definida en el intervalo $[0,1]$.

$$\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2-4x+3}\,dx = \left.\frac{(x^2-4x+3)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = -\sqrt{3}$$

Opción B

Problema 3.16.12 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen.



La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto). Determinar las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.

c) (1 punto). Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.

Solución:

a) Se sabe que $f(0) = 0$ (f pasa por el origen de coordenadas) y por la gráfica $m = f'(0) = 3 \Longrightarrow y = 3x$

b) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	creciente

La función presenta un mínimo en $x = -3$. En $x = 2$ no hay extremo.

c) En $x = 2$ $f''(2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ es un punto de inflexión, pero no pertenece al intervalo. En $x = -3/2$ $f''(-3/2) = 0 \Longrightarrow x = -3/2$ es un punto de inflexión, que si pertenece al intervalo.

3.17. Año 2016

3.17.1. Modelo

Opción A

Problema 3.17.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.

c) (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Solución:

a) $f'(x) = 4x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\; x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
La función es decreciente en: $(0, 4)$

b) La función tiene un mínimo en $(0,0)$ y un máximo en $(4, 32/3)$.

c) Llamamos $g(a) = f'(a) = 4a - a^2$ y tenemos que optimizar esta función: $g'(a) = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $g''(a) = -2$, es decir $g''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $a = 2$ hay un máximo. La máxima pendiente de las rectas tangentes a $f(x)$ será: $g(2) = 4$.

d) $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 6$:

$$V = \pi \int_0^6 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^7}{63} + \frac{4x^5}{5} - \frac{2x^6}{9}\right]_0^6 = \frac{10368\pi}{35}\, u^3$$

Opción B

Problema 3.17.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} |x| & \text{si} & x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} |x| & \text{si} & x<1\\ xe^{1-x} & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right. \Longrightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} -x & \text{si} & x<0\\ x & \text{si} & 0\leq x<1\\ xe^{1-x} & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ccc} -1 & \text{si} & x<0\\ 1 & \text{si} & 0\leq x<1\\ (1-x)e^{1-x} & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.$$

a) La función es continua y derivable en cualquier punto distinto de 1 ó 0, donde hacemos su estudio:

- ☛ Continuidad en $x=0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=f(0)=0 \Longrightarrow$ la función es continua. Derivabilidad en $x=0$: $f'(0^-)=-1\neq f'(0^+)=1 \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=0$.
- ☛ Continuidad en $x=1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=f(1)=1 \Longrightarrow$ la función es continua. Derivabilidad en $x=1$: $f'(1^-)=1\neq f'(1^+)=0 \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=1$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 -x\,dx+\int_0^1 x\,dx=-\frac{x^2}{2}\bigg]_{-1}^0+\frac{x^2}{2}\bigg]_0^1=1$

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 xe^{1-x}\,dx=-(x+1)e^{1-x}\Big]_1^2=2-\frac{3}{e}$

3.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.17.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si} & x<0\\ xe^{-x} & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y=f(x)$, en $x=2$.

c) (1,5 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) La función es continua en cualquier punto distinto de 0, donde hacemos su estudio: Continuidad en $x=0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=f(0)=0 \Longrightarrow$ la función es continua en R.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{\frac{-1}{1-x}}{-1}=0$$

b) $f(x) = xe^{-x} \Longrightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$$b = f(2) = 2e^{-2};\;\; m = f'(2) = -e^{-2} \Longrightarrow y - 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2)$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{1-x} + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx = -\left.\frac{(\ln(1-x))^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left. e^{-x}(x+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 - 2e^{-1} = 0,5$

Opción B

Problema 3.17.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5;\quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\;\; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\;\; f''(x) = 6ax + 2b,\;\; f'''(x) = 6a$

$$\left\{\begin{array}{l} f'''(x) = 12 \Longrightarrow 6a = 12 \Longrightarrow a = 2 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow a + b + c + d = 3 \\ f'(1) = 1 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 1 \\ f''(1) = 4 \Longrightarrow 6a + 2b = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

La función polinómica buscada es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

b) $g(x) = ax^2 + bx + c,\;\; g'(x) = 2ax + b,\;\; g''(x) = 2a$

$$g''(x) = 2a \Longrightarrow 2a = 6 \Longrightarrow a = 3$$

$$\int_0^1 (3x^2 + bx + c)\,dx = \left. x^3 + \frac{2bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = \frac{b + 2c + 2}{2} = 5 \Longrightarrow b + 2c = 8$$

$$\int_0^2 (3x^2 + bx + c)\,dx = \left. x^3 + \frac{2bx^2}{2} + cx\right]_0^2 = 2b + 2c + 8 = 14 \Longrightarrow b + c = 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} b + 2c = 8 \\ b + c = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2 \\ c = 5 \end{array}\right.$$

La función polinómica buscada es $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Problema 3.17.5 *(2 puntos)* Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x\ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x\ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ -x\ln x & \text{si} & 0 < x \le 1 \\ x\ln x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ -\ln x - 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \ln x + 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (-x \ln x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{\ln x}{1/x}\right) = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{1/x}{-1/x^2}\right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en $x = 0$ Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (-x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x \ln x) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en $x = 1$
Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = +\infty$ y, por tanto no es derivable.
Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = +1$ y, por tanto no es derivable.
Conclusión: La función f es continua en R y derivable en $R - \{0, 1\}$.

3.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.17.6 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?
Solución:
x :precio de la papeleta.
$f(x) = x(5000 - (x - 2)500) = -500x^2 + 6000x$
$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \Longrightarrow x = 6$
$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f(6) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 6$ euros es un máximo que produciría un importe de $f(6) = 18000$ euros, si restamos el precio del ordenador tendríamos que se dona a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Problema 3.17.7 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

b) (0,5 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)g(x)$.

Solución:

a) $2+x-x^2=\dfrac{2}{x+1} \Longrightarrow x=0$ y $x=\pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ el recinto de integración es entre 0 y $\sqrt{3}$ por ser en el primer cuadrante.

$$S_1=\int_0^{\sqrt{3}}\left(2+x-x^2-\frac{2}{x+1}\right)dx=2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-2\ln|x+1|\Big]_0^{\sqrt{3}}=$$

$$\frac{3}{2}+\sqrt{3}-2\ln|\sqrt{3}+1|=1,22\,u^2$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x)g(x)=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{4+2x-2x^2}{x+1}=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{(x+1)(-2x+4)}{x+1}=6$$

Opción B

Problema 3.17.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{2x-4}+2x-1 & \text{si} \quad x\neq 2\\ 0 & \text{si} \quad x=2\end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y=f(x)$.

b) (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y=f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a) ☛ Verticales: $x=2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=+\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)=\infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx+n \Longrightarrow y=2x-1$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=2=\infty$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=-1$$

b) $f'(x)=-\dfrac{9}{2(x-2)^2}+2$ si $x\neq 2$, $f'(x)=0 \Longrightarrow x=\dfrac{7}{2},\ x=\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty,1/2)$	$(1/2,7/2)$	$(7/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función tiene un Máximo en el punto $(1/2,-3)$ y un Mínimo en el punto $(7/2,9)$.
$f''(x)=\dfrac{9}{(x-2)^3}\neq 0 \Longrightarrow$ no ha puntos de inflexión.

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

Luego f es cóncava en el intervalo $(2,\infty)$ y convexa en $(-\infty,2)$.

c)
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{2x-4}+2x-1\right)dx=\frac{9}{2}\ln|x-2|+x^2-x\Big]_{-1}^{1}=-\frac{9\ln 3}{2}-2=-6,94$$

3.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.17.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=(6-x)e^{x/3}$, se pide:

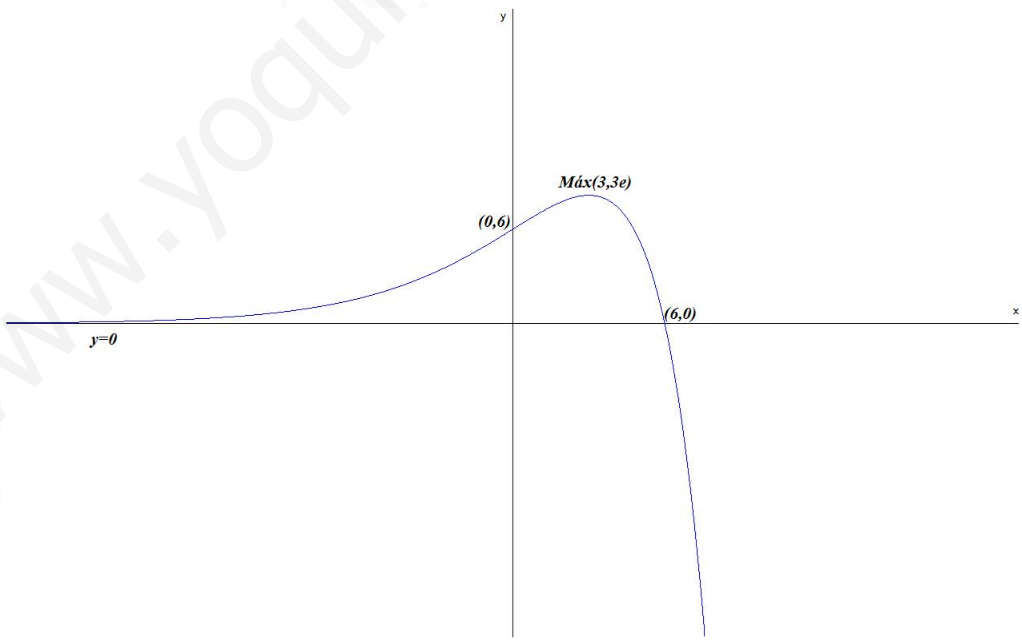
a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $x=0$.

Solución:

a) $Dom(f)=R$, y los puntos de corte serán $(6,0)$ y $(0,6)$. Asíntotas verticales no hay, estudiamos las horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(6-x)e^{x/3}=-\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}(6-x)e^{x/3}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}(6+x)e^{-x/3}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6+x}{e^{x/3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{1/3e^{x/3}}=\frac{1}{\infty}=0$$
Luego, cuando $x\longrightarrow-\infty$ tenemos la asíntota horizontal $y=0$.
Como hay horizontales no hay oblicuas.



b) $f'(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) e^{x/3} = 0 \Longrightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, \infty)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(3, 3e)$.

c) $a = 0 \Longrightarrow b = f(a) = f(0) = 6$ y $m = f'(a) = f'(0) = 1$. La recta tangente a la función es $y - 6 = x \Longrightarrow y = x + 6$. Esta recta corta a los ejes coordenados en los puntos $(-6, 0)$ y $(0, 6)$ que con el eje OY forma un triángulo de base 6 u y altura 6 $u \Longrightarrow S = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18\ u^2$.
Otra forma:

$$S = \int_{-6}^{0} (x + 6)\, dx = \left.\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-6}^{0} = 18\ u^2$$

Opción B

Problema 3.17.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Solución:

a) Continuidad: Las ramas son continuas para cualquier valor, estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{5 - x} = \dfrac{1}{5} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{5 + x} = \dfrac{1}{5} \\ f(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Luego la función es continua en R.
Asíntotas verticales no tiene y las horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{5 - x} = 0; \text{ y } \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{5 + x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Oblicuas no hay al tener horizontales.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0^-) = \frac{1}{25} \neq f'(0^+) = -\frac{1}{25}$$

luego la función es derivable en $R - \{0\}$.

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx =$$

$$-\ln|5-x|]_{-1}^{0} + \ln|5+x|]_{0}^{1} = 2\ln\left(\frac{6}{5}\right) = 0,365$$

3.18. Año 2017

3.18.1. Modelo

Opción A

Problema 3.18.1 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Solución:
Sea x el aumento en euros de las papeletas:

$$f(x) = (2+x)(5000-500x) - 600 = -500x^2 + 4000x + 9400$$

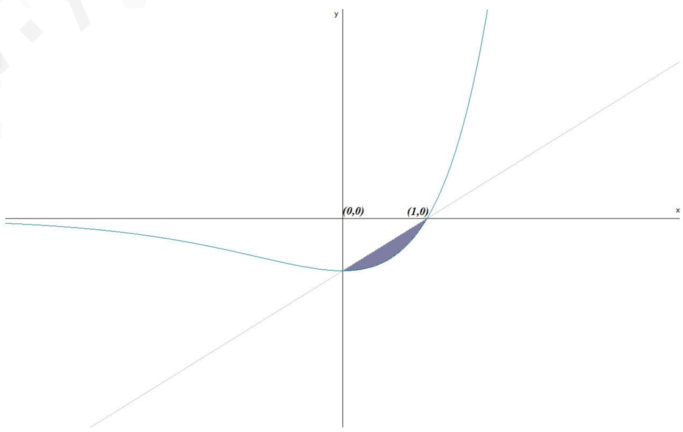
$$f'(x) = -1000x + 4000 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

$$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f''(4) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ máximo}$$

Hay que aumentar el precio en 4 euros (hay que vender a 6 euros) y el beneficio sería $f(4) = 17400$ euros.

Problema 3.18.2 *(2 puntos)* Calcular el área comprendida entre las curva $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x-1$.

Solución:



$f(x) = g(x) \Longrightarrow (x-1)e^x = x-1 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$.

$$F(x) = \int ((x-1)e^x - x + 1)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x-1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array} \right] =$$

$$-\frac{x^2}{2} + x + (x-1)e^x - \int e^x\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + (x-2)e^x$$

$$S_1 = \int_0^1 ((x-1)e^x - x + 1)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{5-2e}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{2e-5}{2} \simeq 0,218\ u^2$$

Opción B

Problema 3.18.3 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

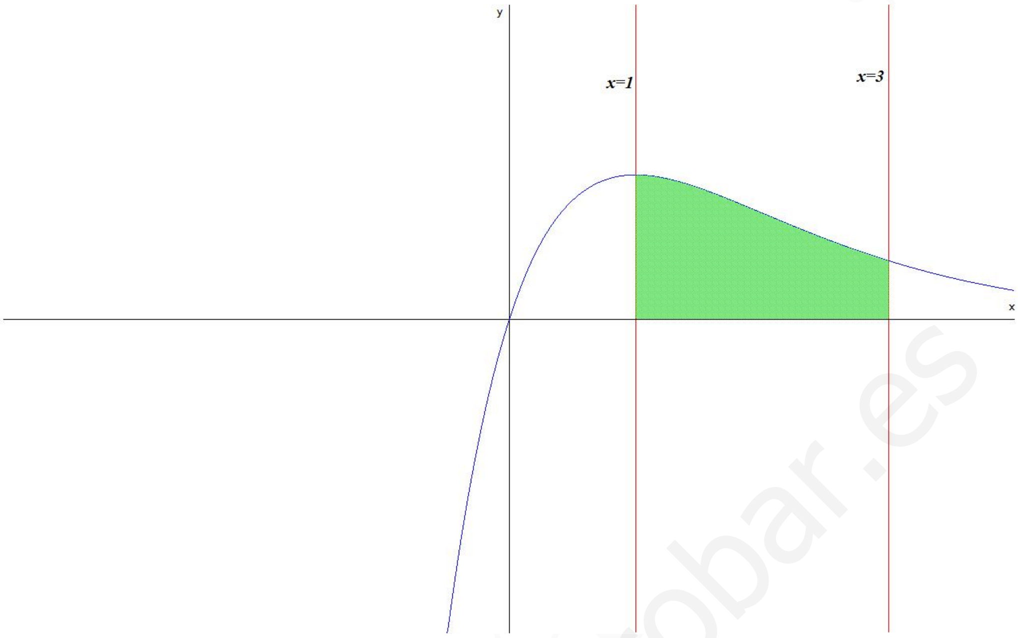
Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, Asíntotas:

- Verticales: No hay.
- Horizontales: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $f''(x) = e^{-x}(x-2) \Longrightarrow f''(1) = -e^{-1} < 0 \Longrightarrow$ en $x = 1$ la función presenta un máximo.

c) La función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[1, 3]$ y, por tanto, los límites de integración son 1 y 3.



$$F(x) = \int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] =$$

$$-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

$$S_1 = \int_1^3 xe^{-x}\,dx = F(3) - F(1) = -\frac{4}{e^3} + \frac{2}{e} = 0,54$$

$$S = |S_1| = \frac{2e^2 - 4}{e^3}\ u^2 \simeq 0054\ u^2$$

3.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.18.4 *(2 puntos)* Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución:
$c'(t) = e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \Longrightarrow t = 2$:

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$c'(t)$	$+$	$-$
$c(t)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$.

La función es decreciente en el intervalo $(2, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(2, 2/e) = (2, 0, 736)$. El paciente no llega a estar en riesgo, ya que en el máximo la concentración está por debajo de 1 mg/ml.

Problema 3.18.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\, dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, la única asíntota vertical es $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + x + 6}{x^2 - 2x} = 1$

c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}\, dx = \int_3^5 \left(x + 3 + \frac{12}{x - 2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 12 \ln|x - 2|\Big]_3^5 = 14 + 12 \ln 3 \simeq 27, 18$

Opción B

Problema 3.18.6 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(f(x) - \dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{\sin x}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2 \sin x - 2x}{x \sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2 \cos x - 2}{\sin x + x \cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{-2 \sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -8$ luego la ecuación de la recta en su forma punto pendiente es: $y - 4 = -8\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

c) $\dfrac{2}{x} = -x+3 \Longrightarrow x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=1,\ \ x=2$:

$$S_1=\int_1^2\left(\frac{2}{x}+x-3\right)\,dx = 2\ln x+\frac{x^2}{2}-3x\Big]_1^2=-\frac{3}{2}+2\ln 2\simeq -0,114$$

$$S=|S_1|=\frac{3}{2}-2\ln 2\simeq 0,114\ u^2$$

3.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.7 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-4}$, definidas para $x\in(-2,4)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el valor o valores de x para los que $f'(x)=g'(x)$.

b) (1 punto) Hallar el punto x del intervalo $(-2,4)$ en el que la diferencia $f(x)-g(x)$ es mínima y determinar el valor de esta diferencia mínima.

c) (0,5 puntos) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}(f(x)-g(x))$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-}(f(x)-g(x))$.

d) (1 punto) Hallar $F(x)$, primitiva de la función $f(x)-g(x)$, que cumple la condición $F(2)=2+\ln 2$.

Solución:

a) $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-4)^2}\Longrightarrow -\dfrac{1}{(x+2)^2}=-\dfrac{1}{(x-4)^2}\Longrightarrow$

$$(x-4)^2=(x+2)^2\Longrightarrow 12x-12=0\Longrightarrow x=1$$

b) $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-4}\Longrightarrow$

$$h'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x-4)^2}\Longrightarrow 12x-12=0\Longrightarrow x=1$$

	$(-2,1)$	$(1,4)$
$h'(t)$	$-$	$+$
$h(t)$	decreciente	creciente

Como la función decrece en el intervalo $(-2,1)$ y crece en el $(1,4)$, en $x=1$ habrá un mínimo.

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}\dfrac{-6}{(x+2)(x-4)}=\left[\dfrac{-6}{0^-}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-}\dfrac{-6}{(x+2)(x-4)}=\left[\dfrac{-6}{0^-}\right]=+\infty$

d) $F(x)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-4}\right)\,dx=\ln|x+2|-\ln|x-4|+C$

$$F(2)=\ln 4-\ln 2+C=2\ln 2-\ln 2+C=\ln 2+C=2+\ln 2\Longrightarrow C=2$$

Luego $F(x)=\ln\left|\dfrac{x+2}{x-4}\right|+2$

Opción B

Problema 3.18.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin^2 x-5\sin x\cos x}{3\sin^2 x\cos x+2\sin x};\quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}).$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes integrales:

$$\int (3u+1)\cos(2u)\,du;\quad \int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx.$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin^2 x-5\sin x\cos x}{3\sin^2 x\cos x+2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x(4\sin x-5\cos x)}{\sin x(3\sin x\cos x+2)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin x-5\cos x}{3\sin x\cos x+2}=-\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7})=[\infty-\infty]=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7})(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{-x-7}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{-x}{(\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{x})}=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{-\sqrt{x}}{1+\sqrt{2}}=-\infty$$

b)

$$\int (3u+1)\cos(2u)\,du=\left[\begin{array}{c} w=3u+1\Longrightarrow dw=3du\\ dv=\cos 2u\,du\Longrightarrow v=\frac{1}{2}\sin u\end{array}\right]=$$

$$\frac{(3u+1)\sin 2u}{2}-\frac{3}{2}\int \sin 2u\,du=$$

$$\frac{(3u+1)\sin 2u}{2}+\frac{3\cos 2u}{4}+C=\frac{2(3u+1)\sin 2u+3\cos 2u}{4}+C$$

$$\int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx.=\frac{7}{4}\ln|4x+1|\Big]_2^5=\frac{7}{4}\ln\frac{7}{3}$$

3.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.18.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} xe^{2x} & \text{si} & x<0\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$ donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} xe^{2x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ y $f(0) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

; $f'(0^-) = 1$ y $f'(0^+) = 1 \Longrightarrow f$ es derivable en $x = 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{t\longrightarrow \infty} -te^{-2t} = \lim_{t\longrightarrow \infty} \frac{-t}{e^{2t}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{t\longrightarrow \infty} \frac{-1}{2e^{2t}} = 0$

c)

$$\int xe^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{4e^2} = -0,148$$

Opción B

Problema 3.18.10 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

a) $b = f(0) = 1$ y $m = f'(0) = -1 \Longrightarrow y = -x + 1$

b) ☛ Verticales: No hay, el denominador $f(x)$ no se anula.

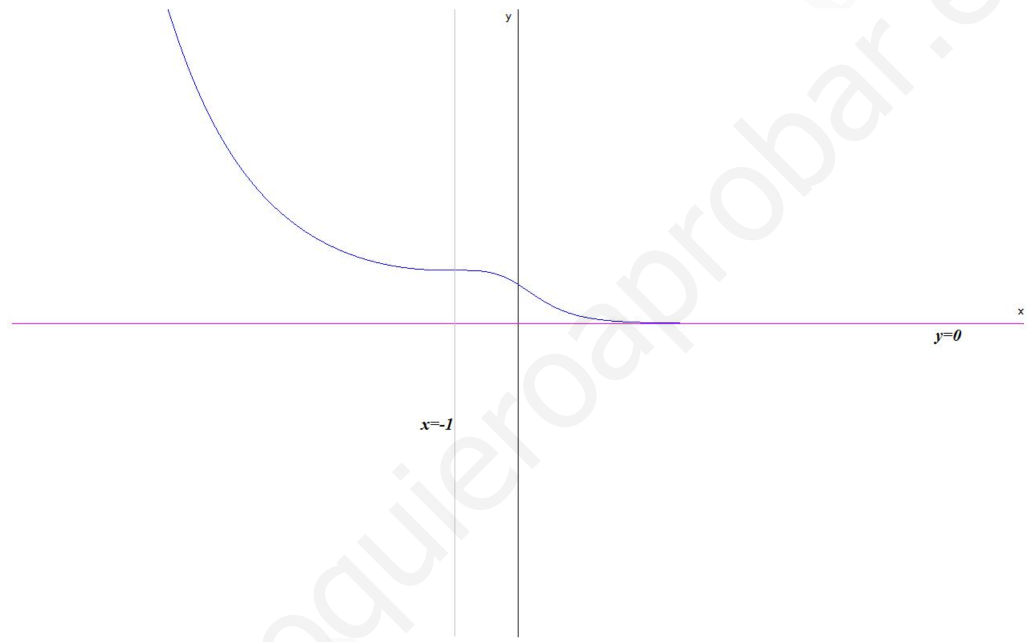
☛ Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{e^{t}}{t^2+1} = \infty$$

Luego no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$ pero si la hay cuando $x \longrightarrow +\infty$ y es $y = 0$.

c) $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$, en este punto la función pasa de decrecer a decrecer y en el resto de puntos la función es siempre decreciente ($f'(x) < 0$ en $\mathbb{R} - \{-1\}$), luego no tiene extremos relativos.



3.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Obtener la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = -\pi$

c) (1 punto) Calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} (xe^x + 2) = 2$ y $f(0) = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$.

b) Si $x = -\pi$ tenemos: $f(-\pi) = 0$, en esa rama $f'(x) = \dfrac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2} \Longrightarrow m = f'(-\pi) = -\dfrac{2}{\pi}$. Luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -\frac{2}{\pi}(x + \pi)$$

c) En el intervalo $[1, 2]$ es $f(x) = xe^x + 2$:

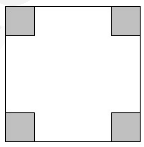
$$F(x) = \int (xe^x + 2)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right] = xe^x + 2x - \int e^x\,dx =$$

$$xe^x + 2x - e^x = e^x(x - 1) + 2x$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = e^2 + 2 = 9,389$$

Opción B

Problema 3.18.12 *(2 puntos)* Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



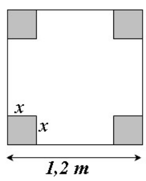
Solución:

$$V(x) = (1,2 - 2x)^2 x = (1,44 + 4x^2 - 4,8x)x = 4x^3 - 4,8x^2 + 1,44x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 9,6x + 1,44 = 0 \Longrightarrow x = 0,2, \;\; x = 0,6$$

$$V''(x) = 24x - 9,6 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} V''(0,2) = -4,8 < 0 \Longrightarrow x = 0,2 \text{ máximo} \\ V''(0,6) = 4,8 > 0 \Longrightarrow x = 0,6 \text{ mínimo} \end{array}\right.$$

El volumen máximo sería $V(0,2) = 0,128$



Problema 3.18.13 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, calcúlese el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = 1 - x$.

Solución:

$$\frac{1-x^2}{x^2+1} = 1 - x \Longrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\; x = 1$$

$$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{x^2+1} - 1 + x\right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi-3}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|\frac{\pi-3}{2}\right| = \frac{\pi-3}{2}\; u^2$$

3.19. Año 2018

3.19.1. Modelo

Opción A

Problema 3.19.1 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos(x) + |x-1|$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

c) (1 punto) Hallar el área del recinto plano limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

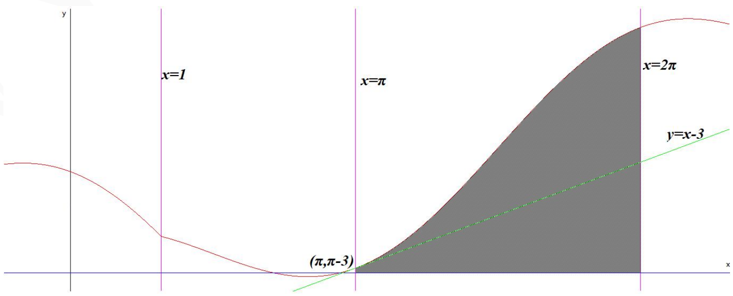
Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} 2\cos x - x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2\cos x + x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -2\sin x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2\sin x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ luego $f'(0) = -1$.

b) La ecuación punto pendiente de la recta es $y - b = m(x-a)$ donde $b = f(a) = f(\pi) = 2\cos\pi + \pi - 1 = \pi - 3$ y $m = f'(\pi) = -2\sin\pi + 1 = 1$, la recta será: $y - (\pi - 3) = x - \pi \Longrightarrow y = x - 3$.

c) La función $f(x) = 2\cos x + x - 1 > 0$ no corta al eje de abscisas en $[\pi, 2\pi]$:

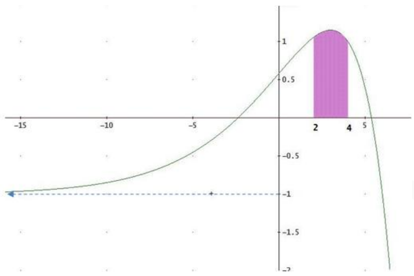
$$\int_\pi^{2\pi} (2\cos x + x - 1)\, dx = 2\sin x + \frac{x^2}{2} - x\Big]_\pi^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} - \pi\; u^2$$



Opción B

Problema 3.19.2 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función

$$f(x) = (6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$$



se pide:

a) (1 punto) Calcular el área de la región sombreada.

b) (1 punto) Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.

c) (0,5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).

Solución:

a)

$$F(x) = \int ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1)\,dx = \begin{bmatrix} u = (6-x) \Longrightarrow du = -dx \\ dv = e^{\frac{x-4}{3}}dx \Longrightarrow v = 3e^{\frac{x-4}{3}} \end{bmatrix} =$$

$$3(6-x)e^{\frac{x-4}{3}} + 3\int e^{\frac{x-4}{3}}\,dx - x = 3(6-x)e^{\frac{x-4}{3}} + 9e^{\frac{x-4}{3}} - x = (27-3x)e^{\frac{x-4}{3}} - x$$

$$S = \int_2^4 ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1)\,dx = F(4) - F(2) = 13 - \frac{21}{e^{2/3}} = 2,218\ u^2$$

b) $g(x) = f'(x) = \left(\frac{3-x}{3}\right)e^{\frac{x-4}{3}} \Longrightarrow g'(x) = -\frac{xe^{\frac{x-4}{3}}}{9} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$
$g(x)$	creciente	decreciente

Luego en $x = 0$ habrá un máximo punto en el que la pendiente a $f(x)$ es máxima..

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1) = -1 + \lim\limits_{t\longrightarrow \infty}(6+t)e^{-\frac{t+4}{3}} = -1 + \lim\limits_{t\longrightarrow \infty}\frac{6+t}{e^{\frac{t+4}{3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1 +$ $\lim\limits_{t\longrightarrow \infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{t+4}{3}}} = -1 + 0 \Longrightarrow y = -1$

3.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.19.3 *(2,5 puntos)*

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0,92$; $m_2 = 0,94$; $m_3 = 0,89$; $m_4 = 0,90$; $m_5 = 0,91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x-m_1)^2 + (x-m_2)^2 + \cdots + (x-m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Solución:

a) $E'(x) = 2[5x - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)] = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{5} = \dfrac{4,56}{5} = 0,912$, es decir, se trata de la media de resultados. Sólo queda por comprobar que se trata de un mínimo:
$E''(x) = 10 \Longrightarrow E''(0,912) = 10 > 0 \Longrightarrow x = 0,912$ es un mínimo.
Éste valor correspondería a un error de $E(0,912) = 0,00148$.

b)

$$F(x) = \int x^2 \ln(x)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \Longrightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{9}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx = F(2) - F(1) = \frac{24\ln 2 - 7}{9} \simeq 1,07\ u^2$$

Opción B

Problema 3.19.4 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $f'(4)$.

c) (1,25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x<0 \\ \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \end{cases} \Longrightarrow y=1.$

b) $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x<0 \\ \\ \dfrac{9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(4)=\dfrac{9}{125}=0,072.$

c) La función corta al eje OX en $x=0$ por lo que tendremos dos recintos de integración uno para cada una de las ramas: $S_1:[-1,0]$ y $S_2:[0,1]$.

$$F(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\left[\begin{array}{c} x^2+9=t \\ 2xdx=dt \end{array}\right]=\int t^{-1/2}\,dt=t^{1/2}=\sqrt{x^2+9}$$

$$S_1=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=-\sqrt{x^2+9}\big]_{-1}^{0}=\sqrt{10}-3\simeq 0,162$$

$$S_2=\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\sqrt{x^2+9}\big]_{0}^{1}=\sqrt{10}-3\simeq 0,162$$

$$S=|S_1|+|S_2|=2\sqrt{10}-6\simeq 0,325$$

3.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.19.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x)=3x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$.

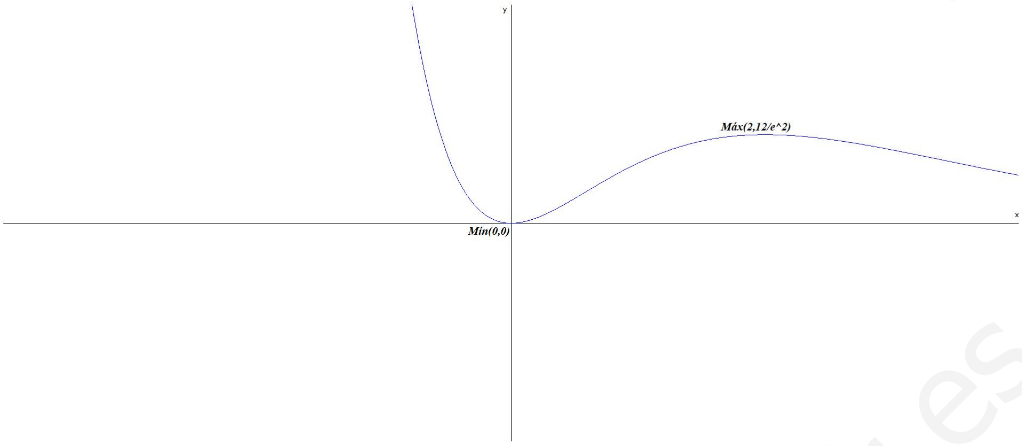
c) (0,75 puntos) Calcular los límites: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) $f'(x)=3xe^{-x}(2-x)=0\Longrightarrow x=0$ y $x=2$.

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ y creciente en $(0,2)$. Tiene un mínimo en el punto $(0,0)$ y un máximo en el $(2,12/e^2)$.



b) $F(x) = \int \frac{f(x)}{x}\,dx = \int 3xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x \Longrightarrow du = 3dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -3xe^{-x} + 3\int e^{-x}\,dx =$ $-3xe^{-x} - 3e^{-x} = -3e^{-x}(x+1)$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx = F(1) - F(0) = \frac{-6+3e}{e} \simeq 0,793$$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}(3x^2e^{-x}) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(3t^2e^t) = \infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}(3x^2e^{-x}) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3x^2}{e^x} = 0$

Opción B

Problema 3.19.6 *(2,5 puntos)* Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

a) (0,25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso $x = 0$ (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).

b) (0,5 puntos) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene $(12+x)$ ml de mezcla.

c) (0,5 puntos) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.

d) (1,25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.

Solución:

a) para $x = 0$ el precio sería: $12 \cdot 48 = 576$ euros.

b) $f(x) = (12+x)(48-3x) = -3x^2 + 12x + 576$.

c) $f(x) = (12+x)(48-3x) = 0 \Longrightarrow x = -12$ (no válida) y $x = 16$ mililitros.

d) $f'(x) = -6x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$ por la segunda derivada $f''(x) = -6 \Longrightarrow f''(2) = -6 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo y el valor de la función en este punto es $f(2) = 14 \cdot 42 = 588$ euros.

3.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.19.7 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si} \quad x \le 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (8e^{2x-4}) = 8$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^3-4x}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2-4}{1} = 8$

$f(2) = 8 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 2$.

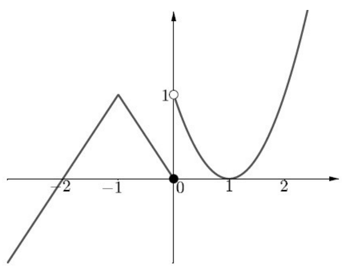
b) Si $x \le 2$ la función no tiene asíntotas verticales, tendría una horizontal en $y = 0$: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (8e^{2x-4}) = 0$ y, por tanto, en esa rama no habría oblicuas.

Si $x > 2$ la función no tiene asíntotas verticales, la única posible sería en $x = 2$ pero no está en la rama. Horizontales tampoco habría $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = \infty$ y tampoco habría oblicuas en esa rama $\displaystyle m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-2x} = \infty$

c) $\displaystyle\int_0^2 8e^{2x-4}\,dx = 4e^{2x-4}\Big]_0^2 = 4 - \frac{4}{e^4} \simeq 3,927$

Opción B

Problema 3.19.8 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) (0,5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.

b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

c) (0,5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

d) (0,5 puntos) Determinar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) $f(-1) = 1$ y $f'(1) = 0$.

b) En $x = -1$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = 1$ y $f(-1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = -1$.
En $x = 0$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow f$ discontinua no evitable en $x = 0$, presenta un salto.

c) En $x = 0$ la función no es continua y, por tanto, no es derivable. En $x = -1$ la función es continua pero hace un pico en el que se podrían trazar infinitas rectas tangentes, luego no es derivable en $x = -1$.

d) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \frac{2\cdot 1}{2} = 1\ u^2$.

3.20. Año 2019

3.20.1. Modelo

Opción A

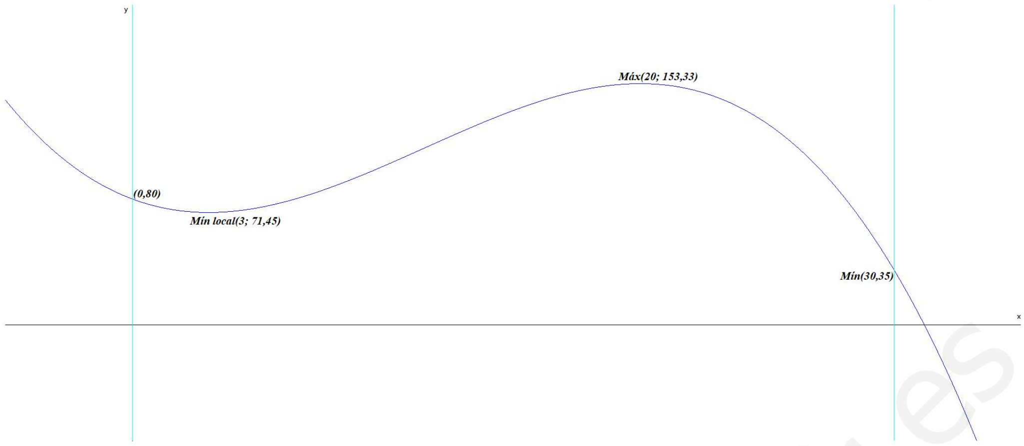
Problema 3.20.1 *(2,5 puntos)* La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \dfrac{23t^2}{20} - \dfrac{t^3}{30}\ mg/m^3$ donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, **expresado en días**, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) (0,5 puntos) ¿Qué nivel de NO_2, había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) (1,25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) (0,75 puntos) Calcule, mediante $\dfrac{1}{30}\displaystyle\int_{0}^{30} c(t)dt$, el nivel promedio del mes.

Solución:



a) $c(9,5) = 98,21\, mg/m^3$

b) $c(0) = 80$, $c(30) = 35$ y $c'(t) = -\dfrac{t^2}{10} + \dfrac{23t}{10} - 6 = 0 \Longrightarrow t = 3,\ \ t = 20$

	$(0,3)$	$(3,20)$	$(20,30)$
$c'(x)$	$-$	$+$	$-$
$c(x)$	decreciente	creciente	decreciente

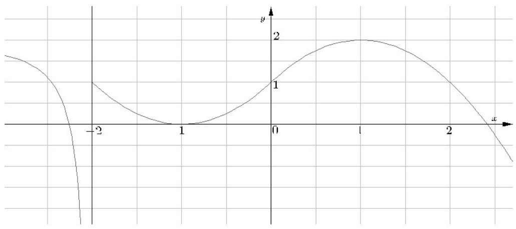
Luego el máximo se da el día 20 con $c(20) = 153,33\ mg/m^3$.

c) $\overline{X} = \dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)dt = \dfrac{1}{30}\left(80t - 3t^2 + \dfrac{23t^3}{60} - \dfrac{t^4}{120}\right)\Big]_0^{30} = \dfrac{3300}{30} = 110$

Opción B

Problema 3.20.2 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) A partir de la siguiente gráfica de la función f, determine los valores de: $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.



b) (1,5 puntos) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx$, donde $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad -3 \le x \le 0 \\ 1 + \sin x & \text{si} \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$

Solución:

a) En $x = -1$ hay un extremo luego $f'(-1) = 0$, Por otra parte:
$\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = 1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$

b) La función es continua en $x = 0$, los límites laterales coinciden y con el valor de la función en ese punto. Ahora resolvemos la integral:

$$\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (x^2 + 2x + 1)\,dx + \int_{0}^{\pi} (1 + \sin x)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-3}^{0} + x - \cos x]_0^{\pi} = 5 + \pi.$$

3.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.20.3 *(2,5 puntos)* Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

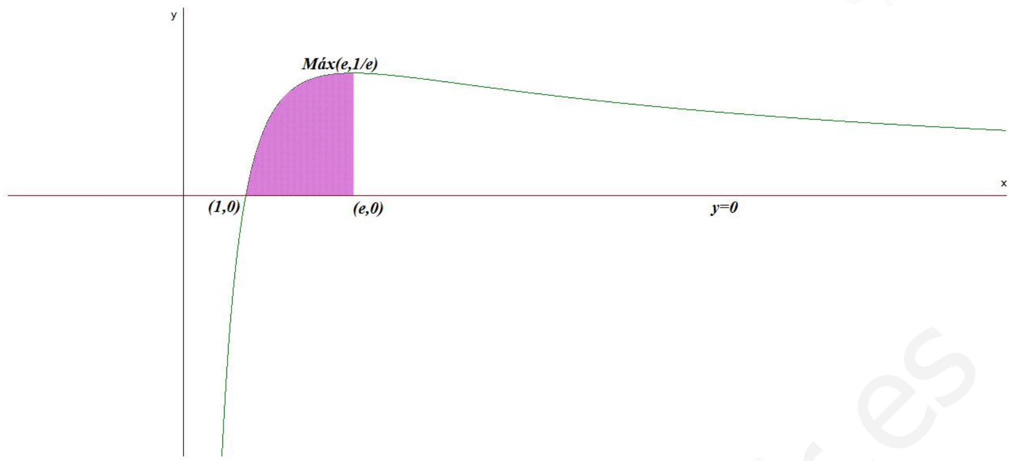
a) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Longrightarrow y = 0$ por la derecha.

b) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Longrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longrightarrow x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en el intervalo $(e, +\infty)$. Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e, 1/e)$.

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ luego el intervalo de integración sería el $[1, e]$.



Aunque se trata de una integral inmediata dejo la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x} dx \Longrightarrow v = \ln x \end{array} \right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\, dx \Longrightarrow$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

De otra forma:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{x}\, x dt = \int t dt \Longrightarrow \frac{t^2}{2}\, dx =$$

$$\frac{(\ln x)^2}{2} + C \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Longrightarrow S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\; u^2$$

Opción B

Problema 3.20.4 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1,5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,5 puntos) Calcular los límites laterales. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

Solución:

a) $4x^2 - x^4 = x^2(2-x)(2+x) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2$ y $x = -2$.

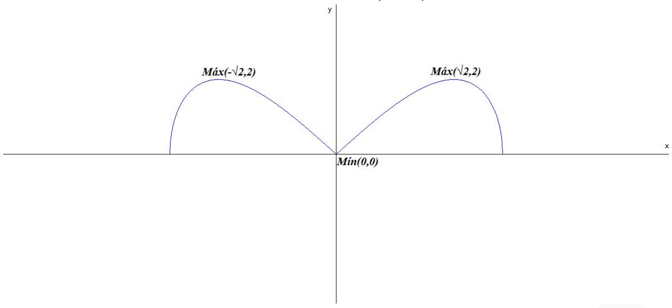
$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$+$	$-$

$\text{Dom}(f) = [-2, 2]$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x^2)}{\sqrt{4x^2-x^4}} = 0 \Longrightarrow x(2-x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$

	$(-2,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},2)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f decrece en el intevalo $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},2)$ y crece en el intervalo $(-2,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$. Tendría un mínimo en el punto $(0,0)$ y dos máximos en los puntos $(-\sqrt{2},2)$ y $(\sqrt{2},2)$.



c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = [t=-x] =$

$\displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{t\sqrt{4-t^2}}{-t} = \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{\sqrt{4-t^2}}{-1} = -2$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x} =$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{4-x^2} = 2$

3.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Determinar, si existe, $f'(1)$.

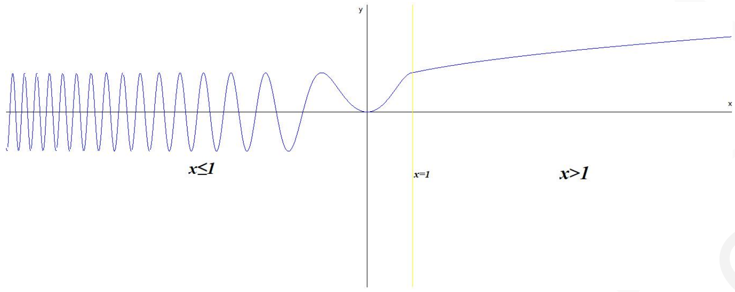
c) (1 punto) Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} 2\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2$$

Y como $f(1)=2$ concluimos que f es continua en $x=1$.



b) Lo hacemos aplicando la definición de derivada:

- Si $x\longrightarrow 1^-$ tenemos que $h\longrightarrow 0^-$ luego $f(1)=2$ y $f(1+h)=2\sin\left(\dfrac{\pi(1+h)^2}{2}\right)$:

$$f'(1^-)=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{2\sin\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)-2}{h}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{2\pi(1+h)\cos\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)}{1}=0$$

- Si $x\longrightarrow 1^+$ tenemos que $h\longrightarrow 0^+$ luego $f(1)=2$ y $f(1+h)=\dfrac{h}{\sqrt{1+h}-1}$:

$$f'(1^+)=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{\frac{h}{\sqrt{1+h}-1}-2}{h}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{h-2\sqrt{h+1}+2}{h(\sqrt{h+1}-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1-\frac{2}{2\sqrt{h+1}}}{\sqrt{h+1}-1+\frac{h}{2\sqrt{h+1}}}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{2\sqrt{h+1}-2}{2(h+1)-2\sqrt{h+1}+h}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{h+1}}}{2-\frac{1}{\sqrt{h+1}}+1}=\frac{1}{2}$$

- Como $f'(1^-)\neq f'(1^+)\Longrightarrow \nexists f'(1)$

c) $\displaystyle\int_0^1 2x\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\,dx=-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}$

Opción B

Problema 3.20.6 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Determinar las asíntotas de la curva $y=f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y la recta $2x + 4y = 7$.

Solución:

a) Asíntotas:

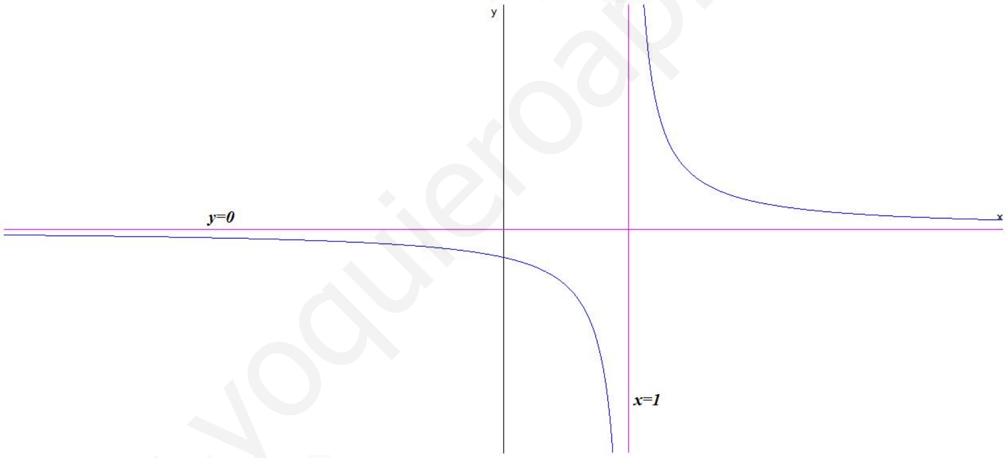
- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{1}{2(x-1)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{2(x-1)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$ ya que $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{1}{2(x-1)} = 0$

- Oblicuas: no hay por haber horizontales.

$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} < 0 \Longrightarrow$ la función f es siempre decreciente en todo el dominio de la función $\mathbb{R} - \{1\}$.

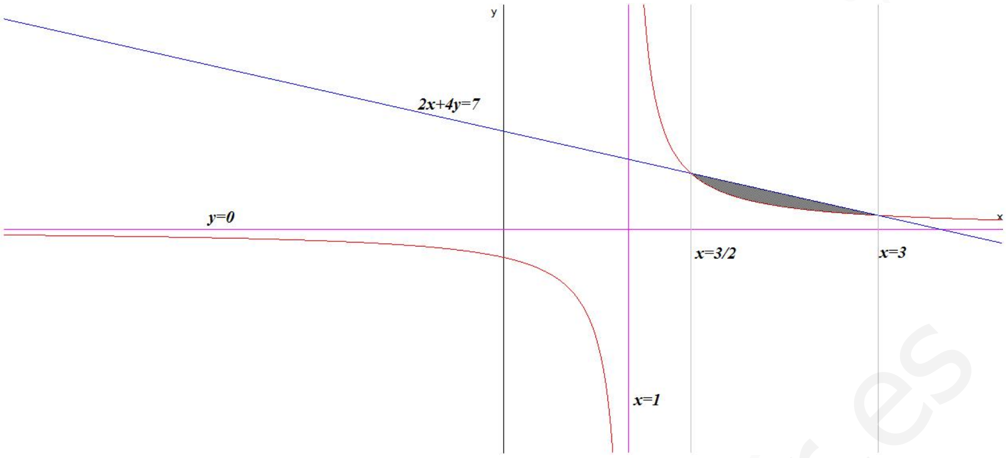


b) $2x + 4y = 7 \Longrightarrow y = \dfrac{7-2x}{4}$ los puntos de corte de las dos curvas vendrá dado por:

$$\frac{7-2x}{4} = \frac{1}{2(x-1)} \Longrightarrow x = \frac{3}{2}, \;\; x = 3$$

$$S = \int_{3/2}^{3} \left(\frac{7-2x}{4} - \frac{1}{2(x-1)}\right) dx = \frac{7x - x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln|x-1|\bigg]_{3/2}^{3} =$$

$$\frac{15}{16} - \ln 2 \simeq 0,244 \;\; u^2$$



3.20.4. Ordinaria-Valencia

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

Opción A

Problema 3.20.7 Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función $g(x) = f(x) + ax$.

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$ e $\int xe^{-x}\,dx$

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$, $f(0) = 0$ y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- ☛ Asíntotas verticales no hay, el denominador nunca se anula, horizontales en $y = 0$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$ y oblicuas no hay al haber horizontales.

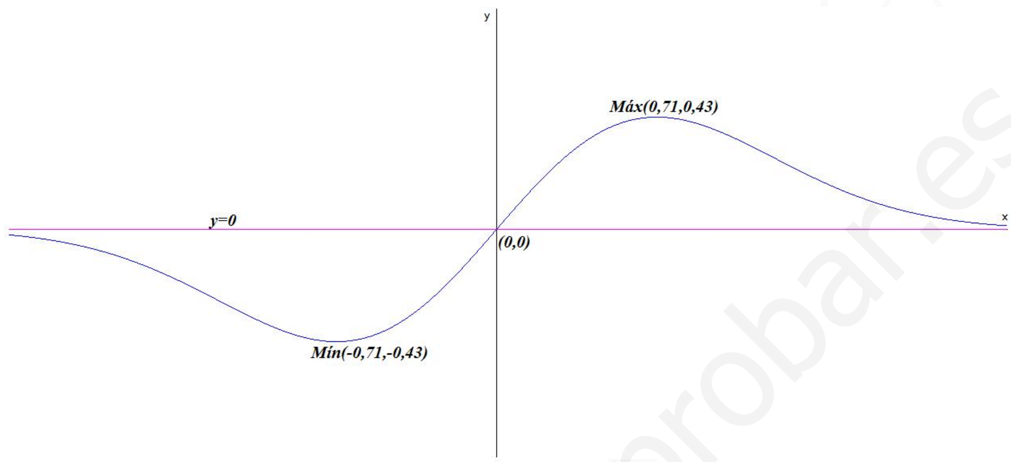
- ☛ $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-0,71, -0,43)$ y un máximo relativo en $(0,71, 0,43)$.

b) La función $g(x) = f(x) + ax$ es suma de funciones continuas y derivables y, por tanto, es continua y derivable. Por otra parte $g(0) = f(0) = 0$ y $g(1) = f(1) + a = e^{-1} + a$. Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle sólo falta que $g(0) = g(1) \Longrightarrow e^{-1} + a = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{e}$

c) Representación:



d)

$$\int f(x)\,dx = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$-xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

Opción B

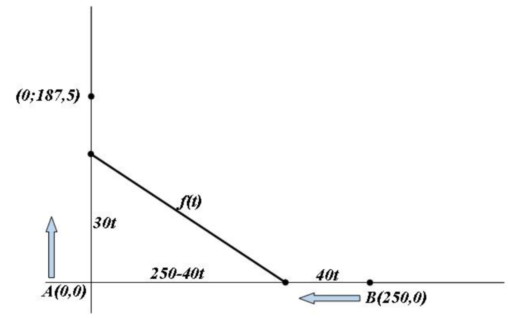
Problema 3.20.8 *(2,5 puntos)* Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2 puntos) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) (4 puntos) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

c) (4 puntos) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Solución:



a) $f(t) = \sqrt{(250-40t)^2 + (30t)^2} = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25}$

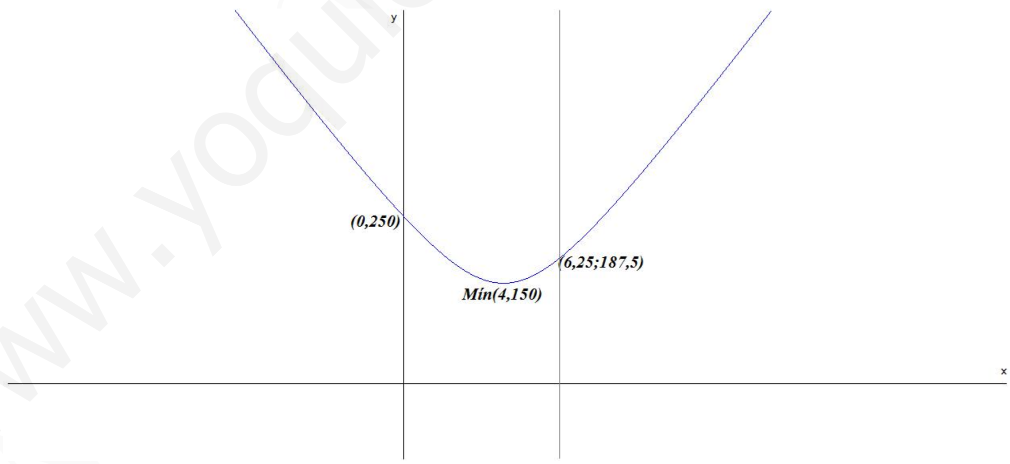
b) $T = \dfrac{e}{v} = \dfrac{250}{40} = 6,25$ horas. O bien $T = \dfrac{e}{v} = \dfrac{187,5}{30} = 6,25$ horas.

c) La función f estaría definida en el intervalo $[0, 25/4]$, tendríamos $f(0) = 250$ y $f(25/4) = 187,5$.

$$f'(t) = 50\frac{2t-8}{2\sqrt{t^2-8t+25}} = 0 \Longrightarrow 2t-8 = 0 \Longrightarrow t = 4$$

	$(0,4)$	$(4,25/4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,4)$ y creciente en el intervalo $\left(4, \frac{25}{4}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(4,150)$ y tendría el máximo en $(0,250)$ que serían las posiciones iniciales de los móviles.



3.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.20.9 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = 4$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1,25 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int (\sin x)^4(\cos x)^3\,dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

Solución:

a) $h(x) = f((x+1)^2) \Longrightarrow h'(x) = 2(x+1)f'((x+1)^2) \Longrightarrow$

$$h'(0) = 2f'(1) = 4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \Longrightarrow$$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}$$

b)

$$\int (\sin x)^4(\cos x)^3\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} = \int t^4\cos^3 x\,\frac{dt}{\cos x} =$$

$$\int t^4\cos^2 x\,dt = \int t^4(1-\sin^2 x)\,dt = \int t^4(1-t^2)\,dt =$$

$$\int (t^4 - t^6)\,dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

Opción B

Problema 3.20.10 *(2,5 puntos)* Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0,5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

a) $F(t) = \displaystyle\int (10t^2 - t^3)\,dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$

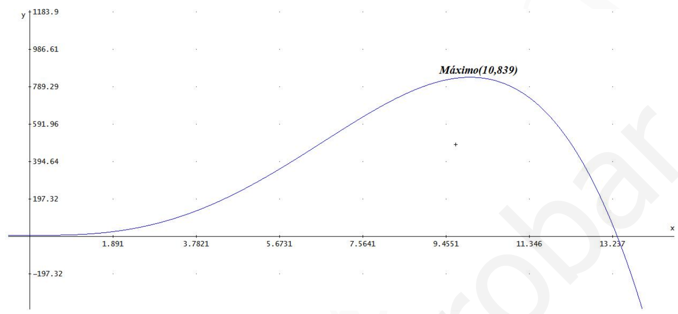
$F(0) = 6 \Longrightarrow C = 6 \Longrightarrow F(t) = \dfrac{10t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + 6$

b) $F'(t) = t^2(10-t) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 10$

.

	$(0,10)$	$(10,\infty)$
$F'(t)$	$+$	$-$
$F(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f crece en el intervalo $(0,10)$ y crece en el intervalo $(10,+\infty)$. Tendría un máximo en el punto $(10; 839,33)$. El máximo de enfermos se encuentra en el día 10 y serán sobre 839 el número de enfermos previstos.



c) la función F es continua y además cumple: $F(13) = \frac{2269}{12}$ y $F(14) = -\frac{1354}{3}$ por el teorema de Bolzano $\exists\, c \in (13,14)/F(c) = 0$, Es decir, entre 13 y 14 días.

3.21. Año 2020

3.21.1. Modelo

Opción A

Problema 3.21.1 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\dfrac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0,5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 2/3} \dfrac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3e^{3x-2} \Longrightarrow m = f'(a) = 3e^{3a-2} = 3e^{-1} \Longrightarrow 3a-2 = -1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$ luego el punto de tangencia es $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{e}\right)$ y la recta tangente tendrá por ecuación:

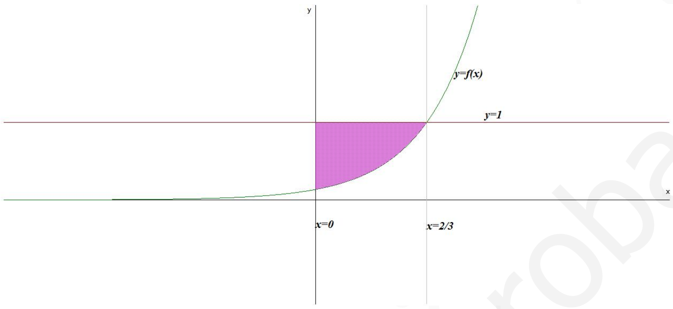
$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow y = \frac{3}{e}x$$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2/3}\frac{1-e^{3x-2}}{6x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 2/3}\frac{-3e^{3x-2}}{6}=-\frac{1}{2}$

c) $f(x)=1\Longrightarrow e^{3x-2}=1\Longrightarrow 3x-2=0\Longrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ Luego el área será:

$$S_1=\int_0^{2/3}(f(x)-1)\,dx=\int_0^{2/3}\left(e^{3x-2}-1\right)\,dx=\left.\frac{e^{3x-2}}{3}-x\right]_0^{2/3}=$$

$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{e}\right)\Longrightarrow S=|S_1|=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\ u^2$$



Opción B

Problema 3.21.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=2$.

b) (0,75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y=f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 xf(x)\,dx$.

Solución:

a) Calculamos la recta tangente a la función en $x=2$:

$$a=2,\ \ b=f(a)=f(2)=1,\ \ f'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2},\ \ m=f'(a)=f'(2)=-\frac{1}{3}$$

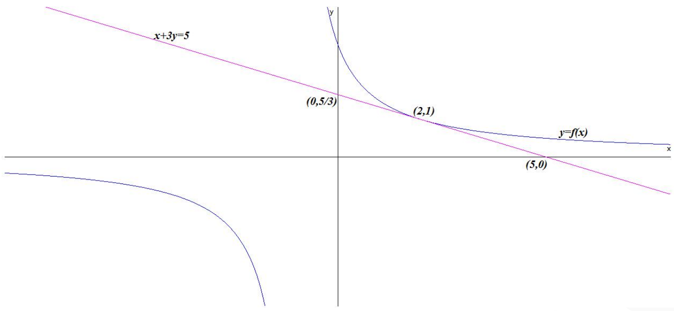
$$y-b=m(x-a)\Longrightarrow y-1=-\frac{1}{3}(x-2)\Longrightarrow x+3y=5$$

Calculamos los puntos de corte de esta recta con los ejes:
Con OY hacemos $x=0\Longrightarrow(0,5/3)$ y con OX hacemos $y=0\Longrightarrow(5,0)$, luego el área de este triángulo es:

$$S_T=\frac{5\cdot 5/3}{2}=\frac{25}{6}\ u^2$$

Otra forma:

$$S_T=\int_0^5\frac{5-x}{3}\,dx=\left.\frac{1}{3}\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^5=\frac{25}{6}\ u^2$$



b) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{3}{x+1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

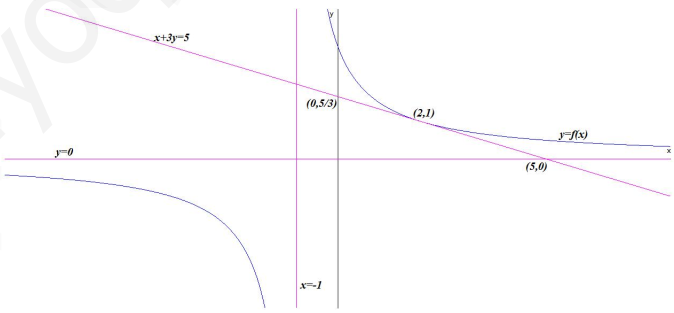
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: en $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

$f'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio de la función.



c)

$$\int_0^2 xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3x}{x+1}\,dx = \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{x+1}\right)\,dx =$$

$$3x - 3\ln|x+1|]_0^2 = 6 - 3\ln 3$$

3.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.21.3 *(2,5 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

Solución:

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ función continua en el intervalo $[1, 10]$, con $h(1) = -3 < 0$ y $h(10) = 1239 > 0$. Por el teorema de Bolzano existe un número real $c \in [1, 10]$ en el que $h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$.

b) $m(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x \Longrightarrow m'(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ como $m''(-1) = 6 > 0 \Longrightarrow$ $x = -1$ es un mínimo. Tenemos $m(-1) = -3$ y $f(-1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -3(x + 1) \Longrightarrow y = -3x - 2$$

c) $$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x}\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x|\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{41}{6} - \ln 2\right) \simeq 1,02336.$$

Opción B

Problema 3.21.4 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

a) La función en las ramas es continua estudiamos en el punto $x = 1$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x-1)^2 = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x-1)^3 = 0$ y $f(1) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-4, 4]$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ es derivable en } [-4, 4]$$

En la rama $[-4, 1]$ tenemos $f'(x) = 2(x-1)$ es $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ en esta rama decrece la función.
En la rama $(1, 4]$ tenemos $f'(x) = 3(x-1)^2$ es $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ en esta rama crece la función.

c)
$$g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2(x-1) & \text{si} & x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. \Longrightarrow g'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2 & \text{si} & x \le 1 \\ 6(x-1) & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

Continuidad de g en $x = 1$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 2(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 3(x-1)^2 = 0$ y $g(1) = 0 \Longrightarrow g$ es continua en $[-4, 4]$.
Derivabilidad de g en $x = 1$: Tenemos $g'(1^-) = 2 \neq g'(1^+) = 0 \Longrightarrow g$ no es derivable en $x = 1$.

3.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.21.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x + x\cos x$, se pide:

a) (1,25 puntos) Estudiar su crecimiento en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.

b) (1,25 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.

Solución:

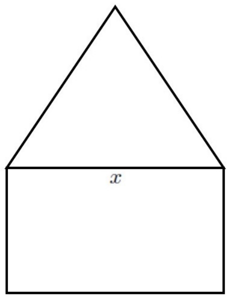
a) $f'(x) = -\cos x + \cos x - x\sin x = -x\sin x$. En el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ es $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en todo este intervalo.
Por otra parte f es continua y cumple que $f(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. Como además la función es decreciente en todo el intervalo este punto es único.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \sin x + x\cos x\right) dx = \frac{x}{2} + \cos x + \cos x + x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$\displaystyle\frac{x}{2} + 2\cos x + x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi - 8}{4} \simeq 0,3562$
Nota: $\displaystyle\int x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] =$
$\displaystyle x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x.$

Opción B

Problema 3.21.6 *(2,5 puntos)* Disponemos de 10 metros de una barra metálica.

Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida.



Se pide:

a) (0,5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

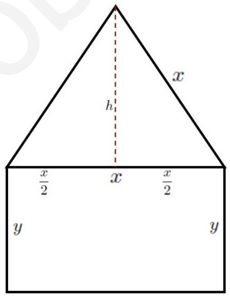
b) (2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.

Solución:

a) $h(x) = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

b) $10 = 4x + 2y \Longrightarrow y = 5 - 2x$

$$S(x) = S_t(x) + S_r(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x(5 - 2x)$$
$$S(x) = \left(\frac{\sqrt{3}-8}{4}\right)x^2 + 5x$$
$$S'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}-8}{2}\right)x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1,595 \text{ m}$$
$S''(x) = \dfrac{\sqrt{3}-8}{2} = -3,13 < 0 \Longrightarrow x = 1,595$ es un máximo relativo.
$x = 1,595$ m e $y = 5 - 2x = 1,809$ m



3.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.21.7 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x < 1,\ x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0,75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Solución:
.

a) Si $x < 1$ y $x \neq -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} \Longrightarrow f(0) = 1$ y $(f \circ f)(x) = f(f(0)) = f(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Luego la función es continua en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 1,\ x \neq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si} \quad\quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -\frac{1}{4},\ f'(1^+) = 0 \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow$$

f no es derivable en $x = 1$.
La función es continua en $x = 1$ y en ese punto la función pasa de decrecer a crecer, luego hay un mínimo local en ese punto.

c) Asíntotas:
En la rama $x < 1$:

- Verticales: la única posible es en $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \quad \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: en $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x \geq 1$:

- Verticales: No hay.
- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x} = +\infty$$

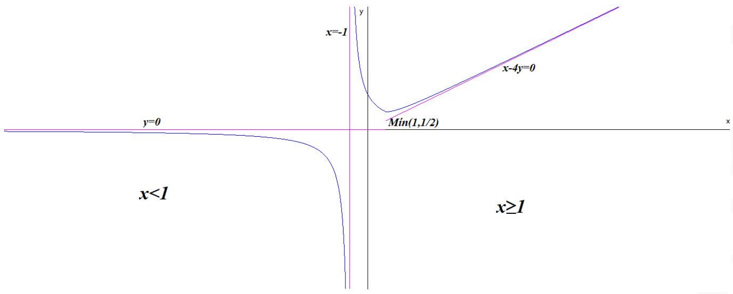
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{x}{4}\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

$$y = \frac{1}{4}x \Longrightarrow x - 4y = 0$$

.



Opción B

Problema 3.21.8 *(2,5 puntos)* La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0,5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0,75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1,25 puntos) La energáa total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución:

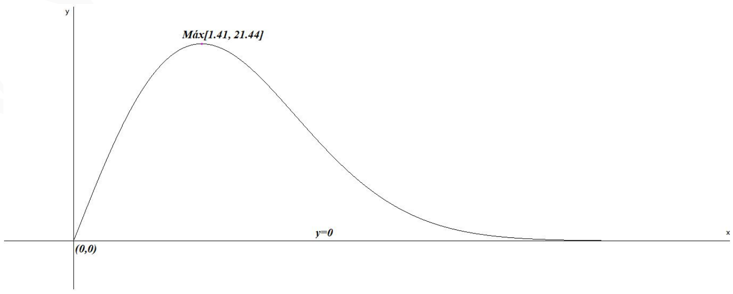
a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}} = 0$
La batería se agota con el tiempo.

b) $P'(t) = \dfrac{25}{2}(2-t^2)e^{-t^2/4} = 0 \Longrightarrow (2-t^2) = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{2}$. La solución negativa no es relevante.

	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = \sqrt{2}$ es un máximo local.

El máximo se produce a las $\sqrt{2}$ unidades de tiempo con $P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{\dfrac{2}{e}}$ unidades de potencia.



c) $E'(t) = P(t) \Longrightarrow E(t) = \int \left(25te^{-t^2/4}\right) dt = -50e^{-t^2/4} + C$

$E(0) = 0 \Longrightarrow -50 + C = 0 \Longrightarrow C = 50 \Longrightarrow E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$

La función $P(t)$ no corta el eje de abscisas en el intervalo $(0,2)$ luego $\int_0^2 \left(25te^{-t^2/4}\right) dt = E(2) - E(0) = \dfrac{50(e-1)}{e} \simeq 31,61\ u^2$

3.22. Año 2021

3.22.1. Modelo

Opción A

Problema 3.22.1 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x \le 1,\ x \ne -1 \\ \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.

b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.

c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$: $\lim_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{2}{x+1} = 1$, $\lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{1/x}{1} = 1$ y $f(1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Asíntotas:

En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

- Verticales:
  En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

- Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- Horizontales: $y = 0$.

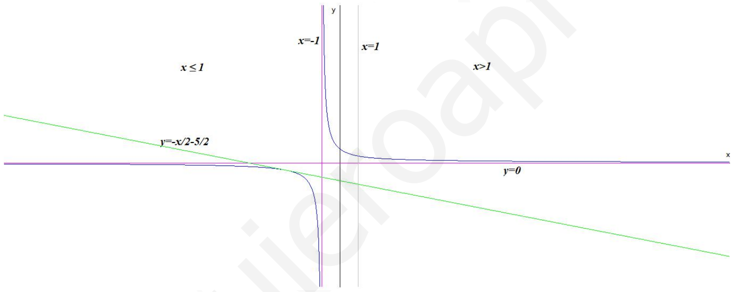
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \le 1,\ x \ne -1 \\ -\dfrac{x\ln x - x + 1}{x(x-1)^2} & \text{si} \quad\quad x > 1 \end{cases}$.

Como $x_0 < 1 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{2}{(x_0+1)^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Longrightarrow x_0 = -3$ y $x_0 = 1$, esta última no es válida ya que $x_0 < 1$. En $x_0 = -3 \Longrightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1 \Longrightarrow (-3,-1)$ es el punto de tangencia. Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+3) \Longrightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$



Opción B

Problema 3.22.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.

c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

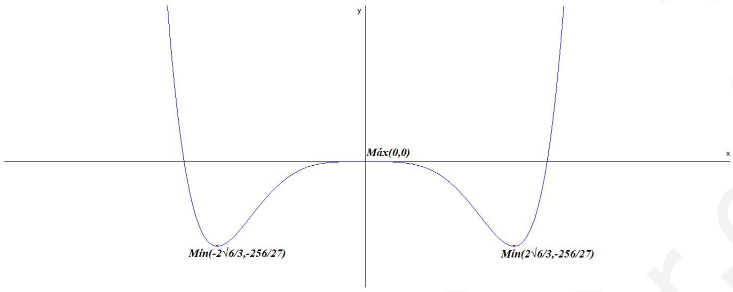
Solución:

a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

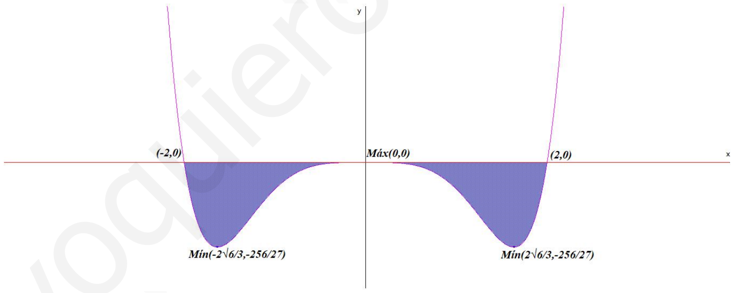
b) Tiene un mínimos relativos en los puntos de abscisa $x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ y un máximo en el punto de abscisa $x = 0$.
Tenemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y tenemos que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} = \infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} = \infty$, luego el máximo es relativo. Por el contrario, los mínimos si son relativos.



c) $f(x) = x^6 - 4x^4 = x^4(x^2-4) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Tenemos dos recintos $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$ y como la función es par estas dos áreas son iguales.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^6 - 4x^4)\, dx = \left.\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = -\frac{2^8}{35}$$

$$S = 2|S_1| = \frac{2^9}{35} = \frac{512}{35}\, u^2$$



3.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.22.3 *(2,5 puntos)* Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

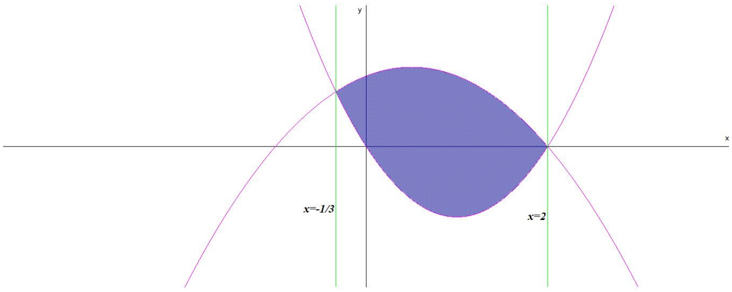
$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \Longrightarrow -3x^2 + 5x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{3}, \quad x = 2$$

$$S_1 = \int_{-1/3}^{2} \left[2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x)\right] dx = \int_{-1/3}^{2} (-3x^2 + 5x + 2)\, dx =$$

$$-x^3+\frac{5x^2}{2}+2x\Big]_{-1/3}^{2}=\frac{343}{54}\Longrightarrow S=|S_1|=\frac{343}{54}\;u^2$$



Opción B

Problema 3.22.4 *(2,5 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\sin x & \text{si} & x<0\\ xe^x & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi,2)$ Demuestre que existe un punto $x_0\in[0,1]$ de manera que $f(x_0)=2$.

c) (0,75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en $x=0$:**

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\longrightarrow 0^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\sin x=0\\ \lim_{x\longrightarrow 0^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}xe^x=0\\ f(0)=0\end{array}\right.\Longrightarrow f\text{ continua en } x=0$$

☛ **Derivabilidad en $x=0$:**

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\cos x & \text{si} & x<0\\ e^x(x+1) & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(0^-)=1\\ f'(0^+)=1\end{array}\right.\Longrightarrow f\text{ derivable en } x=0$$

b) ☛ $\cos x=0\Longrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ en el intervalo $(-\pi,0)$.
$e^x(x+1)=0\Longrightarrow x=-1\notin[0,2]$ Luego:

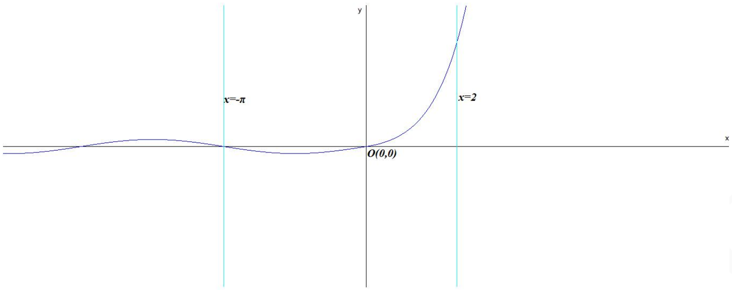
	$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	$(0,2)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{\pi}{2},2\right)$, con un mínimo relativo en $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$.

☛ En el intervalo $[0,1]$ es $f(x)=xe^x$. Sea la función $g(x)=xe^x-2$ en este intervalo y tenemos:
$g(0)=-2<0$ y $g(1)=e-2>0$, como g es continua en el intervalo podemos aplicar el teorema de Bolzano que nos afirma que $\exists x_0\in(0,1)$ tal que $g(x_0)=0\Longrightarrow x_0e^{x_0}-2=0\Longrightarrow x_0e^{x_0}=2\Longrightarrow f(x_0)=2$.

c) $\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx + \int_0^1 xe^x\,dx = -\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + e^x(x-1)]_0^1 = -1+1=0$



3.22.3. Ordinaria-Coincidente

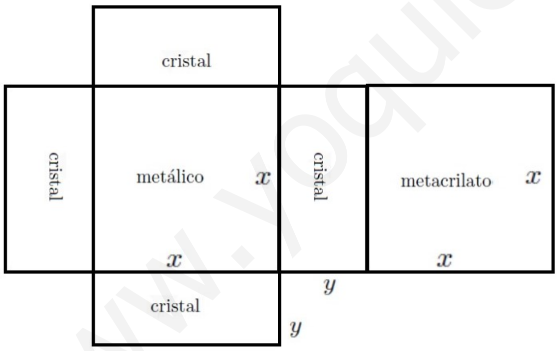
Opción A

Problema 3.22.5 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m^2, el material metálico, de 90 euros/m^2, y el cristal, de 25 euros/m^2.

a) (0,75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.

b) (1,75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Solución:



a) $C = 15x^2 + 90x^2 + 4\cdot 25xy = 105x^2 + 100xy \Longrightarrow y = \frac{C-105x^2}{100x}$

b) $V(x,y) = x^2y \Longrightarrow V(x) = x^2\frac{1260-105x^2}{100x} = \frac{1260x-105x^3}{100}$
$V'(x) = -\frac{63(x^2-4)}{20} = 0 \Longrightarrow x = 2$ (el valor $x=-2$ no es relevante)
$V''(x) = -\frac{63x}{10} \Longrightarrow V''(2) = -\frac{126}{10} < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo.
Luego las dimensiones de los cuadrados son de 2 m de lado y las caras verticales serían de 2 m por $y = \frac{1260-105\cdot 4}{100\cdot 2} = \frac{21}{5}$ m.
El volumen máximo es $V(2) = \frac{1260\cdot 2 - 105\cdot 2^3}{100} = \frac{84}{5} \simeq 16,8$ m^3.

Opción B

Problema 3.22.6 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$.

b) (1,25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2, 4]$.

c) (0,75 puntos) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) La función es siempre positiva y su dominio es toda la recta real. Se trata de un polinomio y, la raíz que lo contiene es impar, luego es continua en todo el dominio. El único punto a estudiar sería en $x = 2$:
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-2, 4]$
La función es derivable en todos los puntos salvo en $x = 2$ donde lo estudiaremos:

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}} \Longrightarrow f'(2^+) = \infty \quad f'(2^-) = -\infty$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$ en nuestro caso la función es derivable en $[-2, 2) \cup (2, 4]$.

b) $f'(x) < 0$ en el intervalo $[-2, 2)$ y, por tanto, decreciente. $f'(x) > 0$ en el intervalo $(2, 4]$ y, por tanto, creciente. No tiene máximos relativos.
Comprobamos los valores de la función en $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = \sqrt[5]{16}$ y en $x = 4 \Longrightarrow f(4) = \sqrt[5]{4}$, luego hay un máximo absoluto en $\left(-2, \sqrt[5]{16}\right)$ y un mínimo relativo y absoluto en $(2, 0)$.

c) La función no es derivable en $x = 2 \Longrightarrow$ no existe recta tangente a f en $x = 2$.

3.22.4. Extrordinaria

Opción A

Problema 3.22.7 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1 (0,5 puntos) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$ a.2 (0,75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación:** use el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ donde sea necesario).

b) (1,25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1 (0,5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1}\, dx$ b.2 (0,75 puntos) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$

Solución:

a) a.1 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\lim_{x\to 0} \frac{2-12x}{-4+\sin x} = -\frac{1}{2}$

a.2 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right) = \left[\begin{array}{c} t=\frac{1}{x} \\ x\to\infty \Longrightarrow t\to 0 \end{array}\right] = \lim_{t\to 0} t\left(3t-\frac{2}{\sin t}\right) = \lim_{t\to 0} t\left(\frac{3t\sin t-2}{\sin t}\right) =$
$\lim_{t\to 0} \frac{3t^2\sin t-2t}{\sin t} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim_{t\to 0} \frac{6t\sin t+3t^2\cos t-2}{\cos t} = -2$

b) b.1 $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=x^2-1 \\ dt=2xdx \\ dx=\frac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int \frac{x}{t}\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt =$
$\frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$

b.2 $\int x^2e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x^2 \Longrightarrow du=2xdx \\ dv=e^{-x}dx \Longrightarrow v=-e^{-x} \\ \int udv=uv-\int vdu \end{array}\right] =$
$-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \Longrightarrow v=-e^{-x} \\ \int udv=uv-\int vdu \end{array}\right] =$
$-x^2e^{-x}+2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right] = -x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2)\Big]_0^1 = 2-\frac{5}{e} \simeq 0,161$$

Opción B

Problema 3.22.8 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = x^3-|x|+2$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0,75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y=0$, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3+x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^3-x+2 & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right.$$

a) ☛ **Continuidad en $x=0$:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-}(x^3+x+2) = 2 \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+}(x^3-x+2) = 2 \\ f(0)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x=0$$

Luego f es continua en $\mathbb{R}$

☛ **Derivabilidad en $x=0$:**

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x^2+1 & \text{si} & x<0 \\ 3x^2-1 & \text{si} & x>0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f \text{ no es derivable en } x=0$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

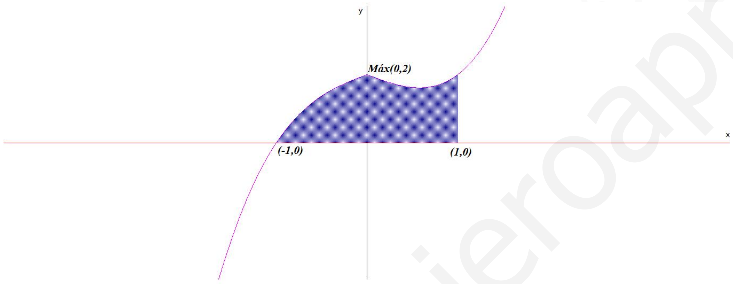
b) En la rama $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ no hay extremos en la rama y la función es siempre creciente. En el intervalo $(-\infty, 0)$.
En la rama $x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ la solución negativa no es válida por estar fuera de la rama. Para saber qué tipo de extremo es recurrimos a la segunda derivada: $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ es un mínimo relativo.
En $x = 0$ la función pasa de crecer a decrecer y además es continua, por lo que en $x = 0$ hay un máximo relativo.

c) Hay dos recintos de integración $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 + x + 2)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x + 2)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} = \frac{7}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3\ u^2$$



3.23. Año 2022

3.23.1. Modelo

Opción A

Problema 3.23.1 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{4-x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) (0,75 punto) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

a) ☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} 1 - \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\cos x}{1} = 0 \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{4-x^2} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$.

☛ Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ & \\ (1-2x^2)e^{4-x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{2x} =$
$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x + x\cos x}{2} = 0$
$f'(0^+) = e^4 \Longrightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$

b) En la rama $(0,\infty) \Longrightarrow f(x) = xe^{4-x^2} \Longrightarrow f'(x) = (1-2x^2)e^{4-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Tiene un máximo relativo en los puntos de abscisa $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int xe^{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4-x^2 \\ dt = -2xdx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array}\right] = \int xe^t\frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{e^t}{2}+C =$
$-\frac{e^{4-x^2}}{2} + C$
$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = -\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} = \frac{e^4-1}{2} \simeq 26,8$

Opción B

Problema 3.23.2 *(2,5 puntos)* Sea $f(x) = x + x^2$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

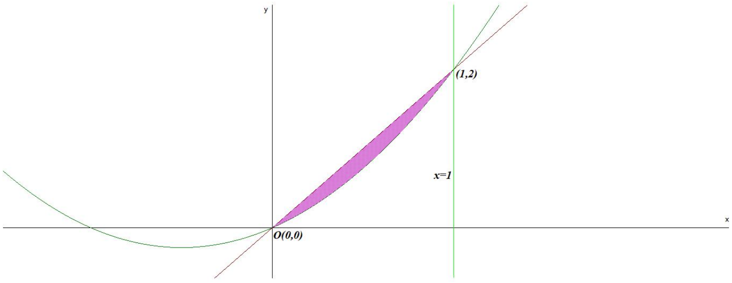
b) (1,5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

Solución:

a) Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas: $f(x) = g(x) \Longrightarrow x + x^2 = 2x \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$
Tenemos $S = \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx\right|$

$$S_1 = \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^1 (x + x^2 - 2x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{6} = 0,1667 \ u^2$$



b) $a = 1 \Longrightarrow b = f(a) = f(1) = 2$
$f'(x) = 1 + 2x \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = 3$
La recta tangente $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - 1$
El punto de corte con $x = 2 \Longrightarrow y = 5 \Longrightarrow (2, 5)$