# Capítulo 2

# Geometría

## 2.1. Año 2000

### 2.1.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.1.1** *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar los valores de $a$ para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

**Solución:**

a)

$$\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 1)0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \pm 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Independientes.

Si $a = 0$ o $a = \pm 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Dependientes.

b) si $a = 2$, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base. Luego el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ es combinación lineal de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$. Veamos de que combinación lineal se trata, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (2, 3, 4) \\ \overrightarrow{v} = (2, 1, 2) \\ \overrightarrow{w} = (1, 2, 1) \end{array} \right.$$

$$(3,3,0) = a(2,3,4) + b(2,1,2) + c(1,2,1) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2a+ & 2b+ & c = & 3 \\ 3a+ & b+ & 2c = & 3 \\ 4a+ & 2b+ & c = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{3}{2} \\ \\ b = \dfrac{3}{2} \\ \\ c = 3 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{c} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{u} + \frac{3}{2}\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$$

c) Si $a = 0$ tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{v} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{w} = (1,0,1) \end{array}\right.$$

Sabemos que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$. Pero

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0$$

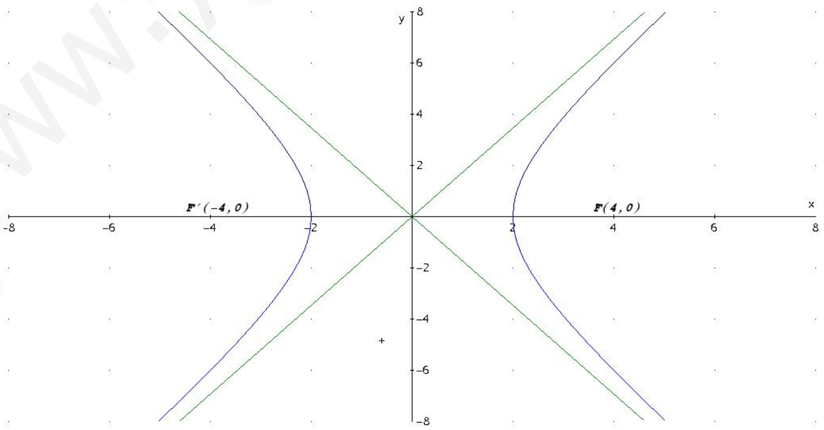
Luego $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$

**Problema 2.1.2** *(2 puntos)*

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4,0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.

b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

**Solución:**



a)
$$d(P,A)=2d(P,r),\quad r:x=1,\quad A(4,0)$$
$$\left\{\begin{array}{l} d(P,A)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}\\ \\ d(P,r)=\dfrac{|x-1|}{1}\end{array}\right. \Longrightarrow (x-4)^2+y^2=4(x-1)^2\Longrightarrow$$
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

b) Se trata de una hipérbola $a^2=4$ y $b^2=12$, como $c^2=a^2+b^2=16\Longrightarrow c=4$. Los focos serían los puntos $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$.

**Opción B**

**Problema 2.1.3** *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1,-1,3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1,2,1)$ y $R(1,0,-1)$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P$, $Q$ y $R$.

c) (1 punto) Encontrar todos los puntos $S$ del plano determinado por $P$, $Q$ y $R$ de manera que el cuadrilátero de vértices $P$, $Q$, $R$ y $S$ sea un paralelogramo.

**Solución:**

a) Calculamos la ecuación de la recta $r$ que pasa por $Q$ y $R$:
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QR}=(0,-2,-2)\\ Q(1,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2-2\lambda\\ z=1-2\lambda\end{array}\right.$$
$$|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 0&-2&-2\\ 0&-3&2\end{array}\right||=|(-10,0,0)|=10$$
$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|}=\frac{10}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\,u$$

b) Tenemos
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=(0,-3,2)\\ \overrightarrow{QR}=(0,-2,-2)\end{array}\right.$$
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|=5\ u^2$$

c) El plano $\pi$ que contiene a los puntos $P$, $Q$ y $R$ es el siguiente
$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}0&0&x-1\\ -3&-2&y\\ 2&-2&z+1\end{array}\right|=10(x-1)=0\Longrightarrow\pi:x-1=0$$

- Sean $P$, $Q$ y $R$ vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{QR} = (1,-1,3) + (0,-2,-2) = (1,-3,1)$
- Sean $P$, $R$ y $Q$ vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{RQ} = (1,-1,3) + (0,2,2) = (1,1,5)$
- Sean $Q$, $P$ y $R$ vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{PR} = (1,2,1) + (0,1,-4) = (1,3,-3)$
- Sean $Q$, $R$ y $P$ vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{RP} = (1,2,1) + (0,-1,4) = (1,1,5)$
- Sean $R$, $P$ y $Q$ vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1) + (0,3,-2) = (1,3,-3)$
- Sean $R$, $Q$ y $P$ vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{QP} = (1,0,-1) + (0,-3,2) = (1,-3,1)$

Los puntos $S$ son $(1,-3,1)$, $(1,1,5)$ y $(1,3,-3)$. Todos ellos están contenidos en el plano $\pi$

### 2.1.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.1.4** *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

**Solución:**

LLamamos $\overrightarrow{x} = (a,b,c) \Longrightarrow (a,b,c) \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-b-c, a+2c, a-2b) = (1,3,5) \Longrightarrow \begin{cases} -b-c=1 \\ a+2c=3 \\ a-2b=5 \end{cases}$$

Como la primera ecuación es el resultado de restar a la tercera la segunda, sólo tendríamos dos ecuaciones, la tercera la obtenemos de $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 = 6$:

$$\begin{cases} -b-c=1 \\ a+2c=3 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a=5/3 \\ b=-5/3 \\ c=2/3 \end{cases}$$

Es decir, $\overrightarrow{x} = (1,-2,1)$ y $\overrightarrow{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

**Problema 2.1.5** *(2 puntos)*

a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z-4=0$$

b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z=0$.

**Solución:**

a)

$$\left\{\begin{array}{l} -2a=-2\\ -2b=4\\ -2c=8\\ a^2+b^2+c^2-r^2=-4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=-2\\ c=-4\\ r=5 \end{array}\right.$$

Esfera de centro $(1,-2,-4)$ y radio $r=5$.

b) Al cortar la esfera con el plano $z=0$ nos queda la circunferencia:

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2a=-2\\ -2b=4\\ a^2+b^2-r^2=-4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=-2\\ r=3 \end{array}\right.$$

Circunferencia de centro $(1,-2,0)$ y radio $r=3$.

**Opción B**

**Problema 2.1.6** *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8,13,8)$ y $Q(-4,-11,-8)$. Se considera el plano $\pi$, perpendicular al segmento $PQ$ por su punto medio.

a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano $\pi$.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0,0,0)$ sobre $\pi$.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano $\pi$ corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

**Solución:**

a) Se trata de un plano mediador. Calculamos punto medio del segmento $\overline{PQ}$ que será $M(2,1,0)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}=(-12,-24,-16)=-4(3,6,4)$.

$$3x+6y+4z+\lambda=0,\ \ 6+6+0+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-12$$

$$\pi: 3x+6y+4z-12=0$$

b) Calculamos una recta $r$ perpendicular a $\pi$ que pase por $O$ y después calculamos el corte de esa recta $r$ y el plano $\pi$.

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,6,4)\\ P_r=O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\lambda\\ y=6\lambda\\ z=4\lambda \end{array}\right.$$

$$3(3\lambda)+6(6\lambda)+4(4\lambda)-12=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{12}{61}$$

El punto proyectado es: $O'\left(\frac{36}{61},\frac{72}{61}\frac{48}{61}\right)$

c) Los puntos de corte son:

Con el eje $OX$: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A\,(4, 0, 0)$.

Con el eje $OY$: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B\,(0, 2, 0)$.

Con el eje $OZ$: hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C\,(0, 0, 3)$.

Los vectores:

$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0)$.

$\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$.

$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 3)$.

El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}| = 4\ u^3$$

### 2.1.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.1.7** *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+9 = 0$.

a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje $OY$.

c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje $OX$.

**Solución:**

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0 \Longrightarrow$ centro $C(3, 3, 4)$ y radio $r = 5$

b)

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, 0) \\ P_t(3, 3, 4) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

c) Imponemos $z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ circunferencia de centro $(3, 3, 0)$ y radio $r = 3$

d) Si cortamos la esfera con el eje $OX$ hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow$

$$(x - 3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 = 25 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow P(3, 0, 0)$$

El vector característico del plano tangente puede ser $\overrightarrow{PC} = (0, 3, 4)$

$$\pi : 3y + 4z + \lambda = 0$$

Como tiene que contener al punto $P \Longrightarrow \lambda = 0$. Luego el plano buscado es $\pi : 3y + 4z = 0$.

## Opción B

**Problema 2.1.8** *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$ y $C(1,-1,a)$.

a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro $a$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

**Solución:**

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \forall a \in R$$

Luego no están alineados.

b)
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,a-2) - (1,a,0) = (0, 1-a, a-2) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,a) - (1,a,0) = (0,-1-a,a) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1-a & a-2 \\ 0 & -1-a & a \end{vmatrix}| = |(-2,0,0)| = 2$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 1\, u^2$$

**Problema 2.1.9** *(2 puntos)* Sean la recta

$$r: \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi: 2x - y + kz = 0$$

a) (1 punto) Calcular $m$ y $k$ para que la recta sea perpendicular al plano.

b) (1 punto) Calcular $m$ y $k$ para que la recta esté contenida en el plano.

**Solución:**

a) Deben ser $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$ o proporcionales:

$$(m,4,2)\lambda = (2,-1,k) \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}, \ \ m = -8, \ \ k = -\frac{1}{2}$$

b) El producto escalar de ambos vectores debe ser igual a cero:

$$2m - 4 + 2k = 0 \Longrightarrow m + k = 2$$

El punto $(1,0,1) \in r \subset \pi \Longrightarrow 2 - 0 + k = 0 \Longrightarrow k = -2$ y, por tanto, $m = 4$.

## 2.2. Año 2001

### 2.2.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.2.1** *(3 puntos)* Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean $u$ y $v$ las rectas tangentes a la parábola en los puntos $P$ de abscisa $a$ y $Q$ de abscisa $b$, $(a_1, b)$, $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto $R$ de intersección de $u$ y $v$.

b) (1 punto) Hallar la relación entre $a$ y $b$ para que las rectas $u$ y $v$ sean perpendiculares.

c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto $R$ está en la directriz de la parábola.

**Solución:**

a) $u$ tangente en el punto $P(a, a^2/4)$ y $v$ tangente en el punto $Q(b, b^2/4)$. Tenemos $f'(x) = \dfrac{1}{2}x$:

$$m_1 : f'(a) = \frac{1}{2}a, \quad m_2 = f'(b) = \frac{1}{2}b$$

$$\left\{\begin{array}{l} u : y - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{1}{2}a(x-a) \\ \\ u : y - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{1}{2}b(x-b) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{ab}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow R\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{4}\right)$$

b)

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \Longrightarrow ab = -4$$

c) Se trata de una parábola vertical cuya directriz es la recta $d : y = -1$. Si $ab = -4 \Longrightarrow R\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{-4}{4}\right) = R\left(\dfrac{a+b}{2}, -1\right) \in d$

**Opción B**

**Problema 2.2.2** *(2 puntos)* Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1)$, $B(7,5)$ y $C(x,y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de $x$ e $y$.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos $(x,y)$ tales que la anterior área es 36.

**Solución:**

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (x+2, y+1, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (9, 6, 0) \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x+2 & y+1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{array}\right|| =$$

$$= \frac{1}{2}|(0, 0, 6x - 9y + 3)| = \frac{3}{2}(2x - 3y + 1)$$

b)

$$\frac{3}{2}(2x - 3y + 1) = 36 \Longrightarrow 2x - 3y - 23 = 0$$

**Problema 2.2.3** *(2 puntos)* Sea $A(1,1)$ y $B(-1,1)$ dos puntos del plano.

a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos $A$ y $B$ razonando dónde están situados sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

**Solución:**

a) Los centros de las circunferencias están en la mediatriz que une los dos puntos, es decir, la recta $x = 0$. Luego el centro de ellas es de la forma $C(0, a)$ y el radio $r = d(C, A) = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$. La ecuación de una circunferencia con este centro y este radio es:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 2a + 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + 2a - 2 = 0$$

b) Si la recta $y = x$ es tangente a la circunferencia y el punto de tangencia tiene que ser $A(1,1)$, necesariamente.

Una recta perpendicular a $y = x$ tiene de pendiente $m = -1$.

Construimos una recta con esta pendiente que pase por $A$:

$$y - 1 = -(x - 1) \Longrightarrow x + y - 2 = 0$$

Esta recta corta a $x = 0$ en el punto $(0, 2)$, que será el centro de la circunferencia. Y el radio $r = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{2}$. Luego la circunferencia buscada es

$$x^2 + (y - 2)^2 = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$$

### 2.2.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.2.4** *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + y + x = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta $s$ que sea perpendicular a $r$ y pase por $P$.

b) (1 punto) Hallar el punto $P'$, simétrico de $P$ respecto de $r$.

c) (1 punto) Hallar el punto $P''$, simétrico de $P$ respecto de $\pi$.

**Solución:**

a) Hallamos un plano perpendicular a $r$ que contenga a $P$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{\pi_1}} = \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda = 0$$

Como $\lambda = -1 \Longrightarrow \pi_1 : y + z - 1 = 0$.

Ahora encontramos el punto de corte de este plano $\pi_1$ con la recta $r$:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda + \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será $Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La recta que buscamos pasa por $P$ y por $Q$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1/2, -1/2) \\ P_s = P(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1/2t \\ z = -1/2t \end{cases}$$

b) El simétrico de $P$ respecto de $r$ será el simétrico de $P$ respecto del punto $Q$ hallado en el apartado anterior:

$$Q = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2Q - P = (1, 0, 1)$$

c) Primero hallamos la ecuación de la recta $t$ perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$:

$$t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos el punto de corte de esta recta $t$ con el plano $\pi$:

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow$$

El punto de corte será $R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Este punto $R$ es el punto medio entre $P$ y su simétrico $P'$:

$$R = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2R - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.2.5** *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y - 1}{k} = \frac{z + 1}{-2} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

a) (1 punto) Hallar $k$ para que $r$ y $s$ sean coplanarias.

b) (1 punto) Para el valor anterior de $k$, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) Para el valor anterior de $k$, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

**Solución:**

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, k, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k = -1$$

Si $k = -1$ las dos rectas son coplanarias.

b)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y-2 \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + y - 3 = 0$$

c) Calculamos el punto de corte

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 2\mu \end{cases} \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}, \ \mu = \frac{1}{4}$$

El punto es $P\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

El vector director de la recta es

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4(1, 1, 0)$$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 1, 0) \\ P_r(5/4, 7/4, 1/2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5/4 + \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = 1/2 \end{cases}$$

### 2.2.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.2.6** *(2 puntos)* Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

**Solución:**

Llamamos $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $P(x, y)$:

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{AP}| \Longrightarrow x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$$

Se trata de una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = 2$. Luego el área será: $S = \pi r^2 = 4\pi\, u^2$.

**Problema 2.2.7** *(2 puntos)* Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) (1 punto) Calcular el valor que toma $k$ en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

b) (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto $C$ que cumple la relación de partida.

**Solución:**

a) Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AC}$ tenemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

b) Volvemos a utilizar la propiedad triangular, para ello cogemos como punto auxiliar el $O(0, 0, 0)$ y el resultado del apartado anterior:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

Luego $C\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$

**Opción B**

**Problema 2.2.8** *(3 puntos)* Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

a) (1 punto) Hallar el área del triángulo $ABC$ y el volumen del tatraedro $ABCD$.

b) (1 punto) Calcular la distancia de $D$ al plano determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas $AC$ y $BD$.

**Solución:**

a) Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 3) \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-1, -3, 3)| = \frac{\sqrt{19}}{2}\, u^2$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|7| = \frac{7}{6}\, u^3$$

b) Construimos el plano $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \\ A(1,0,0) \end{cases}$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + 3y - 3z - 1 = 0$$

$$d(D,\pi) = \frac{|0+3-9-1|}{\sqrt{1+9+9}} = \frac{7}{\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{19}\, u$$

c) Calculamos las rectas $r$ y $s$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \\ A(1,0,0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-1,0,2) \\ B(1,1,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB} = (0,1,1)$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| = |\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = 7$$

$$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = |(2,6,1)| = \sqrt{41}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41}\, u$$

## 2.3. Año 2002

### 2.3.1. Modelo

**Opción A**

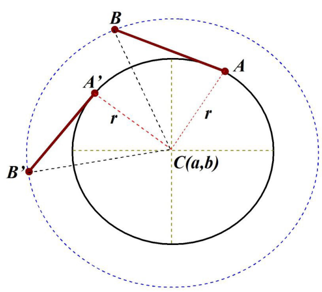
**Problema 2.3.1** *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo $A$ de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo $B$ de la varilla.

b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

**Solución:**

a) Veamos un dibujo aproximado:



Como se puede ver en la figura el segmento $\overline{CA} = \overline{CA'} = r$ radio de la circunferencia descrita por el punto $A$. El segmento $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ya que la varilla suponemos que siempre es del mismo tamaño. El ángulo $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'} = 90^\circ$. Luego los triángulos formados por los puntos $ABC$ y $A'B'C$ son iguales y, por tanto, $\overline{CB} = \overline{CB'}$. En conclusión, el punto $B$ recorre una circunferencia de centro $C$ y radio $R = \overline{CB}$, que sería concéntrica con la dada en el problema.

b) La circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow C(2,1), \quad r = 2$.

$$R = \sqrt{\overline{AB}^2 + r^2} = \sqrt{5}$$

La circunferencia que buscamos es de centro $C(2,1)$ y radio $R = \sqrt{5}$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

**Problema 2.3.2** *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de $r$ y $s$ según los valores de $a$.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas $r$ y $s$ cuando $a = -2$:

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P_r(0,0,-1/6) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,a,1) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,1/6)$$

$$A = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right), \quad |A| = \frac{a+2}{3} = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Si $a = -2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (2,-2,1)$ y además el Rango$(A) = 2$, ya que $\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = -2 \neq 0$, luego las rectas son paralelas.

b) Cuando $a = -2$ hemos visto que las rectas son paralelas, luego

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{53}}{9}$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| | = |(4/3, 1/3, -2)| = \frac{\sqrt{53}}{3}\, u$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = 3$$

**Opción B**

**Problema 2.3.3** *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

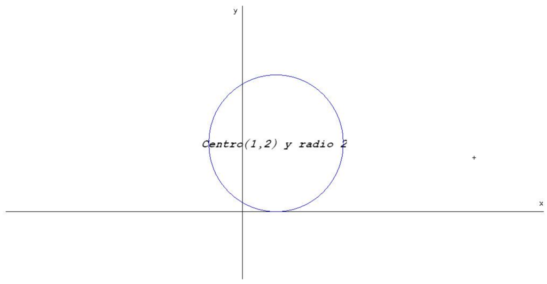
a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

**Solución:**

a) El centro es $C(1, 2)$ y el radio $r = 2$

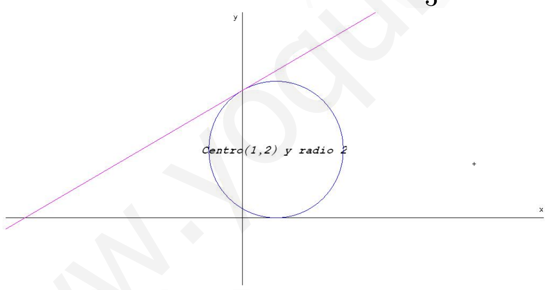



b) Para encontrar el punto hacemos $x = 0 \Longrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0 \Longrightarrow (0, 2 + \sqrt{3})$ y $(0, 2 - \sqrt{3})$. El punto más alejado es: $(0, 2 + \sqrt{3})$

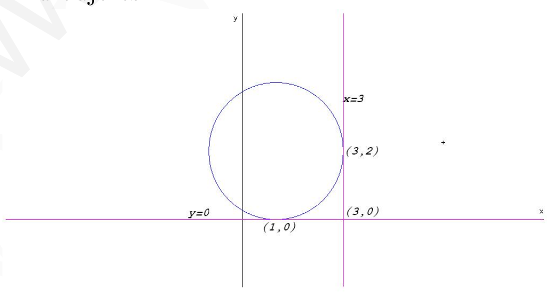
$$2xdx + 2ydy - 2dx - 4dy = 0 \Longrightarrow (2y - 4)dy = -(2x - 2)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2}{2y - 4} \Longrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta tangente es $y - 2 - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Longrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$




c) El dibujo es:



Una de ellas es el eje de abscisa $y = 0$ y tendrá de punto de tangencia el $(2, 0)$, ya que el punto $(3, 0)$ está en el eje de abscisas. La otra recta tangente que pase por este punto debe de ser $x = 3$, ya que el punto de tangencia es el $(3, 2)$.

### 2.3.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.3.4** *(3 puntos)* Se consideran las cónicas $C_1$ y $C_2$ cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

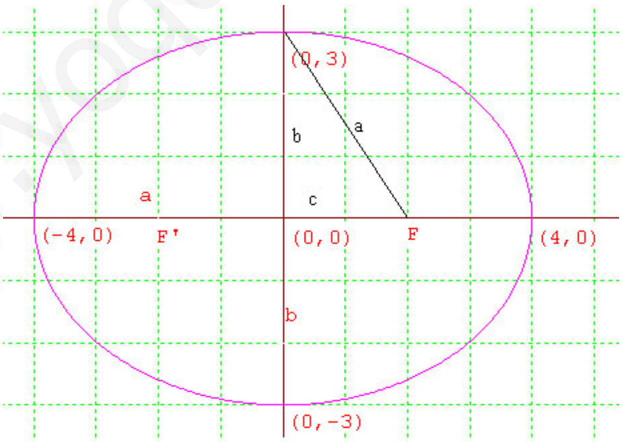
a) (2 puntos) Identificar $C_1$ y $C_2$. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica $C_1$.

**Solución:**

a) $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.




$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$

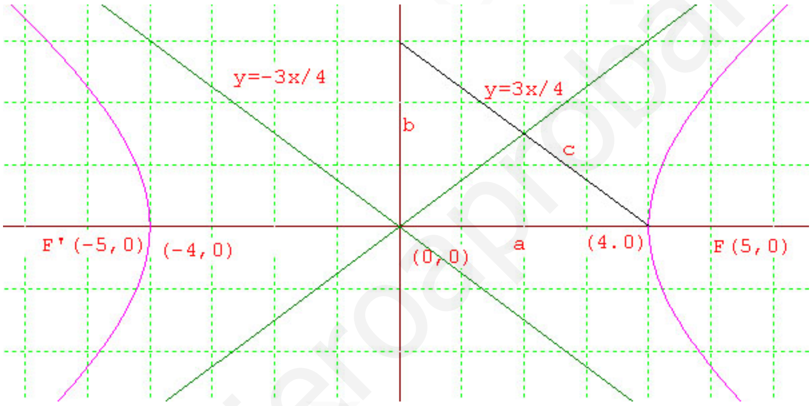
Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

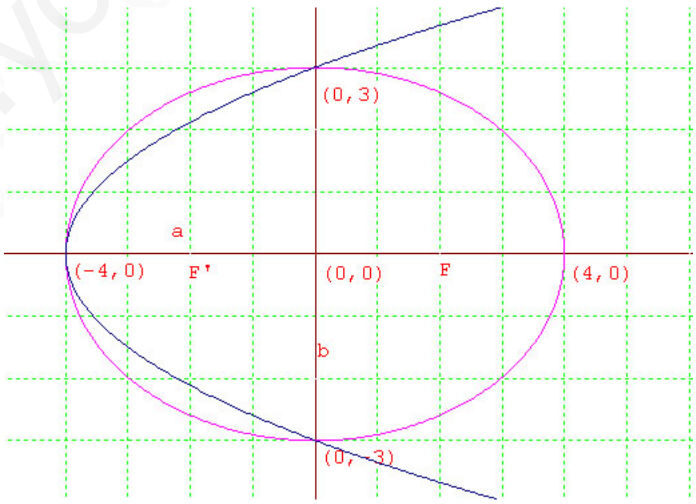
Podemos concluir:

- Focos: $(-5,0) \quad (5,0)$
- Vértices: $(-4,0) \quad (4,0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$




b) La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abscisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.



Como pasa por el vértice $(-4,0), (0,3), (0,-3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c=-4,\ a=\frac{4}{9}\ y\ b=0 \Longrightarrow x=\frac{4}{9}y^2-4$$

**Opción B**

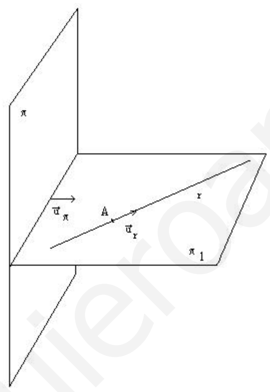
**Problema 2.3.5** *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta $r$:

$$x = 1+t \quad , \quad y = -1+2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano $\pi$:

$$2x + y - z = 2.$$

**Solución:**



Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ A(1,-1,0) \end{array}\right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ A(1,-1,0) \end{array}\right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

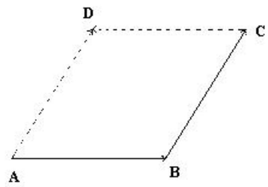
$$\left|\begin{array}{rrc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

**Problema 2.3.6** *(2 puntos)* Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice $D$ y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

**Solución:**




a) Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.
Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0,\ y_0 = 2\ z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

### 2.3.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.3.7** *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{2} \quad s: \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{-1}$$

a) (1 punto) Calcular la distancia entre $r$ y $s$.

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a $r$ y $s$ y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a $r$ y $s$ y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.

**Solución:**

a)

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,-2,2)\\ P_r(0,1,3)\end{cases}\quad s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(3,1,-1)\\ P_s(2,0,-1)\end{cases}\quad \overrightarrow{P_rP_s}=(2,-1,-4)$$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\begin{vmatrix}2&-1&-4\\1&-2&2\\3&1&-1\end{vmatrix}|=|-35|=35$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&-2&2\\3&1&-1\end{vmatrix}|=|(0,7,7)|=7\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{35}{7\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) La encontramos como intersección de dos planos y para ello nos apoyamos en el vector perpendicular a ambas rectas $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=(0,7,7)$:

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(0,7,7)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,-2,2)\\ P_r(0,1,3)\end{cases}\quad \pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(0,7,7)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,-1)\\ P_s(2,0,-1)\end{cases}\quad t:\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}0&1&x\\7&-2&y-1\\7&2&z-3\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 4x+y-z=-2$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}0&3&x-2\\7&1&y\\7&-1&z+1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 2x-3y+3z=1$$

$$t:\begin{cases}4x+y-z=-2\\ 2x-3y+3z=1\end{cases}$$

c) La encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{PP_r}=(-1,1,3)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,-2,2)\\ P(1,0,0)\end{cases}\quad \pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{PP_s}=(1,0,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,-1)\\ P(1,0,0)\end{cases}\quad t:\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}-1&1&x-1\\1&-2&y\\3&2&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 8x+5y+z=8$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}1&3&x-1\\0&1&y\\-1&-1&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow x-2y+z=1$$

$$t:\begin{cases}8x+5y+z=8\\ x-2y+z=1\end{cases}$$

**Opción B**

**Problema 2.3.8** *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0,3)$ y $B(0,-1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

**Solución:**

Sea $X(x,y)$ un punto genérico, tendremos:

$$d(A,X)=\sqrt{x^2+(y-3)^2},\quad d(B,X)=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}=1$$

$$4x^2-60y^2+120y-45=0$$

Se trata por definición de una hipérbola.

**Problema 2.3.9** *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real $a$, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1: x+y+az=-2;\quad \pi_2: x+ay+z=-1;\quad \pi_2: ax+y+z=3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de $a$ para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de $a$ calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

**Solución:**

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az= & -2\\ x+ & ay+ & z= & -1\\ ax+ & y+ & z= & 3 \end{array}\right. \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2\\ 1 & a & 1 & -1\\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow |A|=-a^3+3a-2=0\Longrightarrow a=-2,\ a=1$$

Si $a\neq -2$ y $a\neq 1$ el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $a=-2$ el Rango$\overline{A}$ =Rango$(A)$ <nº de incógnitas con lo que el sistema es compatible indeterminado, los tres planos tienen infinitos puntos comunes. Como además no son planos coincidentes, tienen por tanto, una recta común.

Si $a=1$ tenemos que Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A)=1$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a=-2$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z= & -2\\ x- & 2y+ & z= & -1\\ -2x+ & y+ & z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-5/3+\lambda\\ y=-1/3+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

## 2.4. Año 2003

### 2.4.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.4.1** *(3 puntos)* Se consideran el plano $\pi$ y la recta $r$ siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano $\pi$.

b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta $r$.

**Solución:**

a) Calculamos una recta perpendicular a $\pi$ que pase por el punto $M(1,1,1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano $\pi$:

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) - 2(1-2\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$M'(2,2,-1)$$

Este punto es el punto medio entre $M$ y el simétrico $M''$:

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M' - M = (4,4,-2) - (1,1,1) = (3,3,-3)$$

b) Calculamos un plano perpendicular a $\pi$ que contenga al punto $M$:

$$2x + 3y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 3 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2(1+2\lambda) + 3(3\lambda) - (-1-\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{14}$$

$$M'\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right)$$

Este punto es el punto medio entre $M$ y el simétrico $M''$:

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M' - M = 2\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right) - (1,1,1) =$$

$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.4.2** *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1),\ \ B(0,-2,2)\ \ C(-1,0,2)\ \ D(2,-1,-2).$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$.

b) (1 punto) Calcular la distancia del punto $D$ al plano determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por $D$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

**Solución:**

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)\quad \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\quad \overrightarrow{AD}=(1,-2,-3)$$

a)

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{rrr} -1 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right|=\frac{5}{2}\,u^3$$

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\\ A(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{rrc} -1 & -2 & x-1\\ -3 & -1 & y-1\\ 1 & 1 & z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$2x+y+5z-8=0$$

$$d(D,\pi)=\frac{|4-1-10-8|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{15}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{2}\ u$$

c)

$$r=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,5)\\ D(2,-1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-2+5\lambda\end{array}\right.$$

## 2.4.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.4.3** *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$$

$$s:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, -2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 2) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array} \right| = -3i - 4j + k = (-3, -4, 1)$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, -2, 1) - (2, 1, 0) = (-3, -3, 1)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{array} \right| = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

b)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, -2, 1) \\ \overrightarrow{u} = (-3, -4, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right. \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 2) \\ \overrightarrow{u} = (-3, -4, 1) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.4.4** *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano $\pi'$ que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos $\pi$, $\pi'$.

**Solución:**

a) Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,-1) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (6,2,1) \\ P_r(-2,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

b)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \dfrac{5}{2} \cdot \lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

### 2.4.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.4.5** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano $\pi$ y pasa por los puntos $A$ y $B$.

**Solución:**

$\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1,2,-1)$

$$\pi' \equiv \left| \begin{array}{rrr} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x + y - 2 = 0$$

**Problema 2.4.6** *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrl} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar el valor de $k$ para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) (1 puntos) Para el valor de $k$ obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

**Solución:**

a)
$$\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-i+2j+3k=(-1,2,3)$$

Si en la recta $s$ hacemos $x=0$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con el resultado de $y=-2$ y $z=1$, luego un punto de la recta sería $P_s(0,-2,1)$.

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,1) \\ P_r(1,-1,k) \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-1,2,3) \\ P_s(0,-2,1) \end{array}\right.$$

El plano $\pi$ que buscamos contiene a las dos rectas:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s}=(-1,2,3) \\ P_r(1,-1,k) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 3 & z-k \end{vmatrix}=0$$

$$-x-2y+z-1-k=0\Longrightarrow x+2y-z+1+k=0$$

Como este plano contiene al punto $P_s(0,-2,1)$ sustituimos en el plano

$$0-4-1+1+k=0\Longrightarrow k=4$$

b) El plano buscado es:
$$x+2y-z+5=0$$

**Opción B**

**Problema 2.4.7** *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi:x+y+z=0$$

y la recta
$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto $Q$ en el que se cortan el plano $\pi$ y la recta $r$.

b) (2 puntos) Encontrar un plano $\pi'$, paralelo a $\pi$, tal que el punto $Q'$ en el que se cortan el plano $\pi'$ y la recta $r$ esté a distancia 2 del punto $Q$ hallado en el apartado anterior.

**Solución:**

a)
$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,2) \\ P_r(1,0,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{rr} x= & 1+t \\ y= & 2t \\ z= & -1+2t \end{array}\right.$$

$$1+t+2t-1+2t=0\Longrightarrow t=0\Longrightarrow Q(1,0,-1)$$

b) Calculamos una esfera de centro $Q$ y radio 2: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$; esta esfera corta a la recta $r$ en dos puntos $Q'$ y $Q''$:

$$t^2+4t^2+4t^2=4 \Longrightarrow t=\pm\frac{2}{3}$$

Si $t=\frac{2}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a $\pi$ y contenga a este punto será $\pi'$:

$$\frac{5}{3}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{8}{3}$$

$$\pi' : x+y+z-\frac{8}{3}=0$$

Si $t=-\frac{2}{3} \Longrightarrow Q''\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{7}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a $\pi$ y contenga a este punto será $\pi''$:

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{7}{3}+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{10}{3}$$

$$\pi' : x+y+z-\frac{10}{3}=0$$

## 2.5. Año 2004

### 2.5.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.5.1** *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x+y+az+1=0$$

y las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=t\\ z=t\end{array}\right. \quad r':\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=2t\\ z=t\end{array}\right. \quad r'':\left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=3t\\ z=t\end{array}\right.$$

Se pide:

a) Calcular el valor de $a$ para que los puntos de corte del plano $\pi$ con las rectas $r$, $r'$ y $r''$ estén alineados (1,5 puntos).

b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).

c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

**Solución:**

a) Sea $A$ el punto de corte de $r$ con $\pi$:

$$1+t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{2}{a+1} \Longrightarrow A\left(1,-\frac{2}{a+1},-\frac{2}{a+1}\right)$$

Sea $A'$ el punto de corte de $r'$ con $\pi$:

$$2+2t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{2}{a+2} \Longrightarrow A'\left(2,-\frac{6}{a+2},-\frac{3}{a+2}\right)$$

Sea $A''$ el punto de corte de $r''$ con $\pi$:

$$3+3t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{4}{a+3} \Longrightarrow A''\left(3,-\frac{12}{a+3},-\frac{4}{a+3}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'}=\left(1,-\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)},-\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}\right)$$

$$\overrightarrow{A'A''}=\left(1,-\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)},-\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}\right)$$

Para que estén alineados los tres puntos:

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'A''} \Longrightarrow \frac{4a+2}{(a+1)(a+2)}=\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)} \Longrightarrow a=0 \quad a=1$$

Si $a=0$:

$$\overrightarrow{AA'}=(1,-1,1/2)\neq \overrightarrow{A'A''}=(1,-1,-1/6)$$

Esta solución no vale.

$a=1$:

$$\overrightarrow{AA'}=(1,-1,0)=\overrightarrow{A'A''}$$

Luego cuando $a=1$ los tres puntos están alineados.

b) La recta $h$ que une estos puntos:

$$h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}=(1,-1,0)\\ A(1,-1,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow h:\left\{\begin{array}{l}x=1+t\\ y=-1-t\\ z=-1\end{array}\right.$$

c)

$$d(O,h)=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{u_h}|}{|\overrightarrow{u_h}|}=\frac{|(1,-1,-1)\times(1,-1,0)|}{|(1,-1,0)|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\,u^2$$

**Opción B**

**Problema 2.5.2** *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ 2x-z+1=0\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l}2x-z+2=0\\ 2y-mz=6\end{array}\right.$$

a) Hallar el valor de $m$ para que $r$ y $s$ sean paralelas.

b) Para el valor de $m$ obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=3+m\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,-2,1)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,m,2)\\ P_s(-1,3,0)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,5,-1)$$

$$\left|\begin{array}{rrr}1&5&-1\\1&1&2\\1&m&2\end{array}\right|=-1+m=0\Longrightarrow m=1$$

Cuando $m=1$ los vectores directores de las rectas $r$ y $s$ coinciden, luego para este valor las rectas son paralelas.

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(1,1,2)\\ \overrightarrow{v}=(-1,5,-1)\\ P(0,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{rrr}1&-1&x\\1&5&y+2\\2&-1&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 11x+y-6z+8=0$$

**Problema 2.5.3** *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=5+3\lambda\end{array}\right.$$

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,3)\\ P_r(3,4,5)\end{array}\right.$$

Un plano perpendicular a esta recta y que contenga al punto $P$ será:

$$\pi:2x+y+3z+\lambda=0\Longrightarrow 6-1+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-5$$

$$\pi:2x+y+3z-5=0$$

Este plano corta a la recta $r$ en el punto $P'$:

$$2(3+2\lambda)+4+\lambda+3(5+3\lambda)-5=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{10}{7}$$

$$P'\left(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{P'P}=(3,-1,0)-\left(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{22}{7},-\frac{25}{7},-\frac{5}{7}\right)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P'P}=\left(\frac{22}{7},-\frac{25}{7},-\frac{5}{7}\right)\\ P(3,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=3+\dfrac{22}{7}\lambda\\ y=-1-\dfrac{25}{7}\lambda\\ z=-\dfrac{5}{7}\lambda\end{array}\right.$$

### 2.5.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.5.4** *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{array}\right. ;\quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0;\quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de $r$ a $\pi_2$.

**Solución:**

a)

$$r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-4=-3y+3 \\ -x+2=-3z+12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0 \\ x-3z+10=0 \end{array}\right.$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1: 3x-2y+z-2=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right);\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=-4 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ La recta corta al plano $\pi_1$.

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2: 2x+2y-2z+3=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right);\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=0$ y como $\left|\begin{array}{rr} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{array}\right|=-3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

Por otra parte tenemos que

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right|=36\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) $-\frac{3}{2}\neq\frac{2}{2} \Longrightarrow \pi_1$ y $\pi_2$ se cortan.

c) Un punto de $r$ es $P_r(2,1,4)$ y tendremos:

$$d(P_r,\pi_2)=\frac{|2\cdot 2+1\cdot 2-2\cdot 4+3|}{\sqrt{4+4+4}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

**Opción B**

**Problema 2.5.5** *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro $k$:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz = & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z = & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z = & -k \end{array}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

**Solución:**

a) Sea la matriz

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -3k^2 - 5k + 2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = \dfrac{1}{3} \\ \\ k = -2 \end{array} \right.$$

Si $k \neq \dfrac{1}{3}$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado$\Longrightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = \dfrac{1}{3}$ tenemos

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 1/3 \end{array} \right| = -\frac{7}{3} \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Por otra parte tenemos

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1/3 \end{array} \right| = -\frac{224}{27} \neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. En este caso tenemos que comparar los planos dos a dos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1/3} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1} = \dfrac{-1}{-3} \neq \dfrac{-1}{-1/3} \Longrightarrow \text{son paralelos} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

Dos planos son paralelos ($\pi_2$ y $\pi_3$) y otro plano corta a los dos ($\pi_1$).

Si $k = -2$ tenemos

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -7 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(A) = 2$, y si observamos la matriz $\overline{A}$ la tercera fila es la suma de las anteriores y, por tanto, Rango$(\overline{A}) = 2$. Concluimos con que el sistema es Compatible Indeterminado; comparando los planos se compruebo que no hay coincidentes y concluyo con que se cortan los tres en una recta.

b) Puedo definir esta recta como intersección de dos de estos planos $r : \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & 2z = & 3 \\ x- & 2y- & z = & -1 \end{array}\right.$ y su vector director será:

$$\overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right| = (-7, 0, -7)$$

### 2.5.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.5.6** *(3 puntos)* Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de $\pi$.

b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a $\pi$ que contiene a $OZ$.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de $\pi$ con los ejes de coordenados.

**Solución:**

a) Calculo $r$, recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $P(0, 0, 0)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 3) \\ P(0, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{array}\right.$$

Esta recta cortará con el plano $\pi$ en el punto $P''$:

$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \Longrightarrow t = \frac{3}{7} \Longrightarrow P''\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

El punto simétrico $P'$ de $P$ tendrá por punto medio a $P''$, es decir:

$$P'' = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

El punto simétrico de $P(0, 0, 0)$ respecto al plano $\pi$ es $P'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

b)

$$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{u} = (0, 0, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 2x - y = 0$$

c) Los puntos de corte de $\pi$ con los ejes será:

Corte con el eje $OX$: $y=0$, $z=0 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow A(6,0,0)$
Corte con el eje $OY$: $x=0$, $z=0 \Longrightarrow y=3 \Longrightarrow B(0,3,0)$
Corte con el eje $OZ$: $x=0$, $y=0 \Longrightarrow z=2 \Longrightarrow C(0,0,2)$

Tendremos: $\overrightarrow{OA}=(6,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$, $\overrightarrow{OC}=(0,0,2)$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right|=6\,u^3$$

**Opción B**

**Problema 2.5.7** *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z=0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x-y+2z=4$.

b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

**Solución:**

a) Un punto del plano $z=0$ será $P(x,y,0)$

$$d(P,\pi)=\frac{|2x-y-4|}{\sqrt{4+1+4}}=3\Longrightarrow |2x-y-4|=9\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x-y- & 13=0\\ 2x-y+ & 5=0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x-y-13=0\\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{13}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=0 \end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} 2x-y+5=0\\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=0 \end{array}\right.$$

b) El conjunto será:

$$\left\{(x,y,z)\in R^3:(x,y,z)\in r o (x,y,z)\in s\right\}$$

**Problema 2.5.8** *(2 puntos)* El plano $\pi: 2x-2y+z=-2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano $\pi$.

**Solución:**

a)

$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$$

b)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

c) Corte con el eje $OX$: $y=0,\ z=0\Longrightarrow x=-1\Longrightarrow A(-1,0,0)$
Corte con el eje $OY$: $x=0,\ z=0\Longrightarrow y=1\Longrightarrow B(0,1,0)$
Corte con el eje $OZ$: $x=0,\ y=0\Longrightarrow z=-2\Longrightarrow C(0,0,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(0,0,-2)-(-1,0,0)=(1,0,-2)$
$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(-1,0,0)=(1,1,0)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&0&-2\\ 1&1&0\end{array}\right|=(2,-2,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}\ u^2$$

## 2.6. Año 2005

### 2.6.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.6.1** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1,1,1)$, $B(1,-3,-1)$ y $C(1,0,3)$, hallar las coordenadas de un punto $D$ perteneciente a la recta:

$$r: x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

**Solución:**

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

$$D(1+\lambda,1-\lambda,1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB}=(2,-4,-2),\quad \overrightarrow{AC}=(2,-1,2),\quad \overrightarrow{AD}=(2+\lambda,-\lambda,\lambda)$$

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}2+\lambda&-\lambda&\lambda\\ 2&-4&-2\\ 2&-1&2\end{array}\right||=\frac{2}{3}|\lambda-5|=2$$

$$|\lambda-5|=3$$

$$\lambda-5=3\Longrightarrow\lambda=8\Longrightarrow D\,(9,-7,9)$$

$$\lambda-5=-3\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow D\,(3,-1,3)$$

**Opción B**

**Problema 2.6.2** *(3 puntos)* Se considera la recta: $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro $m$:

$$s: \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de $m$ para el que las dos rectas $r$ y $s$ se cortan.

b) (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

**Solución:**

a)

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(0, 4, 5) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 1) \\ P_s(5 - 5m, 7 - 3m, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5 - 5m, 3 - 3m, -5)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5-5m & 3-3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Cuando $m = 2$ el Rango$(A) = 2$, y además el Rango$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

b) Si $m = 0$ las dos rectas se cruzan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 1) \\ P_s(5, 7, 0) \end{cases}$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$

### 2.6.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.6.3** *(3 puntos)* Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a $P$ sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\begin{cases} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a $P$ es igual 3.

**Solución:**

a) Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2=0$$

b) Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$(3\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1-4\lambda)^2-2(3\lambda)-6(1+\lambda)+2(1-4\lambda)+2=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda-1)=0 \Longrightarrow \lambda=1,\ \ \lambda=0$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda=0 \Longrightarrow (0,1,1)$ y para $\lambda=1 \Longrightarrow (3,2,-3)$.

**Opción B**

**Problema 2.6.4** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \quad s: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta $t$ que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = (10,0,-5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{array} \right. \quad \pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{array} \right.$$

$$\pi_1: \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y-1 \\ 4 & -1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x-10y+6z+1=0$$

$$\pi_2: \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x+1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 2 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x+5y+2z-9=0$$

$$t: \left\{ \begin{array}{rrl} 3x- & 10y+ & 6z+1=0 \\ x+ & 5y+ & 2z-9=0 \end{array} \right.$$

b)

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right| = |-15|$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,2,0)-(1,1,1) = (-2,1,-1)$$

### 2.6.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.6.5** *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real $\lambda$ la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 : x+z=\lambda \\ \pi_2 : 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2 \\ \pi_3 : 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda \end{array}$$

**Solución:**

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & \lambda \\ 4x+ & (\lambda-2)y+ & (\lambda+2)z= & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1)x- & & (\lambda+6)z= & -\lambda \end{array}\right.$$

La matriz asociada a este sistema será

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3\lambda+8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2,\ \ \lambda = -\frac{8}{3}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -\frac{8}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ el sistema es compatible determinado, el sistema tiene, por tanto, solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -56$$

El sistema es incompatible, y si comparamos plano a plano tenemos

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ paralelos} \\ \frac{1}{6} \neq \frac{1}{-8} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \frac{4}{6} \neq \frac{4}{-8} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Si $\lambda = -\frac{8}{3}$ el sistema es incompatible, ya que Rango$(\overline{A}) = 3$, ahora vamos a comparar plano a plano en el sistema de la matriz asociada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4} \neq \frac{0}{-14/3} \Longrightarrow \pi_1$ y $\pi_2$ se cortan
$\frac{1}{-10/3} = \frac{1}{-10/3} \neq \frac{-8/3}{8/3} \Longrightarrow \pi_1$ y $\pi_3$ son paralelos
$\frac{4}{-10/3} \neq \frac{-14/3}{0} \Longrightarrow \pi_2$ y $\pi_3$ se cortan

**Problema 2.6.6** *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r: \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & =3 \\ x+ & y & -z & =0 \end{array} \right. , \quad s: \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & & z & =4 \\ 2x- & y & & =7 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta $t$, perpendicular a $r$ y a $s$, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta $s$ con la recta $t$ obtenida en el apartado anterior.

**Solución:**

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,-3,-3) \end{array} \right. , \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,-2,-1) \\ P_s(0,-7,-4) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (1,1,2), \quad \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = (-1,-2,-1)$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array} \right| = (3,-1,-1)$$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3,-1,-1) \\ P_t(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) Sustituimos $t$ en $s$ y tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + \lambda = 4 \\ 6\lambda + \lambda = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda = 1$$

El punto de corte será $(3,-1,-1)$.

**Opción B**

**Problema 2.6.7** *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo $m$ un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1=0 \\ - & y+ & z+ & 1=0 \end{array}\right.$$

**Solución:**

a) Basta dar dos valores a $m$ que sean distintos:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} m=0 \Longrightarrow & - & 2y & +3z+1= & 0 \\ m=-1 \Longrightarrow & -x- & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

La intersección de estos dos planos sería la recta pedida, que en forma paramétrica

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right|=(9,-3,-2),\ \ P_r(-6,2,1)\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-6+9\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array}\right.$$

b) Sustituyendo este punto en la familia tenemos

$$m+(m-2)+m+1=0\Longrightarrow m=\frac{1}{3}$$

El plano buscado será

$$\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}-2\right)y+3\left(\frac{1}{3}+1\right)z+\left(\frac{1}{3}+1\right)=0\Longrightarrow x-5y+12z+4=0$$

c)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right|=(-2,-1,-1) \\ \\ P_r(1,2,1) \end{array}\right.$$

Los vectores $(m,m-2,3m+3)$ y $(-2,-1,-1)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que ser cero

$$-2m-m+2-3m-3=0\Longrightarrow m=-\frac{1}{6}$$

Sustituyendo

$$-\frac{1}{6}x+\left(-\frac{1}{6}-2\right)y+3\left(-\frac{1}{6}+1\right)z+\left(-\frac{1}{6}+1\right)=0\Longrightarrow x+13y-15z-5=0$$

## 2.7. Año 2006

### 2.7.1. Modelo

**Opción A**

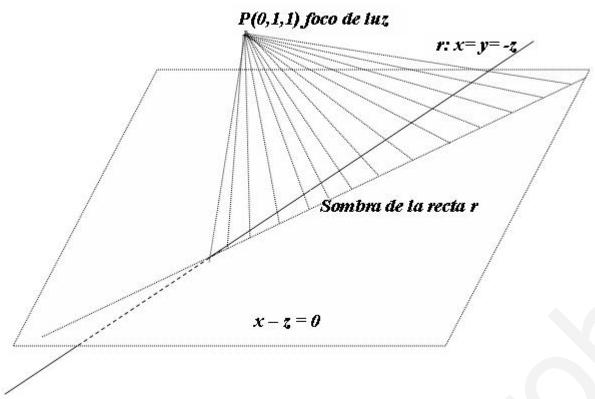
**Problema 2.7.1** *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x=y=-z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

**Solución:**




$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

El plano que contiene a $P$ y a $r$ será:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x - y + z = 0$$

La proyección de $r$ será la intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi$:

$$s : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El corte con el plano $z = 1$ será $z = \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1,\ \ y = 3 \Longrightarrow (1, 3, 1)$

**Problema 2.7.2** *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 6, 5) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 0) \\ P_s(3, -4, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2) = 2(-3, 1, 1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-3, 1, 1) \\ P_t(2, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.7.3** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \qquad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de $s$ al plano anterior.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 1) \\ P_r(-1, -2, -3) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{array} \right.$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x+1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 5y - 4z - 19 = 0$$

b)

$$d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{11\sqrt{2}}{5}$$

## 2.7.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.7.4** *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta $t$ que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 2, -4) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ P_s(2, -1, -2) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{OP_r} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OP_s} = (2, -1, -2)$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right. \qquad t : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 0 & -4 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 3 & x-2 \\ -1 & 1 & y+1 \\ -2 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(3, -5, -4)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right. \qquad t : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right.$$

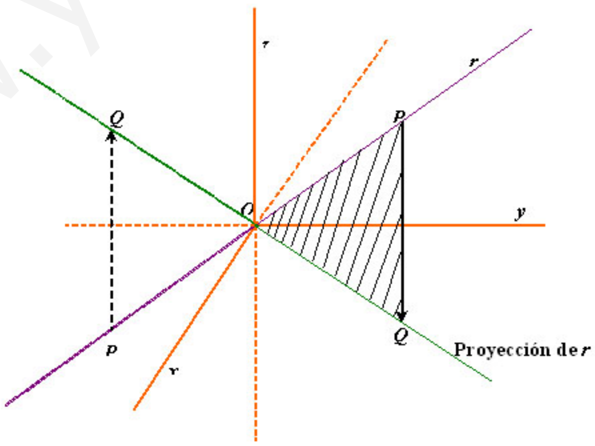
$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -2 & x+1 \\ -5 & 2 & y-2 \\ -4 & -4 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & 3 & x-2 \\ -5 & 1 & y+1 \\ -4 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.7.5** *(2 puntos)* Sea $r$ la recta que pasa por el origen de coordenadas $O$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto $P$ contenido en dicha recta, tal que si se llama $Q$ a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo $OPQ$ tenga área 1.

**Solución:**



$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(4,3,1)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=4\lambda\\ y=3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda,3\lambda,\lambda)$, y su proyección sobre el plano $z=0$ será el punto $P(4\lambda,3\lambda,0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ forman el triángulo $OPQ$, para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda\\ 4\lambda & 3\lambda & 0\end{array}\right|=(-3\lambda^2,4\lambda^2,0)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4+16\lambda^4}=\frac{5\lambda^2}{2}=1\Longrightarrow\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Si $\lambda=\sqrt{\frac{2}{5}}\Longrightarrow P\left(4\sqrt{\frac{2}{5}},3\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Si $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{5}}\Longrightarrow P\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}},-3\sqrt{\frac{2}{5}},-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

**Problema 2.7.6** *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r:\frac{x+4}{-3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z}{1}\qquad s:\left\{\begin{array}{l}x+2y-5z-5=0\\ 2x+y+2z-4=0\end{array}\right.$$

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-3,4,1)\\ P_r(-4,7,0)\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,-4,-1)\\ P_s(1,2,0)\end{array}\right.\qquad \overrightarrow{P_rP_s}=(5,-5,0)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc}5 & -5 & 0\\ -3 & 4 & 1\\ 3 & -4 & -1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\text{Rango}\left(\begin{array}{ccc}5 & -5 & 0\\ -3 & 4 & 1\end{array}\right)=2$$

Luego las rectas son paralelas.

### 2.7.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.7.7** *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de $A$ y $B$.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a $A$ es igual a la distancia de $A$ a $B$.

c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo $ABC$ es rectángulo con el ángulo recto en el vértice $A$.

**Solución:**

a) $d(A,X) = d(B,X)$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$$

$$2x-2y+2z-1=0$$

Se trata de un plano que se llama mediador.

b) $d(A,B) = d(A,X)$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{3}$$

$$x^2+y^2+z^2-2y-2=0$$

Se trata de una esfera

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ como $C$ es un punto del plano $x+y+z=3$ tendrá de coordenadas $C(3-\mu-\lambda,\mu,\lambda)$. Luego:

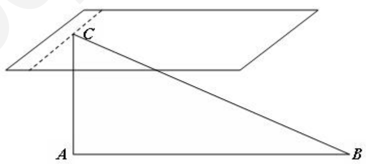
$$\overrightarrow{AC} = (3-\mu-\lambda,\mu,\lambda)-(0,1,0) = (3-\mu-\lambda,\mu-1,\lambda)$$

$$(3-\mu-\lambda,\mu-1,\lambda)\cdot(1,-1,1) = 3-\mu-\lambda-\mu+1+\lambda=0 \Longrightarrow \mu=2$$

Luego los puntos de ese plano con la condición de perpendicularidad con el vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$$\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Se trata de una recta.



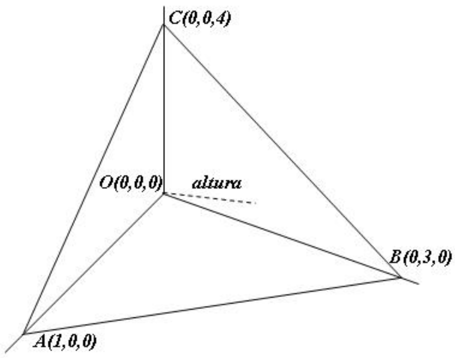

## Opción B

**Problema 2.7.8** *(3 puntos)* Un plano $\pi$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$ y $C(0,0,4)$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda>0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde $O$ es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos) Para el valor de $\lambda$ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice $O$.

**Solución:**




a)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(1,0,0)\\ \overrightarrow{OB}=(0,\lambda,0)\\ \overrightarrow{OC}=(0,0,4)\end{array}\right. \Longrightarrow V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}0&0&4\\0&\lambda&0\\1&0&0\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-4\lambda|=2\Longrightarrow$$

$$\frac{4\lambda}{6}=2\Longrightarrow \lambda=3$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-1,0,4)\\ \overrightarrow{AB}=(-1,3,0)\\ A(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}-1&-1&x-1\\0&3&y\\4&0&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi: 12x+4y+3z-12=0$$

$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}}=\frac{12}{13}\ u$$

Otra forma de resolver el problema sería:

$$S_{\text{base}}=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\-1&0&4\\-1&3&0\end{array}\right||=\frac{|(-12,-4,-3)|}{2}=\frac{13}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot h\Longrightarrow 2=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{2}\cdot h\Longrightarrow h=\frac{12}{13}\ u$$

# 2.8. Año 2007

## 2.8.1. Modelo

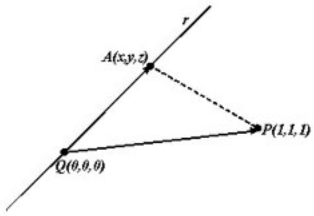
### Opción A

**Problema 2.8.1** *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c}x-y=0\\x+2y+3z=0\end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de $r$, hallar todos los puntos $A$ contenidos en $r$ tales que el triángulo de vértices $A$, $P$ y $Q$ tenga área 1.

**Solución:**

Un punto $A(x,y,z)$ de la recta sería

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow A(\lambda,\lambda,-\lambda)$$




$$\overrightarrow{QA}=(\lambda,\lambda,-\lambda),\quad \overrightarrow{QP}=(1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2\lambda,-2\lambda,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=1$$

Luego: $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**Problema 2.8.2** *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano $\pi_1$ que contiene a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

**Solución:**

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1) \\ \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array}\right|=0\Longrightarrow x-y+z-2=0$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-2=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{2}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

**Opción B**

**Problema 2.8.3** *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

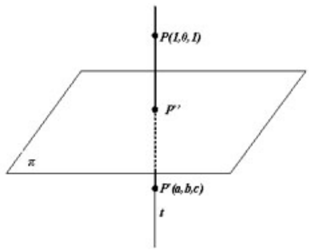
y el plano $\pi: x+y+z=0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener un punto $P'$, simétrico de $P$ respecto del plano $\pi$.

b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta $s$ que contiene al punto $P$, corta a la recta $r$ y es paralela al plano $\pi$.

**Solución:**

a) Sería el siguiente dibujo




Calculamos primero el punto $P''$ corte de la recta $t$ y el plano $\pi$, donde $t$ es una recta perpendicular a $\pi$ y que pasa por $P$.

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,1) \\ P_t(1,0,1) \end{array} \right. \qquad t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$P''$ es el punto medio entre $P$ y $P'$

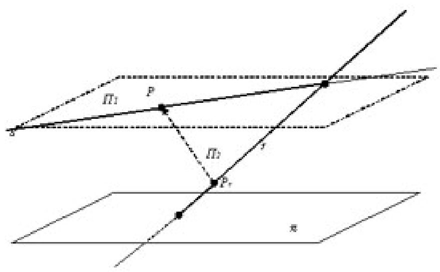
$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano $\pi_1$ es paralelo a $\pi$ y contiene a $P$

El plano $\pi_2$ contiene a $P$ y a $r$

Sería el siguiente dibujo



$\pi_1 : x + y + z + \lambda = 0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 1 + 0 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow \pi_1 :$ $x + y + z - 2 = 0$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -2) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

## 2.8.2. Ordinaria

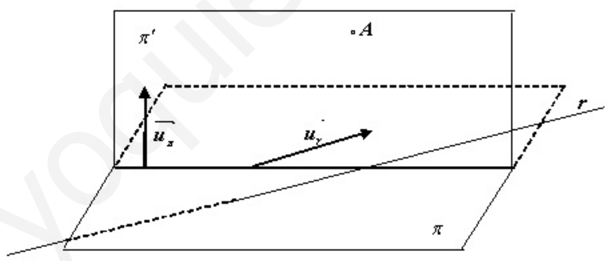
**Opción A**

**Problema 2.8.4** *(3 puntos)* Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

a) (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por $A$, es paralelo a $r$ y perpendicular a $\pi$.

b) (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por $A$, corta a $r$ y es paralela a $\pi$.

**Solución:**

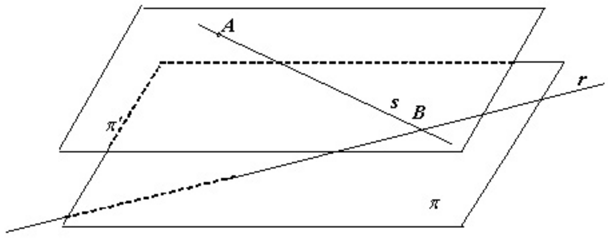



a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 0) \\ P_r(-1, 0, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, -3)$$

$$\pi' : \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y+2 \\ 0 & -3 & z+3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 3x + 3y - z = 0$$




b)

Construyo un plano $\pi'$ paralelo a $\pi$ que contenga a $A$:

$$x-2y-3z+\lambda=0\Longrightarrow 1+4+9+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-14$$

$$\pi': x-2y-3z-14=0$$

Corto con este plano a la recta $r$ y obtengo el punto $B$:

$$-1-\lambda-2\lambda-14=0\Longrightarrow \lambda=-5\Longrightarrow B\,(4,-5,0)$$

La recta que buscamos pasa por $A$ y $B$:

$$\overrightarrow{AB}=(3,-3,3)=3(1,-1,1)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(1,-2,-3)\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=-3+\lambda\end{array}\right.$$

**Opción B**

**Problema 2.8.5** *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda,2,\lambda),\quad B(2,-\lambda,0),\quad C(\lambda,0,\lambda+2)$$

a) (1 punto) ¿Existe algún valor de $\lambda$ para el que los puntos $A$, $B$ y $C$ están alineados?

b) (1 punto) Comprobar que si $A$, $B$ y $C$ no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo $ABC$ para el valor $\lambda=0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

**Solución:**

a)

$$\left|\begin{array}{ccc}\lambda&2&\lambda\\ 2&-\lambda&0\\ \lambda&0&\lambda+2\end{array}\right|=-2(\lambda^2+2\lambda+4)\neq 0\text{ Siempre}\Longrightarrow\text{No están alineados}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2-\lambda,-\lambda-2,-\lambda)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-2,2)\\ \overrightarrow{BC}=(\lambda-2,\lambda,\lambda+2)\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3\lambda^2+8}\\ |\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}\\ |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3\lambda^2+8}\end{array}\right.$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

c)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,2) \\ A(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1,-1,0) \\ \overrightarrow{v} = (0,-1,1) \\ P(0,2,0) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ -1 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x+y+z-2=0$$

$$d(O,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u^2$$

### 2.8.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.8.6** *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

**Solución:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array} \right. \quad \text{un punto de } r \text{ es } P(3+\lambda, 5+\lambda, z=-1+\lambda)$$

$$d(P,\pi) = \frac{|2(3+\lambda) - (5+\lambda) + 2(-1+\lambda) + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1(4,6,0), \quad P_2(2,4,-2)$$

**Problema 2.8.7** *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

**Solución:**

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (1,1,2), \quad \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = -(1,2,1)$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right| = (-3,1,1) \quad t : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{y-2}{1}$$

**Opción B**

**Problema 2.8.8** *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2},\quad s:\left\{\begin{array}{l} x-3y-5=0\\ x-3z-8=0\end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano $\pi$ y la recta $s$.

**Solución:**

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,0)\\ P_r(0,1,2)\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -8\end{array}\right|=3(3,1,1)$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 2 & 1 & z-2\end{array}\right|=-3x+5y+4z-13=0$$

$$\pi:3x-5y-4z+13=0$$

b) Elegimos un punto de la recta $s$ por ejemplo $P_s(2,-1,-2)$

$$d(P_s,\pi)=\frac{|6+5+8+13|}{\sqrt{9+25+16}}=\frac{32}{\sqrt{50}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

## 2.9. Año 2008

### 2.9.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.9.1** *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos $P$ y $Q$ que divide al segmento $AB$ en tres partes iguales.

b) (1 punto) Si $P$ es el punto del apartado anterior más próximo al punto $A$, determinar la ecuación del plano $\pi$ que contiene a $P$ y es perpendicular a la recta $AB$.

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano $\pi$ y la recta

$$r:\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

**Solución:**

a) $\overrightarrow{AB}=(1,1,-4)-(1,0,2)=(0,1,-6)$.

$$P=(1,0,2)+\frac{1}{3}(0,1,-6)=\left(1,\frac{1}{3},0\right)$$

$$Q=(1,0,2)+\frac{2}{3}(0,1,-6)=\left(1,\frac{2}{3},-2\right)$$

b)

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

c)

$$r : \begin{cases} x = & 3 - 2\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow 3\lambda - 18(-1 + \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.9.2** *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

**Solución:**

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), \ \ P_r(0, -3, 0) \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$P(\lambda, -3 - \lambda, -2\lambda), \quad \pi : 3x + 4y = 4$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3\lambda + 4(-3 - \lambda) - 4|}{5} = \frac{1}{3} \Longrightarrow |-\lambda - 16| = \frac{5}{3} \Longrightarrow |\lambda + 16| = \frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda + 16 = \frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{43}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{43}{3}, -\frac{52}{3}, \frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda + 16 = -\frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{53}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{53}{3}, -\frac{62}{3}, \frac{106}{3}\right)$$

**Problema 2.9.3** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k + 1, k)$ y $C(k + 1, 4, 3)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor de $k$ el triángulo $BAC$ es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice $A$.

b) (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo $ABC$.

**Solución:**

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2k + 1, k) - (1, 3, -2) = (1, 2k - 2, k + 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (k + 1, 4, 3) - (1, 3, -2) = (k, 1, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \Longrightarrow k = -1$$

b) Si $k = 0$ :

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 5)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} | = |(-12, -5, 1)| = \frac{\sqrt{170}}{2}\, u^2$$

### 2.9.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.9.4** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas $r$, $s$ según los valores del parámetro $a$.

b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-a, -1, a) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan.

b) Si $a = 1$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -1, 1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases} , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} | = |(0, 2, 2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

**Opción B**

**Problema 2.9.5** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano $\pi$ determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto $D$ al plano $\pi$.

**Solución:**

a) Construimos los vectores:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3)\\ \overrightarrow{AD}=(1,2,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{array}\right| = 7\neq 0 \Longrightarrow$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3)\\ A(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ -2 & -3 & z-1\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 2x+3y+z-1=0$$

c)

$$d(D,\pi)=\frac{|2+6-1|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

**Problema 2.9.6** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi: 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ que pasa por el punto $P$.

b) (0,5 puntos) Hallar el punto $Q$ intersección de $\pi$ con $r$.

c) (0,5 puntos) Hallar el punto $R$ intersección de $\pi$ con el eje $OY$.

d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo $PQR$

**Solución:**

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,2,-1)\\ P_r(1,2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+3\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=3-\lambda\end{array}\right.$$

b)

$$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)-(3-\lambda)+10=0 \Longrightarrow \lambda=-1$$

Luego el punto buscado es el $Q(-2,0,4)$ (Sustituyendo el valor de $\lambda$ en la recta $r$.

c) Cuando el plano $\pi$ corta al eje $OY$ tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \Longrightarrow y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

d) Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\overrightarrow{RP} = (1, 7, 3)$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$

### 2.9.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.9.7** *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos $R$ tales que la distancia entre $P$ y $R$ sea igual a la distancia entre $Q$ y $R$. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto) Hallar todos los puntos $S$ contenidos en la recta que pasa por $P$ y $Q$ que verifican $\text{dist}(P, S) = 2\text{dist}(Q, S)$, donde "dist" significa distancia.

**Solución:**

a) Sea $R(x, y, z)$:

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Longrightarrow |(x - 1, y - 1, z - 3)| = |(x, y - 1, z)| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2 + z^2} \Longrightarrow x + 3z - 5 = 0$$

Se trata, por tanto, de un plano.

b) La recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{QP} = (1, 0, 3) \\ Q(0, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \Longrightarrow |(\lambda - 1, 0, 3\lambda - 3)| = 2|(\lambda, 0, 3\lambda)|$$

$$\sqrt{(\lambda - 1)^2 + (3\lambda - 3)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2} \Longrightarrow (\lambda - 1)^2 + (3\lambda - 3)^2 = 4(\lambda^2 + (3\lambda)^2)$$

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Los puntos buscados serán:

$$S_1(-1, 1, -3) \text{ y } S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$$

**Problema 2.9.8** *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta $t$ perpendicular común a ambas.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,3)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,3,4)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$$

$$u_t=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{array}\right|=(-1,2,-1)$$

Obtengo la recta $t$ como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(-1,2,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,2,3)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(-1,2,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,3,4)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{ccc}-1 & 1 & x+1\\ 2 & 2 & y-2\\ -1 & 3 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 4x+y-2z+2=0$$

$$\pi_2:\left|\begin{array}{ccc}-1 & 2 & x\\ 2 & 3 & y-1\\ -1 & 4 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 11x+2y-7z-2=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}4x+y-2z+2=0\\ 11x+2y-7z-2=0\end{array}\right.$$

**Opción B**

**Problema 2.9.9** *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1: x+y+z=1$$

y la recta:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto $P$ determinado por la intersección de $r$ con $\pi_1$.

b) (2 puntos) Hallar el plano $\pi_2$ paralelo a $\pi_1$ y tal que el segmento de la recta $r$ comprendido entre los planos $\pi_1$, $\pi_2$ tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

**Solución:**

a) Ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=-4\lambda\end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano: $1+2\lambda-1+3\lambda-4\lambda=1\Longrightarrow\lambda=1$, luego el punto buscado es: $P(3,2,-4)$.

b) Calculamos un punto $Q(1+2\lambda,-1+3\lambda,-4\lambda)$ de la recta $r$ que dista $\sqrt{29}$ unidades del punto $P$ calculado anteriormente:

$$|\overrightarrow{PQ}|=|(-2+2\lambda,-3+3\lambda,4-4\lambda)|=\sqrt{4(\lambda-1)^2+9(\lambda-1)^2+16(1-\lambda)^2}=$$

$$\sqrt{29}(\lambda-1)=\sqrt{29}\Longrightarrow \lambda=2$$

Luego $Q(5,5,-8)$ que, estará contenido en el plano que buscamos $\pi_2$ cuya ecuación será: $x+y+z=\mu$ por ser paralelo a $\pi_1$. Para calcular $\mu$ sustituimos el punto $Q$ en el plano $\pi_2$ y tenemos

$$\mu=5+5-8=2\Longrightarrow \pi_2: x+y+z=2$$

La otra solución sería:

$$\sqrt{29}(1-\lambda)=\sqrt{29}\Longrightarrow \lambda=0$$

Luego $Q(1,-1,-4)$ que, estará contenido en el plano que buscamos $\pi_2$ cuya ecuación será: $x+y+z=\mu$ por ser paralelo a $\pi_1$. Para calcular $\mu$ sustituimos el punto $Q$ en el plano $\pi_2$ y tenemos

$$\mu=1-1-4=-4\Longrightarrow \pi_2: x+y+z=-4$$

## 2.10. Año 2009

### 2.10.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.10.1** *(3 puntos)* Dados el plano $\pi: x+2y-z=2$, la recta:

$$r: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2,3,2)$, perteneciente al plano $\pi$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de $\pi$ y $r$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta $t$ contenida en $\pi$, que pasa por el punto $P$ y que corta perpendicularmente a $r$.

c) (1,5 puntos) Sea $Q$ el punto intersección de $r$ y $t$. Si $s$ es la recta perpendicular al plano $\pi$ y que contiene a $P$, y $R$ es un punto cualquiera de $s$, probar que la recta determinada por $R$ y $Q$ es perpendicular a $r$.

**Solución:**

a) De dos formas diferentes:

- ☛ La ecuación de la recta en paramétricas es $r: \left\{\begin{array}{l} x=3+2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=5+4\lambda\end{array}\right.$, y si sustituimos en el plano $\pi$ tenemos:

$$(3+2\lambda)+2(2+\lambda)-(5+4\lambda)=2\Longrightarrow 2=2$$

expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de $\lambda$ y, por tanto, la recta $r$ está contenida en el plano $\pi$.

☛ Ponemos la recta $r$ como intersección de dos planos:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{z-5}{4} \Longrightarrow 2x - z = 1$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \Longrightarrow x - 2y = -1$$

Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano $\pi$

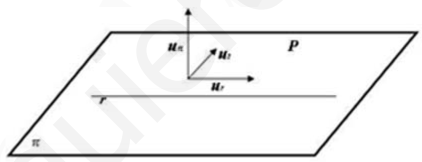
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 2 \\ x- & 2y & = & -1 \\ 2x & - & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \\ \\ F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

El plano $\pi$ y la recta $r$ tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

b) Para que el enunciado tenga sentido es necesario que el punto $P$ esté en el plano $\pi$, basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.



El vector $\overrightarrow{u_t}$ de la recta $t$ que buscamos tiene que ser perpendicular al vector característico del plano $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1)$ y al vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4)$ de la recta $r$. Luego:

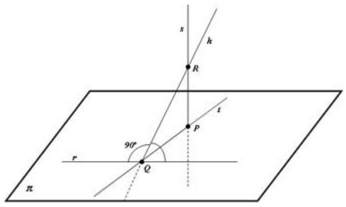
$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right| = 3(3, -2, -1)$$

$$t : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow t : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano $\pi$.

c) La situación geométrica es la siguiente:
Tenemos que encontrar una recta $s$ perpendicular al plano $\pi$ y que pase por el punto $P$

$$s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array}\right.$$




Un punto cualquiera $R$ de la recta $s$ es $R(-2+\lambda, 3+2\lambda, 2-\lambda)$.

Ahora buscamos el punto de corte $Q$ entre las rectas $t$ y $r$

$$r : \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 5+4\lambda \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x = -2+3\mu \\ y = 3-2\mu \\ z = 2-\mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3+2\lambda = -2+3\mu \\ 2+\lambda = 3-2\mu \\ 5+4\lambda = 2-\mu \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Longrightarrow Q(1,1,1)$$

Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda)$ y $\overrightarrow{u_r} = (2,1,4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro $\lambda$

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{u_r} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda) \cdot (2,1,4) = -6+2\lambda+2+2\lambda+4-4\lambda = 0$$

Luego la recta $h$ que pasa por los puntos $Q$ y $R$ es siempre perpendicular a la recta $r$ sea cual sea el punto $R$ que tomemos de la recta $s$.

**Opción B**

**Problema 2.10.2** *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

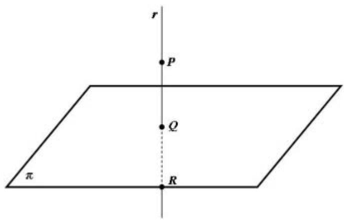
a) (1,5 puntos) Determinar el punto $Q$ de intersección del plano $\pi$ con la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$. Hallar el punto simétrico del punto $P$ respecto del plano $\pi$.

b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano $\pi$ que contiene al punto $H$ que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto $P$ en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

**Solución:**

a) Tenemos

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_r = P(1,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$$



Sustituyendo en el plano tenemos

$$2(1+2\lambda) - (-1-\lambda) + (2+\lambda) - 11 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en $r$ tenemos $Q(3,-2,3)$.

El punto $Q$ es el punto medio entre $P$ y el punto $R$ que buscamos

$$Q = \frac{P+R}{2} \Longrightarrow R = 2Q - P = 2(3,-2,3) - (1,-1,2) = (5,-3,4)$$

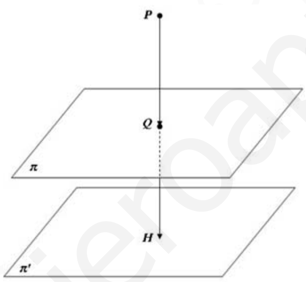
Luego $R(5,-3,4)$ es el punto simétrico de $P$ respecto del plano $\pi$.

b) El vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,1) = \overrightarrow{u_\pi}$ y es perpendicular al plano $\pi$. Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda|\overrightarrow{u_\pi}| = \lambda\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1,-1,2) + 5(2,-1,1) = (11,-6,7)$. El plano $\pi'$ que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que $\pi$




$$\pi' : 2x - y + z = \lambda \Longrightarrow 22 + 6 + 7 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 35 \Longrightarrow 2x - y + z = 35$$

**Nota:** Podemos comprobar si $d(P,\pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P,\pi') = \frac{|2+1+2-35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \;\text{ y }\; |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64+16+16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

### 2.10.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.10.3** *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico $P$ del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano $\pi$.

b) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo $\alpha$ que forman el plano $\pi$ y el plano $z = 0$.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro $T$ determinado por el plano $\pi$, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

**Solución:**

a) Tres pasos:

- ☛ Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0,0,0)$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,3,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

- ☛ Calculo el punto de corte $Q$ de $\pi$ con $r$:

$$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{11} \Longrightarrow Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

- ☛ $P$ es el punto simétrico de $O$ respecto de $Q$:

$$\frac{P+O}{2} = Q \Longrightarrow P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

c) Si $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow A(4,0,0)$
Si $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow B(0,4/3,0)$
Si $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow C(0,0,4)$

$$\overrightarrow{OA} = (4,0,0),\ \ \overrightarrow{OB} = (0,4/3,0),\ \ \overrightarrow{OC} = (0,0,4)$$

$$V = \frac{1}{6}|\left| \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right|| = \frac{32}{9}\ u^2$$

**Opción B**

**Problema 2.10.4** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1},\ \ s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas $r$ y $s$.

c) (1 punto) Estudiar si la recta $t$ paralela a $r$ y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta $s$.

**Solución:**

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(-2,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}2 & 2 & x-1\\ 3 & 1 & y-2\\ 1 & 1 & z\end{array}\right|=0 \Longrightarrow x-2z-1=0$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,-2,2)$:

$$\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|=|\left|\begin{array}{ccc}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{array}\right||=|-14|=14$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{array}\right||=|(2,0,-4)|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{14}{2\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}\ u$$

c)

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,3,1)\\ P_t(0,0,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(-2,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_s}=(-2,0,2)$$

$$\left|\begin{array}{ccc}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{array}\right|=-12 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

### 2.10.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.10.5** *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{a},\quad s:\frac{x-3}{b}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros $a$, $b$ para los cuales las rectas $r$, $s$ se cortan perpendicularmente.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,a)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(b,1,-1)\\ P_s(3,0,3)\end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(3,0,3)$$

Si $r$ y $s$ son perpendiculares:

$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \Longrightarrow -a + b = -2$
Si $r$ y $s$ se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a + 2b = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a + b = -2 \\ a + 2b = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ ab + 2b = -1 \end{array} \right.$$

**Problema 2.10.6** *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a $\pi$ que se encuentran a 3 unidades de $\pi$.

**Solución:**

La ecuación de un plano paralelo a $\pi$ es $\pi' : 2x - y + 2z + \lambda = 0$ y un plano del plano $\pi$ puede ser $P(0, 1, 0)$ y tendremos que $d(P, \pi') = 3$:

$$d(P, \pi') = \frac{|0 - 1 + 0 + \lambda|}{3} = \frac{|\lambda - 1|}{3} = 3 \Longrightarrow |\lambda - 1| = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda + 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ \lambda - 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = 10 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z + 10 = 0 \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.10.7** *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r : \frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta $s$ simétrica de la recta $r$ respecto del plano $\pi$.

**Solución:**

Calculamos el punto de corte de la recta $r$ y el plano $\pi$, para ello calculamos la ecuación paramétrica de la recta y sustituimos en el plano:

$$r; \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (1 + \lambda) - \lambda - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow P(2, -1, 1)$$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P_r(1, 0, 0)$ respecto al plano $\pi$:

- Calculamos una recta $t$ perpendicular $\pi$ que pase por $P_r$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1, 1, -2) \\ P_t(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

☛ Encontramos el punto de corte de $t$ y $\pi$:

$$(1+\lambda)+\lambda-2(-2\lambda)+1=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

☛ Calculamos el punto simétrico $P'$ de $P_r$ respecto de $P''$:

$$\frac{P_r+P'}{2}=P'' \Longrightarrow P'=2P''-P_r=$$

$$2\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-(1,0,0)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La recta $s$ simétrica de $r$ respecto de $\pi$ pasa por los puntos $P$ y $P'$:

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P'P}=(2,-1,1)-\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(5,-1,-1)\\ \\ P(2,-1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}x=2+5\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

### 2.10.4. Reserva

**Opción A**

**Problema 2.10.8** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{1},\quad s:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro $\lambda$ las rectas $r$, $s$ se cortan en un punto.

b) (1 punto) Para $\lambda=23$ calcular las coordenadas del punto $P$ intersección de las rectas $r$, $s$.

c) (1 punto) Para $\lambda=23$ hallar la ecuación general del plano $\pi$ determinado por las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr}1+ & 2\alpha= & -2+ & \mu\\ -2+ & 3\alpha= & 1+ & 2\mu\\ 2+ & \alpha= & \lambda+ & 2\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=-9\\ \mu=-15\\ \lambda=23\end{array}\right. \Longrightarrow \lambda=23$$

b) Sustituyendo los valores de $\lambda$, $\alpha$ y $\mu \Longrightarrow P(-17,-29,-7)$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,2)\\ P_r(1,-2,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc}2 & 1 & x-1\\ 3 & 2 & y+2\\ 1 & 2 & z-2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: 4x-3y+z-12=0$$

**Opción B**

**Problema 2.10.9** *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores $v_1$, $v_2$ y $v_3$ son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

b) (1 punto) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

c) (1 punto) Dado el vector $\overrightarrow{v}(1, 2, 3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

*a)* $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

*b)* $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;

*c)* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

**Solución:**

a)

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = (\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3})(\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}) =$$

$$\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_3} = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2$$

b) $\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$ y llamamos $\overrightarrow{v_3} = (a, b, c)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1} = a + b - c = 0 \\ \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2} = a + c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2a \\ c = -a \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{v_3} = a(1, -2, -1)$ donde $a$ es cualquier valor real.

c) Sea $\overrightarrow{v_1} = (a, a, a)$ y $\overrightarrow{v_2} = (b, c, d)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = a(b + c + d) = 0 \Longrightarrow b + c + d = 0 \\ \overrightarrow{v} = (1, 2, 3) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} = (a + b, a + c, a + d) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} b + c + d = 0 \\ a + b = 1 \\ a + c = 2 \\ a + d = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

Luego:

$$\overrightarrow{v_1} = (2, 2, 2) \;\text{ y }\; \overrightarrow{v_2} = (-1, 0, 1)$$

## 2.11. Año 2010

### 2.11.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.11.1** *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta $t$ que corta a $r$ y $s$, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{array} \right.$$

a)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{OP_r} = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ \overrightarrow{OP_s} = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{array} \right.$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = | \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{array} \right| | = 64 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{array} \right| | = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

**Opción B**

**Problema 2.11.2** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2,2,3)$ y $B(0,-2,1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de $A$ y de $B$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (3\lambda, -2-\lambda, 1+2\lambda), \quad \overrightarrow{BP} = (2-3\lambda, 2-\lambda, 3+2\lambda)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2} = \sqrt{(2-3\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

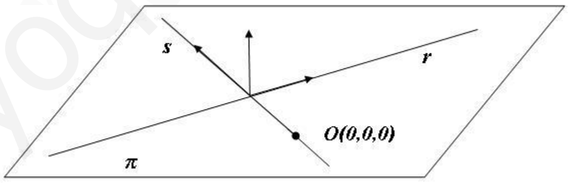
$$\lambda = 1 \Longrightarrow (5,-1,6)$$

**Problema 2.11.3** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en $\pi$, obtener la recta $s$ contenida en $\pi$ que es perpendicular a $r$, y que pasa por el origen de coordenada $O(0,0,0)$.

**Solución:**




$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ O(0,0,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(1,1,-1)$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

### 2.11.2. Ordinaria-General

**Opción A**

**Problema 2.11.4** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

a) (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a $r$ y $s$

b) (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 4) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13, -9, -1)$$

Calculamos la recta $t$ como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (13, -9, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 12x + 11y + 57z + 217 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 4) \\ \overrightarrow{u_t} = (13, -9, -1) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 35x + 53y - 22z = 0$$

$$t : \begin{cases} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, 1, -4)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = |\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}| = -5 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |(13, -9, -1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251}\ u$$

**Opción B**

**Problema 2.11.5** *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano $\pi$ determinado por $r$ y $s$.

b) (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0,1,-1)$ a la recta $s$.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ P_r(0,1,-1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,-2,1) \\ P_s(3,4,0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = (-1,-2,1)$$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (3,3,1) \Longrightarrow$ las dos rectas son paralelas, el plano que determinan es:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (3,3,1) \\ P_r(0,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 5x - 4y - 3z + 1 = 0$$

b)

$$\overrightarrow{P_sA} = (-3,-3,-1)$$

$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sA}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{array} \right|| = |(5,-4,-3)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = |(-1,-2,1)| = \sqrt{6}$$

$$d(A,s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sA}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$$

**Problema 2.11.6** *(2 puntos)* Sea el plano $\pi$ que contiene a los puntos $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ y $R(0,0,3)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos $P$, $Q$ y $R$.

b) (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano $\pi$.

**Solución:**

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (1,0,0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0,2,0) \\ \overrightarrow{OR} = (0,0,3) \end{array} \right. \Longrightarrow V = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right| = 1\ u^3$$

b) Calculamos el plano $\pi$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1, 0, 3) \\ P(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Para encontrar el punto simétrico del origen respecto a este plano seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $r$ que pasa por $O(0, 0, 0)$ y es perpendicular a $\pi$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (6, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

- ☛ Calculamos el punto de corte $O'$ de $r$ con $\pi$:

$$6(6\lambda) + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) - 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{6}{49}$$

Luego el punto de corte es:

$$O'\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$$

- ☛ El punto $O'$ es el punto medio entre los puntos $O$ y el que buscamos $O''$:

$$\frac{O + O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$$

### 2.11.3. Ordinaria-Específica

**Opción A**

**Problema 2.11.7** *(3 puntos)* Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P$ a la recta $r$.

b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto $P'$ simétrico de $P$ respecto de la recta $r$.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, 3) \\ P_r(-1, 2, -1) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP} = (3, -2, 0) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array} \right.$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}| = | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right| | = |(6, 9, 1)| = \sqrt{118}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}}\ u$$

b) Para calcular el punto simétrico seguimos los siguientes pasos:

☛ Calculo un plano $\pi$ perpendicular a $r$ que contenga a $P$:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (-2, 1, 3) \\ P(2, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow -2x + y + 3z + \lambda = 0$$

$$\Longrightarrow -4 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 7 \Longrightarrow 2x - y - 3z - 7 = 0$$

☛ Calculo el punto de corte $P''$ de este plano $\pi$ con $r$:

$$2(-1 - 2\lambda) - (2 + \lambda) - 3(-1 + 3\lambda) - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{4}{7}$$

$$P''\left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{19}{7}\right)$$

☛ El punto $P''$ es el punto medio entre $P$ y $P'$:

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{2}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{38}{7}\right) - (2, 0, -1)$$

$$P''\left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.11.8** *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de $a$ para los que la recta $r$ está contenida en el plano $\pi$.

b) (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de $\pi$.

c) (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman $r$ y $\pi$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 5) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{cases} \quad \overrightarrow{u_\pi} = (2, a, 4)$$

a) Si $r$ está contenida en el plano $\pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0$:

$$2 + 2a + 20 = 0 \Longrightarrow a = 11$$

b) Si $a = -2 \Longrightarrow \pi : 2x - 2y + 4z + 25 = 0$ y sea $s$ la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = 2(1, -1, 2) \\ P_s(-3/2, 0, -11/2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -3/2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -11/2 + 2\lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta sería $P(-3/2+\lambda, -\lambda, -11/2+2\lambda)$

$$d(P,\pi)=\frac{|-3+2\lambda+2\lambda-22+8\lambda+25|}{\sqrt{4+4+16}}=\sqrt{6}\Longrightarrow |\lambda|=1\Longrightarrow \lambda=1,\quad \lambda=-1$$

Si $\lambda=1\Longrightarrow \left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{7}{2}\right)$

Si $\lambda=-1\Longrightarrow \left(-\frac{5}{2},1,-\frac{15}{2}\right)$

c) El ángulo $\alpha$ que forma $r$ y $\pi$ es $90^\circ-\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}}\Longrightarrow \sin\alpha=\cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}})$

$$\sin\alpha=\cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}})=\frac{1-2+10}{\sqrt{30}\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

### 2.11.4. Extraordinaria-General

**Opción A**

**Problema 2.11.9** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r_1\equiv\left\{\begin{array}{l} y=1\\ z=3\end{array}\right. \qquad r_2\equiv\left\{\begin{array}{c} x=0\\ y-z=0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta $t$ que corta a $r_1$ y $r_2$ y es perpendicular a ambas.

b) (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas $r_1$ y $r_2$.

**Solución:**

$$r_1\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=1\\ z=3\end{array}\right.\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,0,0)\\ P_{r_1}(0,1,3)\end{array}\right.$$

$$r_2\equiv\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}}=(0,1,1)\\ P_{r_2}(0,0,0)\end{array}\right.$$

a)

$$\overrightarrow{u_t}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right|=(0,-1,1)$$

Se obtiene la recta $t$ perpendicular a ambas, y que las corta, como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,0,0)\\ P_{r_1}(0,1,3)\end{array}\right.\Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & x\\ -1 & 0 & y-1\\ 1 & 0 & z-3\end{array}\right|=0\Longrightarrow y+z-4=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{u_{r_2}}=(0,1,1)\\ P_{r_2}(0,0,0)\end{array}\right.\Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x\\ -1 & 1 & y\\ 1 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x=0$$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{c} y+z-4=0\\ x=0\end{array}\right.$$

b)

$$d(\overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}) = \frac{\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right]}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0,1,3), \quad |\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}| = |(0,-1,1)| = \sqrt{2}$$

$$\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

**Opción B**

**Problema 2.11.10** *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano $\pi_2$ determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores $v_1 = (0,2,6)$ y $v_2 = (1,0,b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de $a$ y $b$ para que $\pi_1$ y $\pi_2$ sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de $\pi_1$ y $\pi_2$.

c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de $\pi_1$ y $\pi_2$.

**Solución:**

$$\pi_1 : 2x - 3y + z = a; \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y-2 \\ 6 & b & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$$

a) $\pi_1$ y $\pi_2$ son paralelos si:

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{a}{-2} \Longrightarrow b = -2 \text{ y } a \neq 2$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{array} \right.$$

c) $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ donde $P(x,y,z)$:

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{14}} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \Longrightarrow \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(-2x + 3y - z - 2) \Longrightarrow \text{ no tiene solución} \end{array} \right.$$

### 2.11.5. Extraordinaria-Específica

**Opción A**

**Problema 2.11.11** *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=2\\ z=3-\lambda\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-1\\ x+y=-2\end{array}\right.$$

Determinar la ecuación de la recta $t$ que pasa por el punto $P(0,1,-2)$ y corta a las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right|=(1,-1,-1),\quad P_s(0,-2,-3)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,0,-1)\\ P_r(1,2,3)\end{array}\right.$$

Vamos a encontrar la recta $t$ como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r}=(1,1,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,0,-1)\\ P(0,1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x\\ 1 & 0 & y-1\\ 5 & -1 & z+2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi_1: x-6y+z+8=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s}=(0,-3,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,-1)\\ P(0,1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & x\\ -3 & -1 & y-1\\ -1 & -1 & z+2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi_2: 2x-y+3z+7=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l} x-6y+z+8=0\\ 2x-y+3z+7=0\end{array}\right.$$

**Opción B**

**Problema 2.11.12** *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=-2\\ x-2y=-1\end{array}\right. \qquad s:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Dados los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(a,3,-3)$, determinar el valor de $a$ para que la recta $t$ que pasa por los puntos $A$ y $B$, sea paralela a $s$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,5)\\ P_r(1,1,5)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-3,2)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right.$$

a)

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(a-1,3,-2)\\ P_t(1,0,-1)\end{array}\right. \quad \text{y } t\|s\Longrightarrow \lambda\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_s}$$

$$\lambda(a-1,3,-2)=(1,-3,2)\Longrightarrow a=0,\ \lambda=-1$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,5) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-3,2) \\ P_r(1,1,5) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 1 & -3 & y-1 \\ 5 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0$$

**Problema 2.11.13** *(2 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

**Solución:**

$$\overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi_1}}, \ \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17)$$

El plano buscado tiene de ecuación $\pi : 20x - 19y + 17z + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $(0,0,0) \Longrightarrow \lambda = 0$. Luego el plano buscado es:

$$\pi : 20x - 19y + 17z = 0$$

# 2.12. Año 2011

## 2.12.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.12.1** *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas $r$ y $s$.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano $\pi$ que contiene a las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(5,4,0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (6,4,1)$$

a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ las rectas $r$ y $s$ son paralelas.

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (6,4,1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & x+1 \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

**Problema 2.12.2** *(2 puntos)* Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta $r$ determinada por la intersección de $\alpha$ con $\beta$.

b) (1 punto). Determinar el plano $\gamma$ que es paralelo al plano $\alpha$ y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x = & 0+ & 2\lambda \\ y = & -\dfrac{3}{5}- & 2\lambda \\ z = & -\dfrac{1}{5}- & \lambda \end{array} \right.$$

Un punto de $r$ puede ser: $\left(0, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ y

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{array} \right| = 5(2, -2, -1)$$

b) $\gamma : 2x + y + 2z + \lambda = 0$ y contiene al punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$, luego:

$$2\sqrt{2} + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -(1 + 2\sqrt{2}) \Longrightarrow$$

$$\gamma : 2x + y + 2z - (1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

## Opción B

**Problema 2.12.3** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$,$C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$ y $E(1, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Demostrar que los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ son coplanarios.

b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

c) (1 punto). Hallar la distancia del punto $E$ al plano $\pi$ determinado por los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$

**Solución:**

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2), \ \overrightarrow{AC} = (6, 5, 3), \ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

Los tres vectores construidos son linealmente dependientes y, por tanto, están en el mismo plano.

b)

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,4,-2)=\sqrt{24}\\ \overrightarrow{BC}=(4,1,5)=\sqrt{42}\\ \overrightarrow{CD}=(-2,-4,2)=\sqrt{24}\\ \overrightarrow{AD}=(4,1,5)=\sqrt{42}\end{array}$$

Los lados son iguales dos a dos, luego se trata de un paralelogramo.

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 2&4&-2\\ 4&1&5\end{vmatrix}|=|2(11,-9,-7)|=2\sqrt{251}\,u^2$$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,4,-2)\\ \overrightarrow{AD}=(4,1,5)\\ A(1,-3,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix}2&4&x-1\\ 4&1&y+3\\ -2&5&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 11x-9y-7z-38=0$$

$$d(E,\pi)=\frac{|11-14-38|}{\sqrt{251}}=\frac{41\sqrt{251}}{\sqrt{251}}\,u$$

### 2.12.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.12.4** *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1\equiv\ x=y=z,\ \ r_2\equiv\left\{\begin{array}{l}y=0\\ z=0\end{array}\right.,\ \ r_3\equiv\left\{\begin{array}{l}x=0\\ z=0\end{array}\right.$$

con el plano $\pi\equiv 2x+3y+7z=24$.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta $s$ que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-2},\ \ r_5\equiv\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$$

**Solución:**

a) Llamamos $A$ al punto intersección de $\pi$ con $r_1$:

$$2x+3x+7x=24\Longrightarrow x=2\Longrightarrow A(2,2,2)$$

Llamamos $B$ al punto intersección de $\pi$ con $r_2$:

$$2x=24\Longrightarrow x=12\Longrightarrow B(12,0,0)$$

Llamamos $C$ al punto intersección de $\pi$ con $r_3$:

$$3y=24\Longrightarrow y=8\Longrightarrow B(0,8,0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2,2,2)\ \ \overrightarrow{OB} = (12,0,0)\ \ \overrightarrow{OC} = (0,8,0)$$

$$V = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} \right| = 32\,u^3$$

b) Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{r_4}} \times \overrightarrow{u_{r_5}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4,-3,-1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_4}} = (1,2,-2) \\ P_{r_4}(-1,5,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 8x + 7y + 11z - 16 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_5}} = (2,3,-1) \\ P_{r_4}(0,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x + y + 9z - 8 = 0$$

La recta buscada será:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.12.5** *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

**Solución:**

a)

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \Longrightarrow \text{se cortan}$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -1/3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

La recta intersección viene determinada por el punto $P_t\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ y el vector director $\overrightarrow{u_t} = (0,2,1)$.

Otra manera de calcular estos datos sería $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$, y el punto $P_t$, dando un valor cualquiera (mismamente $z = 0$) y resolviendo el sistema que queda.

**Problema 2.12.6** *(2 puntos)* Se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano $\pi_1$ que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.

b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano $\pi_2$ que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (-2,1,1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $P$.

**Solución:**

a)
$$\pi_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,1) \\ \text{A(1,0,0)} \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1 : \left|\begin{array}{ccc} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 2x+y+2z-2=0$$

b) $-2x+y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow -2+2+3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$:
$$\pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0$$

c) $\overrightarrow{AP} = (0,2,3)$:
$$V = \frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right|| = \frac{1}{6}|-8| = \frac{4}{3}\,u^3$$

### 2.12.3. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.12.7** *( 3 puntos).* Dados los planos
$$\pi_1 : 2x+3y+z-1=0; \quad \pi_2 : 2x+y-3z-1=0,$$
y la recta
$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2};$$
se pide:

a) (1 punto). El punto o puntos de $r$ que equidistan de $\pi_1$ y $\pi_2$.

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que $\pi_1$ forma con los planos coordenados $XY$, $XZ$ e $YZ$.

c) (1 punto). La proyección ortogonal de $r$ sobre el plano $\pi_2$.

**Solución:**
$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{array}\right.$$

a) $d(P_r,\pi_1)=d(P_r,\pi_2)$:

$$\frac{|2(1+2\lambda)+3(-1+\lambda)+(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{|2(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-3(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$|-4+9\lambda|=|6-\lambda|\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4+9\lambda=6-\lambda\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow P_r'(3,0,0)\\ -4+9\lambda=-6+\lambda\Longrightarrow\lambda=-1/4\Longrightarrow P_r'(1/2,-5/4,-5/2)\end{array}\right.$$

b) Corte de $\pi_1$ con el eje $OX$: hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow A(1/2,0,0)$.

Corte de $\pi_1$ con el eje $OY$: hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow B(0,1/3,0)$.

Corte de $\pi_1$ con el eje $OZ$: hacemos $x=0$ e $y=0\Longrightarrow C(0,0,1)$.

Los vectores que forman estos puntos con el origen son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA}=(1/2,0,0);\quad\overrightarrow{OB}=(0,1/3,0);\quad\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1\end{array}\right|=\frac{1}{36}\,u^2$$

c) Obtenemos esta recta como intersección de dos planos, uno de ellos será $\pi_2$ y el otro será un plano $\pi$ perpendicular a $\pi_2$ y que contiene a $r$:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-3)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,2)\\ P_r(1,-1,-2)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}2&2&x-1\\1&1&y+1\\-3&2&z+2\end{array}\right|=0\Longrightarrow\pi:x-2y-3=0$$

$$\text{Proyección}:\left\{\begin{array}{l}x-2y-3=0\\2x+y-3z-1=0\end{array}\right.$$

**Opción B**

**Problema 2.12.8** *(3 puntos).* Dado el punto $P(0,1,1)$ y las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1},\quad s:\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de $P$ respecto a $r$.

b) (1,5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto $P$, tiene dirección perpendicular a la recta $r$ y corta a la recta $s$.

**Solución:**

a) Lo calculamos siguiendo los tres pasos siguientes:

- ☛ Calculamos un plano $\pi$ perpendicular a $r$ que contenga a $P$:

$$2x+y-z+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow\pi:2x+y-z=0$$

☛ Calculamos el punto de corte $P'$ de $\pi$ con $r$:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow$$

$$2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - (-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

☛ El punto que buscamos $P''$ tiene que cumplir:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

b) Calculo un plano $\pi \perp r$, que contenga a $P$, calculado en el apartado anterior $\pi : 2x+y-z = 0$, y el punto de corte $P_1$ de este plano con la recta $s$

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1 = O(0,0,0)$$

La recta $t$ que buscamos pasa por los puntos $O$ y $P$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (0,1,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

## 2.13. Año 2012

### 2.13.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.13.1** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(0,1,3)$, se pide:

a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de $A$, $B$ y $C$. ¿Cuáles de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A$, $B$ y $C$.

**Solución:**

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A$, $B$ y $C$ será la recta en la que se cortan los planos mediadores definidos entre $A$ y $B$, entre $A$ y $C$ y entre $B$ y $C$. Calculando dos de ellos será suficiente.

Plano mediador entre $A$ y $B$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} \Longrightarrow 2x + 2y - 6z + 1 = 0$$

Plano mediador entre $A$ y $C$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \Longrightarrow x - 2y - z + 2 = 0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z+1=0\\ x-2y-z+2=0\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(7,2,3)\\ P_r\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1+7\lambda\\ \\ y=\dfrac{1}{2}+2\lambda\\ \\ z=3\lambda\end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano $\pi$:

$$2(-1+7\lambda)+2\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)+2(3\lambda)+1=0\Longrightarrow\lambda=0$$

El único punto es el $\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$.

b) La ecuación del plano que contiene a los puntos $A$, $B$ y $C$ vendrá determinada por:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,2,1)\\ A(1,-1,2)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi':\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & x-1\\ 1 & 2 & y+1\\ -3 & 1 & z-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow 7x+2y+3z-11=0$$

**Opción B**

**Problema 2.13.2** *(3 puntos)* Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi:x-2y+2z+4=0,\quad \pi'=2x+2y-z-2=0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de $\pi$ y $\pi'$.

**Solución:**

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z+4=0\\ 2x+2y-z-2=0\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda\\ y=5\lambda\\ z=-2+6\lambda\end{array}\right.$$

En su forma continua:

$$r:\frac{x}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{6}$$

$$u_r=u_\pi\times u_{\pi'}=\left|\begin{array}{rrr}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{array}\right|=(-2,5,6);\quad P_r(0,0,-2)$$

b) Sea $P(x,y,z)$ un punto tal que $d(P,\pi)=d(P,\pi')$:

$$\frac{|x-2y+2z+4|}{\sqrt{9}}=\frac{|2x+2y-z-2|}{\sqrt{9}}\Longrightarrow|x-2y+2z+4|=|2x+2y-z-2|$$

Luego tenemos las soluciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z+4=2x+2y-z-2\Longrightarrow x+4y-3z-6=0\\ x-2y+2z+4=-(2x+2y-z-2)\Longrightarrow 3x+z+2=0\end{array}\right.$$

**Problema 2.13.3** *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r: \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6, 4, 4) \\ P_r(-3, 9, 8) \end{array} \right. \quad ; \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, -2, -2) \\ P_s(3, 9, 8) \end{array} \right. \quad ; \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (6, 0, 0)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{array} \right| = 0; \quad \overrightarrow{u_r} = -2\overrightarrow{u_s} \text{ y } \left| \begin{array}{rr} 6 & 0 \\ -6 & 4 \end{array} \right| = 24 \neq 0$$

Las dos rectas son paralelas.

b) Como las dos rectas son paralelas se coge un punto al azar de una de las rectas y se calcula la distancia desde este punto a la otra recta:

$$d(r, s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = 12\sqrt{\frac{2}{17}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{array} \right|| = |24(0, -1, 1)| = 24\sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{u_r}| = 2\sqrt{17}$$

### 2.13.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.13.4** *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de $a$ para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de $a$ para que el tetraedro con vértices en $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de $P_1$ y de $P_3$.

**Solución:**

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (a-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$, $\overrightarrow{P_1P_4} = (1, -3, 3)$:

$$\left| \begin{array}{crr} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{array} \right| = 7(3a-4) = 0 \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

b)

$$7=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}| \Longrightarrow |3a-4|=6 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=10/3\\ a=-2/3\end{array}\right.$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2} \Longrightarrow$$
$$4y+10z-31=0$$

**Opción B**

**Problema 2.13.5** *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1\equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z}{2}, \quad r_2\equiv \left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=5\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de $r_1$ a $r_2$.

**Solución:**

$$r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(3,-5,2)\\ P_{r_1}(2,1,0)\end{array}\right. \quad r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(-1,1,0)\\ P_{r_2}(-1,3,5)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(-3,2,5)$$

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-8\neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{|-8|}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$
$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}|=|(-2,-2,-2)|=2\sqrt{3}$$

## 2.13.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.13.6** *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(1,0,2)$ y la recta

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=2+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=3\end{array}\right.$$

determinar los puntos de $r$ que equidistan de $P$ y $Q$.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano $\pi$ que pasa por el punto $Q$ y es perpendicular a $r$.

**Solución:**

a)

$$(2+2\lambda-2)^2+(1-\lambda-1)^2+(3-(-1))^2=(2+2\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(3-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda=\frac{13}{2} \Longrightarrow \left(15,-\frac{11}{2},3\right)$$

b)

$$2x-y+\lambda=0,\ \ 2\cdot 1-1\cdot 0+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2$$

$$\pi: 2x-y-2=0$$

**Problema 2.13.7** *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo $H$ tiene vértices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de $H$.

b) (1 punto). Hallar el punto $E'$ simétrico de $E$ respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

**Solución:**

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=(2,2,4);\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=(2,-2,2)$$

a)

$$\overrightarrow{AE}=(2,6,20) \Longrightarrow V=\left|\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & 6 & 20 \end{array}\right|=112\ u^3$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

☛ Cálculo del plano que contiene la cara $ABCD$:

$$\pi\equiv\left|\begin{array}{rrc} 2 & 2 & x-4\\ -2 & 2 & y-2\\ 2 & 4 & z-8 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi\equiv 3x+y-2z+2=0$$

☛ Calculamos las ecuación de la recta $r\perp\pi$ que pasa por $E$:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=6+3\lambda\\ y=8+\lambda\\ z=28-2\lambda \end{array}\right.$$

☛ Calculamos el punto de corte $E''$ de $r$ con $\pi$:

$$3(6+3\lambda)+(8+\lambda)-2(28-2\lambda)+2=0 \Longrightarrow \lambda=2 \Longrightarrow E''(12,10,24)$$

☛

$$\frac{E+E'}{2}=E'' \Longrightarrow E'=2E''-E=(24,20,48)-(6,8,28)=(18,12,20)$$

**Opción B**

**Problema 2.13.8** *(3 puntos)* Dadas la recta $r$ y la familia de rectas $s$, mediante

$$r\equiv\left\{\begin{array}{c} x+2y=-3\\ z=1\end{array}\right. \qquad s\equiv\left\{\begin{array}{c} 2x+2y+z=a\\ x+z=0\end{array}\right.,$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de $a$ para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

**Solución:**

a)

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=-3-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=1\end{array}\right. \qquad s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\mu\\ y=\dfrac{a-\mu}{2}\\ z=-\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3-2\lambda=\mu\\ \lambda=\dfrac{a-\mu}{2}\\ 1=-\mu\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda=-1\\ \mu=-1\\ a=-3\end{array}\right. \Longrightarrow a=-3,\ \text{ y el punto de corte es } P(-1,-1,1)$$

b)

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,0)\\ P_r(-3,0,1)\end{array}\right. \qquad s\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1/2,-1)=1/2(2,-1,-2)\\ P_s(0,-3/2,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\pi\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,0)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,-2)\\ P_r(-3,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi\equiv\left|\begin{array}{ccc} -2 & 2 & x+3\\ 1 & -1 & y\\ 0 & -2 & z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi\equiv x+2y+3=0$$

### 2.13.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.13.9** *(2 puntos)* Se dan la recta $r$ y el plano $\pi$, mediante

$$r\equiv\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3},\quad \pi\equiv 2x+y-2z-7=0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

**Solución:**

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=4+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2+3\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,3)\\ P_r(4,1,2)\end{array}\right.$$

$$1=d(P,\pi)=\frac{|2(4+2\lambda)+(1-\lambda)-2(2+3\lambda)-7|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$|3\lambda+2|=3\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3\lambda+2=3\Longrightarrow\lambda=1/3\Longrightarrow P_1(14/3,2/3,3)\\ -3\lambda-2=3\Longrightarrow\lambda=-5/3\Longrightarrow P_1(2/3,8/3,-3)\end{array}\right.$$

**Problema 2.13.10** *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas $r$ y $s$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

**Solución:**

a)

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-2)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ A(2,3,4) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -2 & -2 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - y + 2z - 11 = 0$$

b)

$$t \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (3,-1,2) \\ P_t(4,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

## Opción B

**Problema 2.13.11** *(3 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el punto $P'$ simétrico de $P$ respecto del punto $Q(3,0,2)$.

b) (1,25 puntos). Hallar el punto $P''$ simétrico de $P$ respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.

c) (1,25 puntos). Hallar el punto $P'''$ simétrico de $P$ respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

**Solución:**

a)

$$\frac{P'+P}{2} = Q \Longrightarrow P' = 2Q - P = (4,-1,5)$$

b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a $P$

$$x+y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+1-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow x+y+z-2 = 0$$

Calculamos el punto de corte $P_1$ de $\pi$ con $r$:

$$r : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(1,1,0)$$

Por último:

$$\frac{P''+P}{2} = P_1 \Longrightarrow P'' = 2P_1 - P = (0,1,1)$$

c) Calculamos una recta $r \perp \pi$ que contenga a $P$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P(2,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte $P_2$ de $\pi$ con $r$:

$$(2+\lambda) + (1+\lambda) + (-1+\lambda) - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Por último:
$$\frac{P''' + P}{2} = P_2 \Longrightarrow P''' = 2P_2 - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

## 2.14. Año 2013

### 2.14.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.14.1** *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1;2;0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos $\pi_3$; $\pi_4$; $\pi_5$ siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y $\pi_5$ el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z + 3; \quad r_2 \equiv x + 2 = y = \frac{z+7}{2}$$

**Solución:**

a)
$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,3,-1) \\ P_r(1,2,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$6x - y + 3z = -2 \Longrightarrow 6(1+2\lambda) - (2+3\lambda) + 3(-\lambda) = -2 \Longrightarrow$$
$$\lambda = -1 \Longrightarrow P'(-1,-1,1)$$

b)
$$\pi_5 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+2 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+7 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_5 : 5x - 3y - z = -3$$

$$P : \begin{cases} 5x + 2y + 7z = 4 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5x - 3y - z = -3 \end{cases} \Longrightarrow P(1,3,-1)$$

**Problema 2.14.2** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano $\pi$ y la recta $r$.

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a $r$ y pase por $P(1;1;1)$.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6,1,2) \\ P_r(0,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -6\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

$$x - y + 2z = 1 \Longrightarrow (-6\lambda) - (-1+\lambda) + 2(2\lambda) = 1 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \text{ se cortan } P'(0,-1,0)$$

b)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6,1,2) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,2,1) \\ P(111) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} -6 & 1 & x \\ 1 & 2 & y+1 \\ 2 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x - 8y + 13z = 8$$

**Opción B**

**Problema 2.14.3** *(3 puntos)*

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array} \right. \quad ; \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Determinar el valor de $a$ para que los planos

$$\begin{array}{cc} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1;5;-3)$.

**Solución:**

a)

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \mu = -1 + 2\lambda \\ \mu = 2 + \lambda \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \mu = 7 \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 1 - 2(7) \neq -5 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

Otra forma:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, -2) \\ P_{r_1}(2, 0, 1) \end{array} \right. \ , \ r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (2, 1, -1) \\ P_{r_2}(-1, 2, 0) \end{array} \right. \ ; \ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-3, 2, -1)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{array} \right| = -8 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 3y- & z = & 5 \\ 2x+ & 2y+ & 4z = & 3 \\ x+ & 3y & = & a \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left( \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array} \right| = -8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\left| \begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{array} \right| = 36 - 8a = 0 \Longrightarrow a = \frac{9}{2}$$

Si $a = 9/2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema tiene solución única. Se trata de un sistema compatible determinado. Por tanto, en $a = 9/2$ los cuatro planos se cortan en un punto.

c)

$$\overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{array} \right| = 4(1, -2, -8) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -3 - 8\lambda \end{array} \right.$$

## 2.14.2. Ordinaria

### Opción A

**Problema 2.14.4** *(3 puntos)* Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa de $r$ y $s$.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P$ y corta a $r$ y $s$.

c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a $r$ y $s$.

**Solución:**

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} , \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases} , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0, 1, 3)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) La recta $h$ la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (2, -1, -2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P(-1, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & y \\ -2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - 4y + 3z = 5$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (2, 0, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \\ P(-1, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x - y - 2z = -5$$

$$h : \begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

c)

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

La recta $t$ la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x + y - 2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : z = 3$$

$$t : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

**Opción B**

**Problema 2.14.5** *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$ con la superficie esférica de centro $C(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $Q(-2,1,0)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$$

**Solución:**

a)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(4,6,2)) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 4+2\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{array} \right.$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 26 \Longrightarrow (4+2\lambda-1)^2+(6+\lambda-2)^2+(2+\lambda+1)^2 = 26 \Longrightarrow$$

$$\lambda = -\frac{1}{3},\ \lambda = -4 \Longrightarrow P'\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right),\quad P''(-4,2,-2)$$

b)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r(1,-2,3)) \end{array} \right. ,\quad \overrightarrow{P_rQ} = (-3,3,-3)$$

$$|\overrightarrow{P_rQ}| = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right| = |9(1,0,-1)| = 9\sqrt{2}$$

$$d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}\ u$$

**Problema 2.14.6** *(2 puntos)* Dados el punto $P(1,0,-1)$, plano $\pi \equiv 2x-y+z-1=0$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por $P$ es paralelo a $r$ y perpendicular al plano $\pi$.

b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre $r$ y $\pi$.

**Solución:**

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x-y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(0,1,-3) \end{array} \right. \Longrightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -3+3\lambda \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x+y-z=2$$

b)

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{3}{\sqrt{84}} \Longrightarrow \alpha = 19^\circ 6' 24''$$

### 2.14.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.14.7** *(3 puntos)* Dada la familia de rectas $r_a : \begin{cases} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{cases}$, (variando $a$ en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0,0,1)$, calcular la ecuación del plano $\pi_a$ que pasa por $P$ y contiene a la recta $r_a$. Probar que la recta que pasa por $P$ y por el punto $Q(3,0,0)$ está contenida en el plano $\pi_a$ para todos los valores de $a$.

c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de $a$ la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

**Solución:**

$$r_a : \begin{cases} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r_a : \begin{cases} x = 3 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

a) $r_a : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_a}} = (a,1,0) \\ P_{r_a}(3,0,0) \end{cases}$ todas las rectas de la familia se cortan en el punto $P_{r_a}(3,0,0)$.

b) $\pi_a$ tal que $r_a \subset \pi_a$ y $P(0,0,1) \in \pi_a$:

$$\pi_a : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_a}} = (a,1,0) \\ \overrightarrow{PP_{r_a}} = (3,0,-1) P(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_a : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ a & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_a : x - ay + 3z - 3 = 0$$

El punto $P$ y el punto $Q$ pertenecen al plano y, por tanto, la recta que los une para cualquier valor de $a$.

c) $d(O,\pi_a) = \dfrac{|-3|}{\sqrt{10+a^2}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow a = \pm\sqrt{26}$

**Opción B**

**Problema 2.14.8** *(3 puntos)* Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre $r$ y $s$.

c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta $s$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-7, 3, 5) \\ P_r(0, 0, 0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ P_s(2, 3, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (2, 3, 0)$$

a) $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 47$ luego las rectas $r$ y $s$ se cruzan.

b) $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -7 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |(-2, -17, -13)| = \sqrt{462}$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{47}{\sqrt{462}} = \frac{47\sqrt{462}}{462} \ u$$

c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos un plano $\pi \perp s$ tal que $O \in \pi$:

$$\pi : 2x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + y + z = 0$$

- ☛ Calculamos $O'$ punto de corte del plano $\pi$ con la recta $s$:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \Longrightarrow$$

$$O'\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{6}, -\frac{7}{6}\right)$$

- ☛ $\dfrac{O + O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{11}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

### 2.14.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.14.9** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; -2)$, $C(-2; 0; -4)$, $D(2; -6; 2)$, se pide:
se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo $ABC$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, -1, -2)$ y $\overrightarrow{CD} = (4, -6, 6) = -2(-2, 3, -3)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, luego se trata de un trapecio.

b) La distancia será la de $A$ sobre el vector $\overrightarrow{CD}$. Construimos el vector $\overrightarrow{CA} = (4, -2, 5)$:

$$S = |\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}| = |(-18, 4, 16)| = 2\sqrt{149}\ u^2$$

$$|\overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{22}$$

$$S = |\overrightarrow{CD}| \cdot h \Longrightarrow h = \frac{2\sqrt{149}}{2\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{149}{22}}$$

c) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, -3)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 2, -5)$:

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-9, 2, 8)| = \frac{\sqrt{149}}{2}\ u^2$$

**Problema 2.14.10** *(2 puntos)* Dados el punto $P(1; 2; -1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea $S$ la esfera que es tangente al plano $\pi$ en un punto $P'$ de modo que el segmento $PP'$ es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia $P'$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de $S$.

**Solución:**

a) Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -2) \\ P_r = P(1, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{array} \right.$$

El punto $P'$ es el punto de corte de $r$ con $\pi$:

$$1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P'(0, 0, 1)$$

b) La esfera $S$ tiene de centro el punto medio entre $P$ y $P'$, será $C(1/2, 1, 0)$ y su radio será la semidistancia de $P$ a $\pi$:

$$r = \frac{d(P, \pi)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|1 + 4 + 2 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 1 = 0$$

**Opción B**

**Problema 2.14.11** *(3 puntos)* Sean $r_A$ la recta con vector dirección $(1;\lambda;2)$ que pasa por el punto $A(1;2;1)$, $r_B$ la recta con vector dirección $(1;1;1)$ que pasa por $B(1;-2;3)$, y $r_C$ la recta con vector dirección $(1;1;-2)$ que pasa por $C(4;1;-3)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar $\lambda$ para que las rectas $r_A$ y $r_B$ se corten.

b) (1,5 puntos). Hallar $\lambda$ para que las rectas $r_A$ sea paralela al plano definido por $r_B$ y $r_C$.

c) (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman $r_B$ y $r_C$.

**Solución:**

$$r_A:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_A}}=(1,\lambda,2)\\ P_{r_A}=A(1,2,1)\end{array}\right. \quad , \quad r_B:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_B}}=(1,1,1)\\ P_{r_B}=B(1,-2,3)\end{array}\right. \quad r_C:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_C}}=(1,1,-2)\\ P_{r_C}=C(4,1,-3)\end{array}\right.$$

a) Utilizamos el vector auxiliar $\overrightarrow{AB}=(0,-4,2)$:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc}0&-4&2\\1&\lambda&2\\1&1&1\end{array}\right|=-2-2\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-1$$

Para que las rectas $r_A$ y $r_B$ se corte es necesario que Rango$(A)=2\Longrightarrow \lambda=-1$. En este caso puede ser también que las rectas sean paralelas, para eliminar esta posibilidad se estudia:

$$\text{Rango}\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{u_{r_A}}\\ \overrightarrow{u_{r_B}}\end{array}\right)=2,\ \text{ ya que } \left|\begin{array}{cc}1&2\\1&1\end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow r_A \text{ y } r_B \text{ se cortan}$$

b) Plano definido por $r_B$ y $r_C$:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_B}}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{u_{r_C}}=(1,1,-2)\\ B(1,-2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}1&1&x-1\\1&1&y+2\\1&-2&z-3\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: x-y-3=0$$

$$\overrightarrow{\pi}=(1,-1,0)\perp\overrightarrow{u_{r_A}}\Longrightarrow \overrightarrow{\pi}\cdot\overrightarrow{u_{r_A}}=0$$

$$(1,-1,0)\cdot(1,\lambda,2)=1-\lambda=0\Longrightarrow \lambda=1$$

c)

$$\cos\alpha\frac{u_{r_B}\cdot u_{r_C}}{|u_{r_B}||u_{r_C}|}=\frac{1+1-2}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=0\Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$$

### 2.14.5. Extraordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.14.12** *(3 puntos)* Dados el plano $\pi\equiv x-2y+z=6$ y la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{m}=z$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de $r$ y $\pi$ según los valores de $m$.

b) (1 punto). Para $m=-2$, determinar el plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

c) (1 punto). Para $m=-2$, determinar el punto de corte de $r$ y $\pi$.

**Solución:**

$$r_m:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda\\ y=-2+m\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \qquad \pi: x-2y+z=6$$

a) $(1+2\lambda)-2(-2+m\lambda)+\lambda=6 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{3-2m}$:
Si $m=\dfrac{3}{2}\Longrightarrow r$ y $\pi$ son paralelos, en caso contrario se cortan en un punto.

b) Para $m=-2$:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ P_r(1,-2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc} x-1 & y+2 & z\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi': y+2z+2=0$$

c) Para $m=-2\Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{3-2m}=\dfrac{1}{7}$:

$$\left(\frac{9}{7},-\frac{16}{7},\frac{1}{7}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.14.13** *(3 puntos)* Dado el haz de planos de $\mathbb{R}^3$ definido por: $\pi_a\equiv x+2y+az-1=0$ (al variar $a$ en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=y+3=\dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar para qué valores de $a$ la recta $r$ es paralela al plano $\pi_a$ .

b) (1 punto). Razonar si hay algún valor de $a$ tal que la recta $r$ es perpendicular al plano $\pi_a$, y en caso afirmativo calcular dichos valores de $a$.

c) (1 punto). Si $a=1$, obtener los puntos de la recta $r$ cuya distancia al plano $\pi_1$ es $\sqrt{6}$

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda\\ y=-3+\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right. \qquad \pi_a: x+2y+az-1=0$$

a) $\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_{\pi_a}}\Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_a}}=0$:

$$(2,1,2)\cdot(1,2,a)=2+2+2a=0\Longrightarrow a=-2$$

b) $\overrightarrow{u_r}\parallel\overrightarrow{u_{\pi_a}}\Longrightarrow \overrightarrow{u_r}=\lambda\overrightarrow{u_{\pi_a}}$:
$(2,1,2)=\lambda(1,2,a)\Longrightarrow 2=\lambda$, $1=2\lambda$ y $2=\lambda a$, lo que es imposible.

c) $P_r(1+2\lambda,-3+\lambda,2\lambda)$:

$$d(P_r,\pi)=\frac{|1+2\lambda+2(-3+\lambda)+2\lambda-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}\Longrightarrow|\lambda-1|=1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda-1=1\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow P_1(5,-1,4)\\ \lambda-1=-1\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow P_2(1,-3,0)\end{array}\right.$$

## 2.15. Año 2014

### 2.15.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.15.1** *(3 puntos)* Dados el punto $P(1;1;1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de $a$ para los que los planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P$ y es perpendicular a la recta intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

c) (1 punto). Hallar el punto $P'$ proyección de $P$ sobre el plano $\pi_3$.

**Solución:**

a)
$$\left\{\begin{array}{l} 3x + ay + z = 0 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow |A| = a^2 + 3a - 10 = 0 \Longrightarrow a = 2, \;\; a = -5$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial $(x = y = z = 0)$.

Si $a = 2$ o $a = -5$ el sistema es compatible indeterminado (el sistema que forman los tres planos es homogéneo)

Cuando $a = 2$ o $a = -5$ se cortan los tres planos en una recta, que calculo a continuación: Cuando $a = 2$: $F_1 = F_2 + F_3$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Cuando $a = -5$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 5y + z = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 5y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/2\lambda \\ y = 1/2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

b)
$$r: \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, -4 - 1) \\ P_r = O(0,0,0) \end{array}\right.$$

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (3, -4 - 1) \\ P(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$3x - 4y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 3 - 4 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

$$3x - 4y - z + 2 = 0$$

c) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1,1,-1)$ Calculamos $t \perp \pi_3$ que pasa por $P$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1,1,-1) \\ P_t(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Obtenemos $P'$ como punto de corte de $t$ con $\pi_3$:

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) - (1-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.15.2** *(3 puntos)*

a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ P_r(-2,-6,1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ P_s(3,1,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5,7,-1)$$

a)

$$\left| \begin{array}{rrr} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right| = 9 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

No se puede construir el triángulo.

b) Se va a calcular como intersección de dos planos:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right| = -3(1,-1,1)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ P_r(-2,-6,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 1 & x+2 \\ -1 & 2 & y+6 \\ 1 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ P_s(3,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 1 & x-3 \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & -2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x - z + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array} \right.$$

### 2.15.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.15.3** *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto $P'$ simétrico a $P$ respecto de $\pi$.

b) (1 punto). Hallar la distancia de $P$ a $r$.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de $\pi$ con los ejes coordenados $OX$, $OY$ y $OZ$.

**Solución:**

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t\perp\pi/P\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,5,-6)\\ P_t=P(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=5\lambda\\ z=1-6\lambda\end{array}\right.$$

- Calculamos el punto de corte $P''$ de $t$ con $\pi$:

$$(1+\lambda)+5(5\lambda)-6(1-6\lambda)=1\Longrightarrow \lambda=\frac{3}{31}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+3/31=34/31\\ y=15/31\\ z=1-18/31=13/5\end{array}\right. \Longrightarrow P''\left(\frac{34}{31},\frac{15}{31},\frac{13}{31}\right)$$

- El punto $P''$ es el punto medio entre $P$ y el punto que buscamos $P'$:

$$\frac{P'+P}{2}=P''\Longrightarrow P'=2P''-P=$$

$$\left(\frac{68}{31},\frac{30}{31},\frac{26}{31}\right)-(1,0,1)=\left(\frac{37}{31},\frac{30}{31},-\frac{5}{31}\right)$$

b)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,0,1)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. ,\quad \overrightarrow{P_rP}=(1,0,1)$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right||=|(0,-1,0)|=1$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{1}{1}=1$$

c) Calculamos los puntos de corte de $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ con los ejes coordenados:
Con $OX$ hacemos $y = 0$ y $z = 0$: $A(1, 0, 0)$
Con $OY$ hacemos $x = 0$ y $z = 0$: $B(0, 1/5, 0)$
Con $OZ$ hacemos $x = 0$ y $y = 0$: $C(0, 0, -1/6)$
Luego:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/5, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, -1/6)$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{vmatrix}| = \frac{1}{180}\ u^3$$

**Opción B**

**Problema 2.15.4** *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right.$

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de $r$ y $\pi$.

b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a $r$, y es paralela a $\pi$.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, 2, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$2 \cdot 1 - (2 + 2\lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = -1$$

$\pi$ y $r$ se cortan en el punto $(1, 0, -1)$

b) $\pi' \perp \pi, \ \ r \in \pi'$:

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (0, 2, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x - 1 \\ -1 & 2 & y - 2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 2y - 4z - 5 = 0$$

c) Segimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos el plano $\pi'' \parallel \pi / A \in \pi''$:

$$\pi'' : 2x - y + \lambda = 0 \Longrightarrow -4 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow \pi'' : 2x - y + 5 = 0$$

- ☛ Calculamos $P$ punto de corte de $r$ con $\pi''$:

$$2 - (2 + 2\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

$$P\left(1, 7, \frac{5}{2}\right)$$

- ☛ La recta buscada $s$ pasa por los puntos $A$ y $P$:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AP} = (3, 6, 5/2) \\ P_s(-2, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = \frac{5}{2}\lambda \end{array} \right.$$

### 2.15.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.15.5** *(2 puntos)* Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano $\pi$ y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0,0,0)$ que es tangente a $\pi$.

**Solución:**

a) Sean las rectas $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (a,b,c) \\ P_r(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = c\lambda \end{cases}$ que se cortan en el punto $O(0,0,0)$.

Estas rectas tiene que formar un ángulo de 45° con el plano $z = 0$, es decir:

$$\sin\alpha = \frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0+0+1^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}c = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Por otro lado $\pi \parallel r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r} = (a,b,c)\cdot(2,-1,1) = 2a - b + c = 0 \Longrightarrow c = b - 2a$$

$$c^2 = b^2 + 4a^2 - 4ab \Longrightarrow b^2 + 4a^2 - 4ab = a^2 + b^2 \Longrightarrow a(3a - 4b) = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \Longrightarrow c = b \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = (0,b,b) = b(0,1,1) \\ \\ a = \dfrac{4b}{3} \Longrightarrow c = -\dfrac{b}{3} \Longrightarrow \text{No válida } \left(-\dfrac{b}{3}\right)^2 \neq \left(\dfrac{4b}{3}\right)^2 + b^2 \end{cases}$$

$$r_b : \begin{cases} x = 0 \\ y = b\lambda \\ z = b\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) El radio de la esfera es $r = d(O,\pi) = \dfrac{|0-0+0-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ y su centro en $O(0,0,0)$:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \Longrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 1$$

**Problema 2.15.6** *(2 puntos)* Sean los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,-4)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano $\pi$ respecto del cual $A$ y $B$ son simétricos.

b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por $A$ y $B$ que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2,-1,1)$.

**Solución:**

a) $d(A,\pi) = d(B,\pi) \Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2} \Longrightarrow \pi : x + 2z + 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = 2(1,0,2) \\ P_r = A(2,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow Q(2+\lambda, 1, 2\lambda)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(\lambda, 2, 2\lambda - 1)| = \sqrt{\lambda^2 + 4 + (2\lambda-1)^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$5\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \Longrightarrow Q_1(3,1,2) \\ \lambda = -\dfrac{1}{5} \Longrightarrow Q_2\left(\dfrac{9}{5}, 1, -\dfrac{2}{5}\right) \end{cases}$$

### Opción B

**Problema 2.15.7** *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-8}{-3}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5,-2,1)$ sobre el plano $\pi$.

c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1,7,3)$ sobre la recta $r$.

**Solución:**

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,1,-3) \\ P_r(2,-6,8) \end{cases} \quad \overrightarrow{u_\pi} = (5,-3,4)$$

a) Cuando se habla de distancia de una recta a un plano entendemos que la recta es paralela al plano, si lo cortase la distancia sería cero y si está contenida en el plano también sería cero. Comprobamos el paralelismo:
$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} = (3,1,-3)\cdot(5,-3,4) = 0 \Longrightarrow$ lo que nos indica que o es paralela o está contenida en el plano.

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|10+18+32-10|}{\sqrt{25+9+16}} = 5\sqrt{2}\ u$$

b) Proyección de $P$ sobre $\pi$:

- ☛ Calculamos la recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (5,-3,4) \\ P_t(5,-2,1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5+5\lambda \\ y = -2-3\lambda \\ z = 1+4\lambda \end{cases}$$

- ☛ $P'$ proyección de $P$ será el punto de corte de $t$ y $\pi$:

$$5(5+5\lambda) - 3(-2-3\lambda) + 4(1+4\lambda) - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$P'\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

c) Proyección de $Q$ sobre $r$:

☛ Calculamos un plano $\pi' \perp r/Q \in \pi'$:

$$\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (3,1,-3) \Longrightarrow \pi' : 3x + y - 3z + \lambda = 0$$

$$3(-1) + 7 - 3(3) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow \pi' : 3x + y - 3z + 5 = 0$$

☛ $Q'$ proyección de $Q$ será el punto de corte de $r$ y $\pi'$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,1,-3) \\ P_r(2,-6,8) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -6 + \lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{array} \right.$$

$$3(2+3\lambda) + (-6+\lambda) - 3(8-3\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q'(5,-5,5)$$

### 2.15.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.15.8** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$.

b) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,4,-1)$:

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(0,4,16)| = 2\sqrt{17}\ u^2$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$, $\overrightarrow{AC} = (3,4,-1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2,1,6)$

$$V = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{50}{3}\ u^3$$

**Problema 2.15.9** *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por $\pi_1$ y $\pi_2$.

b) (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano $\pi_3$.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{array} \right.$$

b) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1,3,2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (0,1,0)$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_3}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi_3}}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \sin\alpha$$

**Opción B**

**Problema 2.15.10** *(3 puntos)* Dados el plano $\pi$ y la recta $r$ siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de $r$ y $\pi$.

b) (1 punto). Calcular la distancia entre $r$ y $\pi$.

c) (1 punto). Obtener el punto $P'$ simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano $\pi$.

**Solución:**

a) $2(1-2t) - (2-2t) + 2(l+t) + 3 = 0 \Longrightarrow$ ¡5=0! Luego la recta $r$ es paralela al plano $\pi$. Está claro que $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = -2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi}$

b) $P_r(1, 2, 1)$:

$$d(P_r, \pi) = \frac{2 - 2 + 2 + 3}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3}\ u$$

c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $s \perp \pi$ que pase por $P$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 2) \\ P_s = P(3, 2, 1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

- ☛ Encontramos el punto $P''$ de corte entre $s$ y $\pi$:

$$2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P''(1, 3, -1)$$

- ☛ $P''$ es el punto medio entre $P$ y el punto buscado $P'$:

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = (2, 6, -2) - (3, 2, 1) = (-1, 4, -3)$$

## 2.16. Año 2015

### 2.16.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.16.1** *(2 puntos)* Dadas las rectas: $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ ; $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y = z \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de $r$ y $s$, y que pasa por el punto $(0,0,0)$.

**Solución:**

a) $(1+2\lambda)+\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = 0$ luego las dos rectas se cortan en el punto $(1,0,0)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,1) \\ P_s(1,0,0) \end{array} \right.$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|} = \frac{-2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0,-1,1) \\ P_t(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 3(0,-1,1)$$

**Problema 2.16.2** *(2 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,-1,2)$, $P_2(2,-3,0)$ y $P_3(3,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano $\pi$ que contiene los tres puntos.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta $r$ que pasa por $P_1$ y es perpendicular a $\pi$.

c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano $\pi$ en el punto $P_1$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-2,-2)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (2,2,0)$:

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ -2 & 2 & y+1 \\ -2 & 0 & z-2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 2x - 2y + 3z - 10 = 0$$

b)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,3) \\ P_r(1,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 2+3\lambda \end{array} \right.$$

c) Calculo una recta $r$ que pase por $P_1$ y perpendicular a $\pi$, la del apartado anterior. Ahora hay que encontrar los dos puntos de esta recta que estan a una distancia $\sqrt{17}$ de $P_1$ y estos serán los centros de las esferas:
Un punto $C$ de $r$ será $C(1+2\lambda, -1-2\lambda, 2+3\lambda)$

$$|\overrightarrow{CP_1}| = |(2\lambda, -2\lambda, 3\lambda)| = |\lambda|\sqrt{17} = \sqrt{17} \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \Longrightarrow C_1(3,-3,5) \Longrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 17 \\ \lambda = -1 \Longrightarrow C_2(-1,1,-1) \Longrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 17 \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.16.3** *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,2,-1)$ y las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x-y-3z=-2 \end{array}\right. \quad ; \quad s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre $r$ y $s$.

b) (1 punto). Determinar el punto $P'$ simétrico de $P$ respecto de $r$.

c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta $r$ que equidistan de los planos $XY$ e $YZ$.

**Solución:**

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,-1)\\ P_r(1,3,0) \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(0,0,1)\\ P_s(2,-3,0) \end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(1,-6,0)$$

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3 \end{array}\right|=2(-2,1,-1)$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\left|\begin{array}{ccc} 1 & -6 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|=-11\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|-11|}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}\ u$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|=(1,2,0)$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi$ perpendicular a $r$ que contenga a $P$: $\pi:-2x+y-z+\lambda=0\Longrightarrow -2+2+1+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-1$ luego el plano buscado es $\pi:-2x+y-z-1=0$
- Calculamos el punto de corte $P''$ de $r$ y $\pi$:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2t\\ y=3+t\\ z=-t \end{array}\right. \Longrightarrow -2(1-2t)+(3+t)-(-t)-1=0\Longrightarrow t=0\Longrightarrow P''(1,3,0)$$

-

$$P''=\frac{P+P'}{2}\Longrightarrow P'=2P''-P=2(1,3,0)-(1,2,-1)=(1,4,1)\Longrightarrow P'(1,4,1)$$

c) El plano $XY$ es el plano $\pi':z=0$ y el plano $YZ$ es el plano $\pi'':x=0$. Sea $P'''$ un punto de la recta $r$ que cumple $d(P''',\pi')=d(P''',\pi'')$ donde $P'''(1-2t,3+t,-t)$:

$$\frac{|-t|}{1}=\frac{|1-2t|}{1}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -t=1-2t\Longrightarrow t=1\Longrightarrow H(-1,4,-1)\\ -t=-1+2t\Longrightarrow t=1/3\Longrightarrow Q(1/3,10/3,-1/3) \end{array}\right.$$

### 2.16.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.16.4** *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados vectores $\overrightarrow{u} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -1, -1)$ y $\overrightarrow{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de $\lambda$ que hacen que el paralelepípedo $P$ generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\overrightarrow{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

**Solución:**

a)

$$V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = |\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix}| = |-2\lambda - 6| = 6 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = -6$$

b) $r \in \pi : z = 0$, $r \perp \overrightarrow{u} = (2, -1, 4)$ y $P(1, 1, 0) \in r$:

$$r \in \pi : z = 0 \Longrightarrow r \perp \overrightarrow{u_\pi} = (0, 0, 1) \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 0) \\ P_r(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

**Problema 2.16.5** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano $\pi$.

**Solución:** La esfera tiene de centro el punto $C(1, 1, 2)$ y radio 3. Construimos una recta $r$ perpendicular a $\pi$ que pase por $C$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, 2) \\ P_r = C(1, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Encontramos los puntos de corte de esta recta $r$ con la esfera:

$$(1 + \lambda - 1)^2 + (1 - 2\lambda - 1)^2 + (2 + 2\lambda - 2)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \pm 1 \Longrightarrow P_1(2, -1, 4),\ \ P_2(0, 3, 0)$$

Calculamos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_1(2, -1, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : x - 2y + 2z - 12 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_2(0, 3, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : x - 2y + 2z + 6 = 0$$

**Opción B**

**Problema 2.16.6** *(3 puntos)* Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas $O$, y la recta $r:\begin{cases} x=-4+4\lambda\\ y=8+3\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar un punto $Q$ de la recta $r$, de modo que su proyección $Q'$ sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) (1 punto). Determinar la distancia de $P$ a $r$.

c) (1 punto). ¿Existe algún punto $R$ de la recta $r$, de modo que los puntos $O$, $P$ y $R$ estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

**Solución:**

a) Un punto de la recta $r$ es $Q(-4+4\lambda,8+3\lambda,-2\lambda)$ y el punto medio de $\overline{OP}$ será $Q'=\dfrac{O+P}{2}=(-2,3,3)$.
Construimos el vector $\overrightarrow{Q'Q}=(-2+4\lambda,5+3\lambda,-3-2\lambda)$ y el vector $\overrightarrow{OP}=(-4,6,6)$. Imponemos $\overrightarrow{Q'Q}\perp\overrightarrow{OP}\Longrightarrow\overrightarrow{Q'Q}\cdot\overrightarrow{OP}=0$
$8-16\lambda+30+18\lambda-18-12\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow Q(4,14,-4)$

b)

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(4,3,-2)\\ P_r(-4,8,0)\end{cases},\quad \overrightarrow{P_rP}=(0,-2,6)$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 4&3&-2\\ 0&-2&6\end{vmatrix}=|(14,-24,-8)|=2\sqrt{209},\ \text{ y } |\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{29}$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=2\sqrt{\frac{209}{29}}\simeq 5,37\ u$$

c) Para que los puntos $O$, $P$ y $R$ estén alineados las rectas

$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{OP}=(-4,6,6)=2(-2,3,3)\\ P_s=O(0,0,0)\end{cases}$$

y la recta $r$ tienen que cortarse en el punto $R$.
Para ver la posición relativa entre ambas construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r}=(-4,8,0)$ y hacemos el producto mixto:

$$[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix}-4&8&0\\ 4&3&-2\\ -2&3&3\end{vmatrix}=-124\neq 0$$

Luego las rectas $r$ y $s$ se cruzan y, por tanto, los puntos en cuestión no están alineados.

### 2.16.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.16.7** *(3 puntos)* Dados la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{array} \right.$, con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los valores de $a$ para los que la recta $r$ es paralela al plano $\pi$.

b) (1 punto). Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta $r$ al plano $\pi$.

c) (1 punto). Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman $r$ y $\pi$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{array} \right| = (1 - a^2, 1, a)$, $r \parallel \pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0$

$$(1 - a^2, 1, a) \cdot (1, 1, 1) = -a^2 + a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 2$$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, 2) \\ P_r(2, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$

$(2 - 3\lambda) + (2 + \lambda) + 2\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow 2 = 0$ lo que nos indica que la recta es paralela al plano como se sabía por el apartado anterior.

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 + 2 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ u$$

c) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(4, 4, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

$$\sin \alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \ u$$

**Opción B**

**Problema 2.16.8** *(2 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{array} \right.$ y $s \equiv \dfrac{x + 1}{2} = y - 5 = -(z + 2)$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de $r$ y $s$.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 6, -3)$, está contenida en el plano que determinan $r$ y $s$ y es perpendicular a $r$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ P_r(3, 2, 3) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_s(-1, 5, -2) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (4, -3, 5)$$

a) $[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y $s$ se cortan.

b) Calculamos el plano $\pi/r, s \subset \pi$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_r(3, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x - 7y - 5z + 26 = 0$$

Calculamos el plano $\pi'/r \perp \pi'$ y $P \in \pi'$:

$$\pi' : x - 2y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 - 12 - 9 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 20 \Longrightarrow \pi' : x - 2y + 3z + 20 = 0$$

La recta $t$ que buscamos será:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x - 7y - 5z + 26 = 0 \\ x - 2y + 3z + 20 = 0 \end{array} \right.$$

**Problema 2.16.9** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y es paralelo a $\pi$.

b) (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta $r$.

c) (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano $\pi$.

**Solución:**

a) $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \pi' : x+y-z+\lambda = 0 \Longrightarrow 1+0+1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow \pi' : x+y-z-2 = 0.$

b) $|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-1, 2, 0)| = \sqrt{5}$

$d(O, r) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1\ u^2$

c) $d(O, \pi) = \dfrac{|0 + 0 - 0 + 1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ u$

### 2.16.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.16.10** *(3 puntos)* La recta $r$ pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta $s$ pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

a) (2 puntos). Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre $r$ y $s$ sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$ .

b) (1 punto). Calcular $\lambda$ para que $r$ sea perpendicular a la recta que pasa por $P$ y $Q$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,\lambda,-2)\\ P_r=P(2,-1,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,4,2)\\ P_s=Q(1,0,-1)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r}=(1,-1,1)$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{18}{2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}}=\frac{9}{\sqrt{59}}\Longrightarrow$$

$$\lambda=3 \ \text{ y } \ \lambda=-5 \text{ (No válida)}$$

$$|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\left|\begin{array}{ccc}1&-1&1\\1&\lambda&-2\\2&4&2\end{array}\right||=18$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&\lambda&-2\\2&4&2\end{array}\right||=|2(\lambda+4,-3,2-\lambda)|=2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}$$

b)

$$h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{QP}=(1,-1,1)\\ P_h=Q(1,0,-1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{u_h}\Longrightarrow\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{u_h}=0$$

$$(1,\lambda,-2)\cdot(1,-1,1)=1-\lambda-2=0\Longrightarrow\lambda=-1$$

**Opción B**

**Problema 2.16.11** *(3 puntos)* Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos

$$\pi_1\equiv x-z=0;\quad \pi_2\equiv my-6z=0;\quad \pi_3\equiv x+y-mz=0$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de $m$ para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $m=3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos $Q$ y $P'$, siendo $P'$ el punto simétrico de $P$ respecto al plano $\pi_1$.

**Solución:**

a)

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1&0&-1\\0&m&-6\\1&1&-m\end{array}\right)\quad |A|=-m^2+m+6=0\Longrightarrow m=3,\ \ m=-2$$

Para estos valores de $m$ los tres planos se cortan en una recta.

b) Si $m = 3$:

$$h : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} = (1, 2, 1) \\ P_h(0, 0, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi : x + 2y + z + \theta = 0 \Longrightarrow -1 - 2 + 1 + \theta = 0 \Longrightarrow \theta = 2 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + 2y + z + 2 = 0$$

c) Calculamos la recta $t \perp \pi_1$ y $P \in t$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, 0, -1) \\ P_t(-1, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Calculamos $P''$ punto de corte de $t$ con $\pi_1$:

$$(-1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P''(0, -1, 0)$$

Tenemos:

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = (1, -1, -1)$$

$$d(QP') = |\overrightarrow{QP'}| = |(0, -1, -3)| = \sqrt{10}\ u$$

### 2.16.5. Extraordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.16.12** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$ y $P(1, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a $P$ y a la recta que pasa por $A$ y $B$.

b) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por $A$, $B$ y $P$.

c) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto $C$ que forma con $A$ y $B$ un triángulo rectángulo en $C$, sabiendo que $C$ está en el eje $OX$ y tiene primera coordenada negativa.

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2, 1, 4) \\ P_r = B(0, 0, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4) \\ \overrightarrow{PA} = (1, 0, 0) \\ P_r = P(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -4)$ y $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, 0)$:

$$S = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(0, 4, -1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c) $C(a, 0, 0) \Longrightarrow = (2 - a, 1, 1)$ y $\overrightarrow{CB} = (-a, 0, -3)$ Como $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Longrightarrow$

$$(2 - a, 1, 1) \cdot (-a, 0, -3) = 0 \Longrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3,\ \ a = -1$$

La solución pedida es la negativa: $C(-1, 0, 0)$.

**Opción B**

**Problema 2.16.13** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1, 4, 1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por $\pi$ y $r$.

b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta $s$ que pasa por $A$ y es perpendicular a $\pi$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 2)$$

a) $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{2}{3}$

b) $s \perp \pi / A \in s \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(-1, 4, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

**Problema 2.16.14** *(2 puntos)* Dado el vector $\overrightarrow{v} = (1, 0, -2)$, se pide:

a) (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector $\overrightarrow{v}$ y tienen alguna coordenada nula.

b) (1 punto). Obtener los vectores $\overrightarrow{w}$ tales que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longrightarrow a - 2c = 0 \Longrightarrow a = 2c$

$$\overrightarrow{w} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5c^2 + b^2}}(2c, b, c)$$

Si $c = 0 \Longrightarrow b \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{5}}{b}(0, b, 0) = (0, \sqrt{5}, 0)$. Si $c \neq 0 \Longrightarrow$

$b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{5}}{c\sqrt{5}}(2c, 0, c) = (2, 0, 1)$

b) $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-2b, -2a - c, b) = (2, -3, 1) \Longrightarrow$$

$b = 1,\ \ 2a + c = 3$

$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{a^2 + 1 + c^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2 + c^2 = 5$

$$\begin{cases} 2a + c = 3 \\ a^2 + c^2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2,\ \ c = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = (2, 1, -1) \\ \\ a = 2/5,\ \ c = 11/5 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \left(\dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{11}{5}\right) \end{cases}$$

## 2.17. Año 2016

### 2.17.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.17.1** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta $r$ y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi$ y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

**Solución:**

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -1)$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & x-1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 3x + y - 3 = 0$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P_s = Q(2, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$

**Problema 2.17.2** *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos $R$ que equidistan de $P$ y $Q$. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar los puntos $S$ contenidos en la recta que pasa por $P$ y $Q$ que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

**Solución:**

a) El conjunto de puntos $R(x, y, z)$ que equidistan de $P$ y $Q$ es un plano mediador:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \Longrightarrow$$

$$2x + 4z - 9 = 0$$

b) La recta que pasa por $P$ y $Q$ es:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{QP} = (1, 0, 2) \\ P_r = Q(0, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

$$S(x, y, z) = (\lambda, 1, 1 + 2\lambda)$$

$$d(P, S) = 2d(Q, S) \Longrightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (-2 + 2\lambda)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

$$\lambda = -1, \ \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow S_1(-1, 1, -1), \ S_2\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$$

**Opción B**

**Problema 2.17.3** *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano $\pi_1$.

c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

**Solución:**

a) El vector pedido es perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -8, -10) \quad |\overrightarrow{u}| = 10\sqrt{2}$$

El vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector paralelo a ambos planos.

b) $d(P, \pi_1) = \dfrac{|9 - 4 - 10 - 7|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}| \times |\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{(3, 4, -5) \cdot (1, -2, 1)}{\sqrt{50} \times \sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

## 2.17.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.17.4** *(2 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro $a$, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0,5 puntos). Que $\pi_1$ y $\pi_2$ sean paralelos.

b) (0,5 puntos). Que $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares.

c) (1 punto). Que la recta intersección de $\pi_1$ y $\pi_2$ sea perpendicular al plano $x = y$.

**Solución:**

a)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \parallel \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \Longrightarrow a = -1$$

b)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = a + a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1/2$$

c) $\pi \equiv x - y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 0)$

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a+1, -(a+1), a^2-1) =$$

$$(a+1)(1, -1, a-1) = \lambda(1, -1, 0) \Longrightarrow$$

$$a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Pero en este caso los planos son paralelos y, por tanto, este resultados no es válido y no se puede encontrar la recta $r$ pedida para ningún valor de $a$.

**Problema 2.17.5** *(2 puntos)* Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de $P$ respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$; $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

**Solución:**

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -5, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2) \\ A(0, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -5 & -1 & y-2 \\ 1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z - 1 = 0$$

Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_t = P(2, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte $P'$ de $t$ con $\pi$:

$$(2 + \lambda) - (-1 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow P'(1, 1, 0)$$

- El punto $P'$ es el punto medio entre $P$ y el punto que buscamos $P''$:

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$(2, 2, 0) - (2, 1, -1) = (0, 1, 1)$$

**Opción B**

**Problema 2.17.6** *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos $P$ cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

**Solución:**

a)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,-1)\\ \overrightarrow{AD}=(2,-2,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr}0&1&1\\2&-1&-1\\2&-2&-2\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$, luego se trata de un paralelogramo.

b)

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\left|\begin{array}{rrr}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\0&1&1\\2&-2&-2\end{array}\right||=2|(0,1,-1)|=2\sqrt{2}\ u^2$$

c) Se trata de una recta $r$ que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
Calculamos el centro de este paralelogramo:

$$Centro=\frac{A+C}{2}=\left(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal al plano $\pi$ que contiene al paralelogramo:

$$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=2(0,1,-1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,1,-1)\\ P_r(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2})\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=9/2+\lambda\\ z=5/2-\lambda\end{array}\right.$$

### 2.17.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.17.7** *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1\equiv\left\{\begin{array}{ll}x=&z-1\\ y=&2-3z\end{array}\right.$ y $r_2\equiv\left\{\begin{array}{ll}x=&4+5z\\ y=&4z-3\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a $r_1$ y a $r_2$.

**Solución:**

a) $r_1\equiv\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(1,-3,1)\\ P_{r_1}(-1,2,0)\end{array}\right.$, $r_2\equiv\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(5,4,1)\\ P_{r_2}(4,-3,0)\end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(5,-5,0)$ $[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]=$ $\left|\begin{array}{rrr}5&-5&0\\1&-3&1\\5&4&1\end{array}\right|=-55\neq 0\Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{55}{\sqrt{426}}=\frac{55\sqrt{426}}{426}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}| = |(-7,4,19)| = \sqrt{426}$$

b) Obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{OP_{r_1}} = (-1,0,2) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-3,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1: 2x+y+z=0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{OP_{r_2}} = (4,-3,0) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (5,4,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ -3 & 4 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2: 3x+4y-31z=0$$

$$t: \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-31z=0 \end{cases}$$

**Opción B**

**Problema 2.17.8** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x-y+2z+3=0$, el punto $A(1,1,3)$ y la recta $r \equiv x = y-2 = \frac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto $A$ a la recta $r$.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $A$ sobre el plano $\pi$.

**Solución:**

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,2,0) \end{cases}, \quad A(1,1,3), \quad \overrightarrow{P_rA} = (1,-1,3)$$

a)

$$d(A,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}\,u$$

$$|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}| = |(-5,1,2)| = \sqrt{30}$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos la recta $t \perp \pi / A \in t$:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,2) \\ P_t = A(1,1,3) \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculamos $A'$ proyección de $A$ como punto de corte de $t$ y $\pi$:

$$(1+\lambda)-(1-\lambda)+2(3+2\lambda)+3=0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

$$A'\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$$

**Problema 2.17.9** *(2 puntos)* Dada una recta $r$ cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ con $a, b, c > 0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Si $r$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje $OX$ y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje $OY$, determinar el ángulo que forma la recta con el eje $OZ$.

b) (0,5 puntos). Si $\overrightarrow{v} = (1, 5, 3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3, 0, 1)$.

**Solución:**

a) Tenemos que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\gamma = 1 \Longrightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \Longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$$

b) $\pi : x + 5 + 3z + \lambda = 0$ sustituyendo el punto $3 + 0 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -6$:

$$\pi : x + 5y + 3z - 6 = 0$$

### 2.17.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.17.10** *(3 puntos)* Dadas las rectas $r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s : \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R\}$

a) (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a $r$.

b) (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta $r$ y es paralelo a $s$.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, 1) \\ P_r(1, 3, 0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -3, 1) \\ P_s(2, 1, 0) \end{cases}$$

a) Seguimos el siguiente proceso:

☛ Calculamos $\pi_1 \perp r / \, P(1, 0, 5) \in \pi_1$:

$$2x - 3y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 - 0 + 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -7$$

$$\pi_1 : 2x - 3y + z - 7 = 0$$

☛ Calculamos el punto de corte $P'$ de $\pi_1$ con $r$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) - 3(3 - 3\lambda) + (\lambda) - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(3, 0, 1).$$

☛ La recta $t$ buscada pasa por $P$ y $P'$:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{PP'}=(3,0,1)-(1,0,5)=(2,0,-4)\\ P_t=P(1,0,5)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=0\\ z=5-4\lambda\end{array}\right.$$

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-3,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-3,1)\\ P_r(1,3,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}2&1&x-1\\-3&-3&y-3\\1&1&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow y+3z-3=0$$

c) $\overrightarrow{P_rP_s}=(1,-2,0)$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\left|\begin{array}{ccc}1&-2&0\\2&-3&1\\1&-3&1\end{array}\right||=2$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\2&-3&1\\1&-3&1\end{array}\right||=|(0,-1,-3)|=\sqrt{10}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$

**Opción B**

**Problema 2.17.11** *(2 puntos)* Sea $\pi$ el plano que contiene a los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-1,-2,-1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de $\pi$ con cada uno de los ejes coordenados.

**Solución:**

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-4,-2)\\ A(0,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}1&-1&x\\-2&-4&y-2\\0&-2&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 2x+y-3z+1=0$$

Puntos de corte con los ejes:
Con $OX$: $y=0$ y $z=0\Longrightarrow x=-1/2\Longrightarrow P_1(-1/2,0,0)$
Con $OY$: $x=0$ y $z=0\Longrightarrow y=-1\Longrightarrow P_2(0,-1,0)$
Con $OZ$: $x=0$ y $y=0\Longrightarrow z=1/3\Longrightarrow P_3(0,0,1/3)$
Con el origen formamos los vectores:
$\overrightarrow{OP_1}=(-1/2,0,0)$, $\overrightarrow{OP_2}=(0,-1,0)$ y $\overrightarrow{OP_3}=(0,0,1/3)$. El volumen de este tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}-1/2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1/3\end{array}\right||=\frac{1}{6}\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{36}\ u^3$$

**Problema 2.17.12** *(2 puntos)* Dado el plano $\pi:3x+3y+z-9=0$, se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a $\pi$ que contiene al eje $OX$.

b) (1 punto). Determinar el punto del plano $\pi$ más cercano al origen de coordenadas.

**Solución:**

a) $\pi' \perp \pi / OX \subset \pi'$:

$$\pi': \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (3,3,1) \\ \overrightarrow{u_{OX}} = (1,0,0) \\ P = O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi': \left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & x \\ 3 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi': y - 3z = 0$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos una recta $r \perp \pi / O \in r$:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (3,3,1) \\ P_r = O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto de corte de $r$ con $\pi$, que será el punto del plano más cercano al origen:

$$3(3\lambda) + 3(3\lambda) + \lambda - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{9}{19} \Longrightarrow P\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$$

## 2.18. Año 2017

### 2.18.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.18.1** *(3 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta $r$ con el plano $y = 0$.

**Solución:**

a) $r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (5,1,2) \\ P_r(2,3,-1) \end{array}\right.$ $\quad s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,0) \\ P_s(1,3,2) \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,0,3)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left|\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right| = -20 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right|| = |(2,2,-6)| = 2\sqrt{11}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{20}{2\sqrt{11}} = \frac{10\sqrt{11}}{11}\ u$$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (5,1,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,0) \\ P_r(2,3,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x + y - 3z - 8 = 0$$

c) $\pi' : y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{u_r} = (5,1,2)$:

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi'}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi'}}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Longrightarrow \alpha = 10^\circ 31' 11''$$

**Opción B**

**Problema 2.18.2** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$, y $P(1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por $A$, $B$ y $P$.

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P$ a la recta que pasa por $A$ y $B$.

**Solución:**

a)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ \overrightarrow{BP} = (1,1,4) \\ B(0,0,-3) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z+3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3 = 0$$

b)

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(0,-4,1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ P_r = B(0,0,-3) \end{cases} \qquad \overrightarrow{P_rP} = \overrightarrow{BP} = (1,1,4)$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{17}{21}}\ u$$

## 2.18.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.18.3** *(3 puntos)* Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a $P$, $Q$ y $R$.

b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta $r$, que pasa por los puntos $P$ y $Q$, y la recta $s$, que pasa por $R$ y $S$.

c) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos $P$, $Q$ y $R$.

**Solución:**

a)

$$\pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-4, 3, 1) \\ P(1, -2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + 5y - 7z + 15 = 0$$

b)

$$r : \pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \\ P_r = P(1, -2, 1) \end{array} \right. \quad r : \pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{RS} = (3, -4, -2) \\ P_s = S(0, -3, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (1, 1, 1)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \text{ y Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan}$$

c)

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(2, 5, 7)| = \frac{\sqrt{78}}{2}\ u$$

## Opción B

**Problema 2.18.4** *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \ \text{ y } \ r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a $s$, que pasa por el origen.

**Solución:**

a) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, 1) \\ P_{r_1}(0, 0, 0) \end{array} \right. \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1, -1, 1) \\ P_{r_2}(-1, 2, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-1, 2, 0)$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = |-2| = 2$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| | = |(2, 0, 2)| = 2\sqrt{2}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(0, 2, 1) \end{array} \right.$, un plano $\pi \perp s$ tal que $O \in \pi \Longrightarrow \pi :$ $x - y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x - y + z = 0$

El punto de corte de $\pi$ con $s$:

$\lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left( \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3} \right)$

### 2.18.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.18.5** *(3 puntos)* Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la ecuación de una recta $r'$, con dirección perpendicular a $r$, que esté contenida en el plano $OXY$ y pase por el punto $(1, 2, 0)$.

b) (1 punto) Hallar un plano perpendicular a $OXY$, que contenga a la recta $r$.

c) (1 punto) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a la recta $r$.

**Solución:**

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{cases}$$

a) El plano $\pi(OXY) : z = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (0, 0, 1)$. Si $r' \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r'}} = (a, b, 0)$ y como $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_{r'}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_{r'}} = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -a \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r'}} = (a, -a, 0) = a(1, -1, 0)$, luego podemos coger $\overrightarrow{u_{r'}} = (1, -1, 0) \Longrightarrow r' : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r'}} = (1,-1,0) \\ P_{r'}(1,2,0) \end{cases} \Longrightarrow r' : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

b)

$$\pi' : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : x - y - 1 = 0$$

c) $|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}\ u$

$$d(O, r) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

**Opción B**

**Problema 2.18.6** *(3 puntos)* Dado el punto $P(5, 7, 10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x+2y+3z = 7$; se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto $P'$, simétrico de $P$ respecto de $\pi$.

b) (1 punto) Hallar la posición relativa del plano $\pi$ y la recta que pasa por el punto $Q(1, 1, 1)$ y tiene dirección $\overrightarrow{v} = (-10, 2, 2)$.

c) (1 punto) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos $P$, $Q$ y al origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$.

**Solución:**

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calcular $r \perp \pi / P \in r \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ P_r = P(5,7,10) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 10 + 3\lambda \end{cases}$

☛ Calcular $P'$ punto de corte de $r$ con $\pi$:

$$(5+\lambda)+2(7+2\lambda)+3(10+3\lambda)=7\Longrightarrow \lambda=-3\Longrightarrow P'(2,1,1)$$

☛ $\dfrac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=2(2,1,1)-(5,7,10)=(-1,-5-8)$

b) $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v}=(-10,2,2)=2(-5,1,1)\\ P_s=Q(1,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1-5\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$. Calculamos el posible punto de corte entre $s$ y $\pi$:

$$(1-5\lambda)+2(1+\lambda)+3(1+\lambda)=7\Longrightarrow !`6=7!\Longrightarrow s \text{ y } \pi \text{ son paralelos.}$$

c) $S_T=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 5&7&10\\ 1&1&1\end{array}\right||=\dfrac{1}{2}|(-3,5,-2)|=\dfrac{\sqrt{38}}{2}\ u^2$

### 2.18.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.18.7** *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1\equiv\left\{\begin{array}{l}6x-y-z=1\\ 2x-y+z=1\end{array}\right.$ y $r_2\equiv\left\{\begin{array}{l}3x-5y-2z=3\\ 3x+y+4z=3\end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de $r_1$ y $r_2$.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a $r_1$ y al punto $P(1,2,3)$.

**Solución:**

a) $r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(1,4,2)\\ P_{r_1}(0,-1,0)\end{array}\right.$ , $r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(-1,-1,1)\\ P_{r_2}(1,0,0)\end{array}\right.$ $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(1,1,0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]=\left|\begin{array}{ccc}1&1&0\\ 1&4&2\\ -1&-1&1\end{array}\right|=3\neq 0\Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{|3|}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&4&2\\ -1&-1&1\end{array}\right||=|3(2,-1,1)|=3\sqrt{6}$$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_{r_1}P}=(1,3,3)\\ \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,4,2)\\ P_{r_1}(0,-1,0)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}x&y+1&z\\ 1&3&3\\ 1&4&2\end{array}\right|=0\Longrightarrow\pi:6x-y-z-1=0$$

**Opción B**

**Problema 2.18.8** *(2 puntos)* Sea $r$ la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta $r$.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta $r$ con el plano perpendicular a $r$ que pasa por el punto $Q$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-1,1)\\ P_r(3,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rQ}=(0,3,-3)$

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 0&3&-3\\ 2&-1&1\end{array}\right||=|(0,-6,-6)|=6\sqrt{2}$$

b) Calculamos $\pi\perp r\Longrightarrow \pi: 2x-y+z+\lambda=0$, imponemos que $Q\in\pi\Longrightarrow 6-5-3+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow \pi: 2x-y+z+2=0$.

Calculamos el punto de corte de $r$ con $\pi$: $2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+\lambda+2=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow$ el punto de corte será: $Q'(1,3,-1)$

**Problema 2.18.9** *(2 puntos)* Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

**Solución:**

$$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1),\quad \overrightarrow{AC}=(1,2,2),\quad \overrightarrow{BC}=(-1,4,1)$$

a) $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=3$ y $|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2}$. Como tiene dos lados iguales es un triángulo isósceles.

b) $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2-4+2}{9}=0\Longrightarrow\alpha=90^\circ$, luego se trata de un triángulo rectángulo e isósceles y los otros dos ángulos tienen que ser iguales $\beta=\gamma\Longrightarrow\beta=\gamma=45^\circ$.

## 2.18.5. Extraordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.18.10** *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1\equiv 2x+y-z=1\ \text{ y }\ \pi_2\equiv x+2y+z=3$$

, se pide:

a) (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de $\pi_1$ y $\pi_2$.

b) (1 punto) Calcular la recta paralela a $\pi_1$, paralela a $\pi_2$ y que pasa por el punto $A(1,1,1)$.

**Solución:**

a) $P(x,y,z)$ tales que $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$:

$$\frac{|2x+y-z-1|}{\sqrt{6}}=\frac{|x+2y+z-3|}{\sqrt{6}}\Longrightarrow |2x+y-z-1|=|x+2y+z-3|\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z-1=x+2y+z-3\Longrightarrow \pi_1':x-y-2z+2=0\\ 2x+y-z-1=-x-2y-z+3\Longrightarrow \pi_2':3x+3y-4=0\end{array}\right.$$

b) La recta paralela a $\pi_1$ y $\pi_2$ tiene que ser paralela a la intersección de ambos planos.

$$\overrightarrow{u_r}=|\overrightarrow{u_{\pi_1}}\times\overrightarrow{u_{\pi_2}}|=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 2&1&-1\\ 1&2&1\end{array}\right|=(3,-3,3)=3(1,-1,1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\\ P_r=A(1,-1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

## Opción B

**Problema 2.18.11** *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,1,3)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el plano $\pi$ que contiene los puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$.

b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de $O$ respecto del plano $\pi'\equiv x+y-z+3=0$.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices $O$, $P_1$, $P_2$, $P_3$.

**Solución:**

a) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_2P_3}=(4,-3,-2)\\ \overrightarrow{P_2P_1}=(1,1,0)\\ P_2(0,0,3)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x&y&z-3\\ 4&-3&-2\\ 1&1&0\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$2x-2y+7z-21=0$$

b) Seguimos el siguiente proceso:

- ☛ Calculamos $r\perp\pi'/O\in r\Longrightarrow \overrightarrow{r}=(1,1,-1)$:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto de corte de $r$ con $\pi'$:

$$\lambda+\lambda+\lambda+3=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow O'(-1,-1,1)$$

- ☛ $\dfrac{O+O''}{2}=O'\Longrightarrow O''=2O'-O=(-2,-2,2)$

c) $\overrightarrow{OP_1}=(1,1,3)$, $\overrightarrow{OP_2}=(0,0,3)$ y $\overrightarrow{OP_3}=(4,-3,1)$:

$$V=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}|=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ u^3$$

## 2.19. Año 2018

### 2.19.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.19.1** *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1\equiv 3x+y+2z-1=0$, $\pi_2\equiv 2x-y+3z-1=0$ y la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1-2t\\ y=-1+t\\ z=1+t\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los puntos de la recta $r$ equidistantes de $\pi_1$ y $\pi_2$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2,3,2)$ con los puntos de intersección de $r$ con $\pi_1$ y $\pi_2$.

**Solución:**

a) Sea $P_r(1-2t,-1+t,1+t)$ un punto cualquiera de la recta $r$:

$$d(P_r,\pi_1)=d(P_r,\pi_2)\Longrightarrow$$

$$\frac{|3(1-2t)+(-1+t)+2(1+t)-1|}{\sqrt{14}}=\frac{|2(1-2t)-(-1+t)+3(1+t)-1|}{\sqrt{14}}\Longrightarrow$$

$$|-3t+3|=|-2t+5|\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -3t+3=-2t+5\Longrightarrow t=-2\Longrightarrow P_1(5,-3,-1)\\ -3t+3=2t-5\Longrightarrow t=8/5\Longrightarrow P_2(-11/5,3/5,13/5)\end{array}\right.$$

b) Corte de $r$ con $\pi_1$:
$-3t+3=0\Longrightarrow t=1\Longrightarrow A(-1,0,2)$
Corte de $r$ con $\pi_2$:
$-2t+5=0\Longrightarrow t=5/2\Longrightarrow A(-4,3/2,7/2)$
$\overrightarrow{PA}=(1,-3,0)$ y $\overrightarrow{PB}=(-2,-3/2,3/2)$:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -3 & 0\\ -2 & -3/2 & 3/2\end{vmatrix}|=\frac{3\sqrt{35}}{4}\ u^2$$

**Opción B**

**Problema 2.19.2** *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1\equiv x+y=0$, $\pi_2\equiv x=0$ y el punto $B(-1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto $B'$, simétrico de $B$ respecto del plano $\pi_2$.

b) (1 punto) Obtener una ecuación de la recta $r$, contenida en el plano $\pi_1$, paralela al plano $\pi_2$ y que pasa por el punto $B$.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

**Solución:**

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calcular la recta $t \perp \pi_2/B \in t$. Tenemos $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, 0, 0)$: $t : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
- ☛ Calcular el punto de corte $B''$ de $t$ con $\pi_2$: $1 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow B''(0, 1, 1)$
- ☛ $\dfrac{B + B'}{2} = B'' \Longrightarrow B' = 2B'' - B = (0, 2, 2) - (-1, 1, 1) = (1, 1, 1)$

b) $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1) \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ radianes.

### 2.19.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.19.3** *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$;, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1,5 punto) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2; 1; 3)$ y $B(1; 2; 3)$, calcular los vértices $C$ y $D$, sabiendo que $C$ pertenece a los planos $\pi_2$ y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

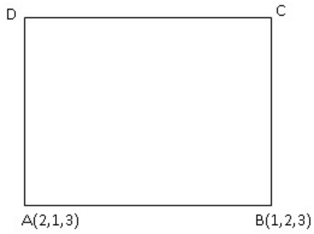
**Solución:**

a) La única posibilidad de que el cubo tenga una cara en cada plano es que éstos sean paralelos. En el caso de que no lo fueran, es decir, si se cortan cabría la posibilidad de que fuesen perpendiculares, pero en este caso habría infinitas soluciones. Veamos que son paralelos: $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{-12}{6} \neq \dfrac{1}{-5} \Longrightarrow$ paralelos. La longitud del lado del cubo buscado será $l = d(\pi_2, \pi_1)$, para calcular esta distancia tomamos un punto cualquiera $A$ de $\pi_2 : -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \Longrightarrow A(0, 0, 5/6)$ y tendremos:

$$l = d(\pi_2, \pi_1) = d(A, \pi_1) = \frac{|0 + 0 - 12 \cdot 5/6 + 1|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{|-9|}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14}$$

$$V = l^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} = 0,266\ u^2$$

b) El cuadrado es:




$$C \in r = \pi_2 \cap \pi_3 \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} -2x - 3y + 6z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1+3\lambda}{5} \\ \\ y = \dfrac{-9+8\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Luego $C\left(\dfrac{1+3\lambda}{5}, \dfrac{-9+8\lambda}{5}, \lambda\right)$. Por ser un cuadrado $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

El vector $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ y el $\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{1+3\lambda}{5}, \dfrac{-9+8\lambda}{5}, \lambda\right) - (1, 2, 3) =$
$\left(\dfrac{-4+3\lambda}{5}, \dfrac{-19+8\lambda}{5}, \lambda - 3\right)$. Luego $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{4-3\lambda}{5} + \dfrac{-19+8\lambda}{5} = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow$
$C(2, 3, 3)$.
$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (2, 1, 3) + (1, 1, 0) = (3, 2, 3)$ (El vector $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 0)$)

## Opción B

**Problema 2.19.4** *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{array} \right.$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P$ a la recta $r$.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta $s$ y que pasa por el punto $P$.

**Solución:**

$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -5) \\ P_r(0, 2, 6) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-3, 3, 1) \\ P_s(2, -1, 1) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{PP_r} = (-1, 1, 5)$ y $|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -5 \end{array} \right|| = |(5, 0, 1)| = \sqrt{26}$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} \simeq 0,931\ u$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, -3, -5)$ y $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow r$ y $s$ se cruzan.

c) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (-3, 3, 1) \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + \lambda = 0$ como $P \in \pi \Longrightarrow -3 + 3 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow$ $\lambda = -1$, luego $\pi : -3x + 3y + z - 1 = 0 \Longrightarrow \pi : 3x - 3y - z + 1 = 0$

### 2.19.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.19.5** *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,0,1)$ y la recta $r$ que pasa por los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(0,1,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de $r$ con el plano que contiene a $P$, $Q$ y $R$.

b) (0,75 puntos) Hallar un punto $T$ de $r$, tal que los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PT}$ sean linealmente dependientes.

c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0;0;0)$ y los puntos $P$, $Q$, $R$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\\ P_r=B(0,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

a) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{RP}=(1,1,0)\\ R(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}0&1&x\\1&1&y\\0&0&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: z-1=0$

El punto de corte de $r$ con $\pi$: $0+0+\lambda-1=0\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow (0,2,1)$

b) $T(0,1+\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{PQ}=(0,-1,0)$, $\overrightarrow{PR}=(-1,-1,0)$ y $\overrightarrow{PT}=(0,1+\lambda,\lambda)-(1,1,1)=(-1,\lambda,\lambda-1)$:
$\left|\begin{array}{ccc}0&-1&0\\-1&-1&0\\-1&\lambda&\lambda-1\end{array}\right|=-\lambda+1=0\Longrightarrow\lambda=1$
Si $\lambda=1$ los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PT}$ son linealmeente dependientes, luego $T(0,2,1)$.

c) $\overrightarrow{OP}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,0,1)$ y $\overrightarrow{OR}=(0,0,1)$:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-1|=\frac{1}{6}\,u^3$$

**Opción B**

**Problema 2.19.6** *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=-2\\ y=-3+2\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right.$, $s\equiv\left\{\begin{array}{l}-x+y+2z+4=0\\ -x+2y+3z+5=0\end{array}\right.$ y el punto $P(-1,2,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

b) (0,75 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por $P$ y es paralelo a $r$ y a $s$.

c) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto $P$ y el punto $P'$ proyección de $P$ sobre el plano $z=0$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,2,-1)\\ P_r(-2,-3,0)\end{array}\right. \text{ y } s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(3,-1,0)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (5,2,0) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ las rectas $r$ y $s$ se cruzan.

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-2)$ como $P \in \pi \Longrightarrow x-y-2z+\lambda = 0 \Longrightarrow -1-2+2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \pi : x-y-2z+1 = 0$

c) Calculo de $P'$ proyección de $P$ sobre $\pi' : z = 0$:

- Calculamos una recta $t \perp \pi'/P \in t$:
$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0,0,1) \\ P_t = P(-1,2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1+\lambda \end{array} \right.$
- calculamos $P'$ punto de corte de $t$ con $\pi'$: $-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(-1,2,0)$

$\overrightarrow{OP} = (-1,2,-1)$ y $\overrightarrow{OP'} = (-1,2,0)$

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(2,1,0)| = \frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

### 2.19.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.19.7** *(2,5 puntos)* Se consideran los vectores $\overrightarrow{u} = (-1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$ y el punto $A(-4,4,7)$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ , unitario y con tercera coordenada negativa.

b) (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

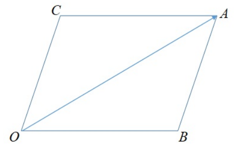
c) (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.

**Solución:**

a) $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-2,5,-4)| = \sqrt{45} \Longrightarrow \overrightarrow{w_1} = \left( \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}} \right)$

b) $\overrightarrow{w_2} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a(-1,2,3) + b(2,0,-1) = (-a+2b, 2a, 3a-b)$ y $\overrightarrow{w_2} \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{v} = (-a+2b, 2a, 3a-b) \cdot (2,0,-1) = -2a+4b+0-3a+b = 0 \Longrightarrow -5a+5b = 0 \Longrightarrow a = b$ Por ejemplo si $a = b = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{w_2} = (1,2,2)$

c) Tenemos:




$\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a(-1,2,3) + b(2,0,-1) = (-a+2b, 2a, 3a-b) = (-4,4,7) \Longrightarrow a = 2$ y $b = -1$.
$\overrightarrow{OB} = 2(-1,2,3) \Longrightarrow B(-2,4,6)$ y $\overrightarrow{BA} = -(2,0,-1) = (-2,0,1) = \overrightarrow{OC} \Longrightarrow C(-2,0,1)$
Es decir, $O(0,0,0)$, $B(-2,4,6)$, $A(-4,4,7)$ y $C(-2,0,1)$.

**Opción B**

**Problema 2.19.8** *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta $r$, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (0,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a $r$ y pasa por $P$.

b) (0,5 puntos) Encontrar el punto $S$ contenido en $r$ tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta $r$.

c) (1,5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto $P$ y dos puntos $T_1$, $T_2$, contenidos en la recta $r$, que están a distancia $\sqrt{5}$ de $P$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (0,1,2) \\ P_r = Q(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ y } P(0,-1,1)$$

a)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0,1,2) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0,-1,1) - (1,0,1) = (-1,-1,0) \\ P_r(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 2y + z - 3 = 0$$

b) $S \in r \Longrightarrow S(1,\lambda,1+2\lambda)$ luego $\overrightarrow{SP} = (0,-1,1) - (1,\lambda,1+2\lambda) = (-1,-1-\lambda,-2\lambda)$ y como $\overrightarrow{SP} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow (-1,-1-\lambda,-2\lambda) \cdot (0,1,2) = -1 - \lambda - 4\lambda = 0 \Longrightarrow -1 - 5\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{5} \Longrightarrow S\left(1, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

c) Sea $T \in r$: $T(1,\lambda,1+2\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{PT} = (1,\lambda,1+2\lambda) - (0,-1,1) = (1,\lambda+1,2\lambda)$ y $|\overrightarrow{PT}| = \sqrt{1 + (\lambda+1)^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{5} \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow$

$$T_1(1,-1,-1) \;\; T_2\left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PT_1} = (1,-1,-1) - (0,-1,1) = (1,0,-2) \quad \overrightarrow{PT_2} = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right) - (0,-1,1) = \left(1, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 8/5 & 6/5\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{16}{5},\frac{-16}{5},\frac{8}{5}\right)\right|=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 8\left|\left(\frac{2}{5},\frac{-2}{5},\frac{1}{5}\right)\right|=\frac{12}{5}=2,4\ u^2$$

# 2.20. Año 2019

## 2.20.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.20.1** *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,2,-3)$; $B(1,5,0)$; $C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el plano $\pi$ que contiene a los puntos $A$, $B$, $C$ y la distancia del punto $D$ a dicho plano.

b) (0,5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) (0,5 punto) Calcular el área del triángulo definido por $A$, $B$ y $C$.

**Solución:**

a) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,3,3)\\ \overrightarrow{AC}=(4,4,2)\\ A(1,2,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z+3\\ 0 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$

$$\pi: x-2y+2z+9=0$$

$$d(D,\pi)=\frac{|4+2+6+9|}{\sqrt{1+4+4}}=7\ u$$

b) $\overrightarrow{AD}=(3,-3,6)$

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}0 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 2\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}|=\frac{|-126|}{6}=21\ u^3$$

c)

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(-6,12,-12)|=9\ u^2$$

**Opción B**

**Problema 2.20.2** *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ y+z=1\end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de $r$ y $s$.

b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

c) (0,5 puntos) Dado el punto $A(3,1,0)$, de la recta $s$, obtener un punto $B$, de la recta $r$, de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a la recta $r$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ P_r(2,3,1)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,-1,1)\\ P_s(3,1,0)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_sP_r}=(-1,2,1)$$

a) $[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\left|\begin{array}{ccc}-1&2&1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{array}\right|=0$ y $\text{Rango}(\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r})=2$ y $\text{Rango}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=1$, luego las dos rectas son paralelas.

b) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{P_sP_r}=(-1,2,1)\\ P_s(3,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-3&y-1&z\\1&1&-1\\-1&2&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$

$$\pi: x+z-3=0$$

c) $B\in r\Longrightarrow B(2+\lambda,3+\lambda,1-\lambda)\Longrightarrow \overrightarrow{AB}=(2+\lambda,3+\lambda,1-\lambda)-(3,1,0)=(-1+\lambda,2+\lambda,1-\lambda)$
$\overrightarrow{AB}\perp r\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Longrightarrow -1+\lambda+2+\lambda-1+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=0\Longrightarrow B(2,3,1)$

### 2.20.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.20.3** *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ y y la recta $s$ que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a $r$ y contenga a $s$.

c) (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta $r$ y que pase por el origen de coordenadas.

**Solución:**

Tenemos: $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ P_r(1,3,0)\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,0,-1)\\ P_s(2,-5,1)\end{array}\right.$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,-5,1)-(1,3,0)=(1,-8,1)$.
$[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}]=\left|\begin{array}{ccc}1&-8&1\\2&-2&1\\-1&0&-1\end{array}\right|=-8\neq 0\Longrightarrow r$ y $s$ se cruzan.

b) $\pi\parallel r$ y $s\subset\pi$:
$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,0,-1)\\ P_s(2,-5,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-2&y+5&z-1\\2&-2&1\\-1&0&-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$

$$\pi: 2x+y-2z+3=0$$

c) $\pi'\perp r$ y $O\in\pi'$:
$\pi': 2x-2y+z+\lambda=0\Longrightarrow 0+0-0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0$, luego: $\pi': 2x-2y+z=0$

**Opción B**

**Problema 2.20.4** *(2,5 puntos)* Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto $A$ al plano $\pi$.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano $\pi$ más próximo al punto $A$.

c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de $A$ respecto al plano $\pi$.

**Solución:**

a) $d(A,\pi)=\dfrac{|4+3+0-36|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\ u$

b) Calculamos la recta $t\perp\pi$ tal que $A\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,3,4)\\ P_t=A(2,1,0)\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=4\lambda\end{array}\right.$$

Calculamos el punto de corte $A'$ de $t$ con $\pi$: $2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda)=36\Longrightarrow 29\lambda=29\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow A'(4,4,4)$

c) $\dfrac{A+A''}{2}=A'\Longrightarrow A''=2A'-A=(8,8,8)-(2,1,0)=(6,7,8)$

## 2.20.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.20.5** *(2,5 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{w}=(1,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal (perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, que tenga módulo $\sqrt{3}/2$, y cuya tercera coordenada sea negativa.

b) (0,5 puntos) Calcular un vector $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y tal que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente independientes.

c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5,1,-1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=(1,-1,1)=-1(-1,1,-1)$

$$\overrightarrow{t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

b) Sea $\overrightarrow{u}=(a,b,c)\perp\overrightarrow{v}\Longrightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$, es decir: $(a,b,c)\cdot(1,0,-1)=a-c=0\Longrightarrow a=c$, por ejemplo $a=c=1$ y $b$ puede ser cualquier número real, elijo $b=0\Longrightarrow\overrightarrow{u}=(1,0,1)$.

Comprobamos la independencia: $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=2\neq0\Longrightarrow\overrightarrow{u}=(1,0,1)$ es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, y los tres vectores son linealmente independientes.

c) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{v} = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{w} = (1,1,0) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - y + z = 0$$

- ☛ Calculamos $t \perp \pi$ por $P(5,1,-1)$: $t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,1) \\ P_t(5,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

- ☛ Calculo $P'$ punto de corte de $t$ con $\pi$:

$$(5+\lambda) - (1-\lambda) + (-1+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P'(4,2,-2)$$

**Opción B**

**Problema 2.20.6** *(2,5 puntos)* Dadas la rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas.

b) (1,25 puntos) Dado el punto $P(5,0,1)$, de la recta $r$, obtener un punto $Q$, de la recta $s$, de modo que el triángulo $OPQ$ sea rectángulo, con ángulo recto en $O(0,0,0)$, y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.

**Solución:**

a) $r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(5,0,1) \end{cases}$

$s : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,-1,1) \\ P_s(3,4,0) \end{cases}$

$\overrightarrow{P_sP_r} = (5,0,1) - (3,4,0) = (2,-4,1)$

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_sP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \end{pmatrix} = 2$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow$ las rectas $r$ y $s$ son paralelas.

b) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \Longrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$

$P(5,0,1) \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = (5,0,1)$

$Q \in s \Longrightarrow Q(3-\lambda, 4-\lambda, \lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{OQ} = (3-\lambda, 4-\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 15 - 5\lambda + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{15}{4}$

$\overrightarrow{OQ} = \left(3 - \dfrac{15}{4}, 4 - \dfrac{15}{4}, \dfrac{15}{4}\right) = \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{26}\ u$, $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{4}\sqrt{235}\ u$ y $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{4}\sqrt{651}\ u$.

### 2.20.4. Ordinaria-Valencia

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

**Opción A**

**Problema 2.20.7** Consideramos en el espacio las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{array} \right.$ y $s : x = y + 1 = \dfrac{z-2}{2}$.

**Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) (3 puntos) La ecuación del plano que contiene las rectas $r$ y $s$.

b) (4 puntos) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r$.

c) (3 puntos) El valor que deben tener los parámetros reales $a$ y $b$ para que la recta $s$ esté contenida en el plano $\pi : x - 2y + az = b$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 3, 3) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, 3, 3) - (0, -1, 2) = (0, 4, 1)$.

$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow r$ y $s$ no se cruzan. Tenemos Rango$\left( \begin{array}{c} \overrightarrow{P_sP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \end{array} \right) = 2$ y Rango$\left( \begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 1$ por lo que $r$ y $s$ son paralelas.

El plano $\pi$ que contiene a ambas rectas vendrá determinado por:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r} = (0, 4, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 3, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y - 3 & z - 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 7x + y - 4z + 9 = 0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $P(0, -1, 2) \in \pi'$:

$$\pi' : x + y + 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 1 + 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3 \Longrightarrow$$
$$\pi' : x + y + 2z - 3 = 0$$

- ☛ Calculamos el punto de corte $P'$ de $\pi'$ y $r$:

$$(\lambda) + (3 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \Longrightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow$$

$$P'(-1, 2, 1)$$

☛ La recta $t$ buscada vendrá definida por:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PP'} = (-1,2,1) - (0,-1,2) = (-1,3,-1) \\ P_t = P(0,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$t: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

c) $s \subset \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2) \cdot (1,-2,a) = 1 - 2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

$P_s \in \pi \Longrightarrow 0 + 2 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = b \Longrightarrow b = 3$

**Opción B**

**Problema 2.20.8** Sea $\pi$ el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
**Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) (4 puntos) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a $\pi$ que distan 4 unidades de $\pi$.

b) (4 puntos) Los puntos $A$, $B$ y $C$ intersección del plano $\pi$ con los ejes $OX$, $OY$ y $OZ$ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

c) (2 puntos) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen $O$ de coordenadas y los puntos $A$, $B$ y $C$.

**Solución:**

a) Sea un plano $\pi_1 : 9x+12y+20z+a = 0$ paralelo a $\pi$, elegimos un punto cualquiera del plano $\pi$, por ejemplo $P(0,0,9)$, y calculamos $d(P,\pi_1) = \dfrac{|0+0+180+a|}{\sqrt{81+144+400}} = \dfrac{|180+a|}{\sqrt{625}} = 4 \Longrightarrow$ $|180+a| = 100$, tendremos dos soluciones:

- ☛ $180 + a = 100 \Longrightarrow a = -80 \Longrightarrow \pi_1' : 9x + 12y + 20z - 80 = 0$
- ☛ $180 + a = -100 \Longrightarrow a = -280 \Longrightarrow \pi_1'' : 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) Puntos de corte con los ejes del plano $\pi : 9x + 12y + 20z = 180$:

- ☛ Con $OX$: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 9x = 180 \Longrightarrow x = 20 \Longrightarrow A(20,0,0)$
- ☛ Con $OY$: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 12y = 180 \Longrightarrow y = 15 \Longrightarrow B(0,15,0)$
- ☛ Con $OZ$: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow 20z = 180 \Longrightarrow z = 9 \Longrightarrow C(0,0,9)$

$\overrightarrow{AB} = (0,15,0) - (20,0,0) = (-20,15,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,0,9) - (20,0,0) = (-20,0,9)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{400}{\sqrt{625}\sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}} \Longrightarrow \alpha = 43^\circ 9' 8''$$

c) $\overrightarrow{OA} = (20,0,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,15,0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0,0,9)$:

$$V = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} | = \frac{1}{6}|2700| = 450\ u^3$$

### 2.20.5. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.20.9** *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0,5 puntos) Obtener un punto $D$ (distinto de $A$, $B$ y $C$) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto $P$ del eje $OX$, de modo que el volumen del tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $P$ sea igual a 1.

**Solución:**

a) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,2,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4,-2,0) \\ A(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x - 2y - z + 2 = 0$$

b) Cualquier punto del plano $\pi$ nos valdría, por ejemplo: $D(-2,0,0)$.

c) Un punto cualquiera del eje $OX$ puede ser $P(a,0,0)$:
$\overrightarrow{AB} = (0,2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,-2,0)$ y $\overrightarrow{AP} = (a-1,-1,-1)$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]| = \frac{1}{6}| \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{array} \right| = \frac{1}{6}|-8(a+2)| = 1 \Longrightarrow$$

$$|-8a-16| = 6 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8a-16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{11}{4} \Longrightarrow P_1\left(-\dfrac{11}{4}, 0, 0\right) \\ \\ 8a+16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{4} \Longrightarrow P_2\left(-\dfrac{5}{4}, 0, 0\right) \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.20.10** *(2,5 puntos)* Dados el plano, $\pi : 2x+3y-z = 4$, y las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{array} \right.$ y $s : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \overline{R}$, se pide

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de $\pi$.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi$, que pasa por el punto intersección de las rectas $r$ y $s$.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos la recta $t \perp \pi$ que contiene a $P(1,2,3)$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,3,-1)\\ P_t=P(1,2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=2+3\lambda\\ z=3-\lambda\end{array}\right.$$

☛ Calculo $P'$ punto de corte de $t$ con $\pi$:

$$2(1+2\lambda)+3(2+3\lambda)-(3-\lambda)=4 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{14} \Longrightarrow P'\left(\frac{6}{7},\frac{25}{14},\frac{43}{14}\right)$$

☛ Calculo $P''$:

$$\frac{P+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=2\left(\frac{6}{7},\frac{25}{14},\frac{43}{14}\right)-(1,2,3)$$

$$\Longrightarrow P''\left(\frac{5}{7},\frac{11}{7},\frac{22}{7}\right)$$

b) $s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2\\ z=3+\lambda\end{array}\right.$ sustituimos en $r$ y nos queda:

$$r:\left\{\begin{array}{l}1+\lambda+2-(3+\lambda)=0 \Longrightarrow 0=0\\ 1+\lambda+2+3+\lambda=2 \Longrightarrow \lambda=-2\end{array}\right. \Longrightarrow Q(-1,2,1) \text{ punto de corte}$$

$$l:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_l}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,3,-1)\\ P_l=Q(-1,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow l:\left\{\begin{array}{l}x=-1+2\lambda\\ y=2+3\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

c) $\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&1&-1\\ 1&1&1\end{array}\right|=2(1,-1,0)$ y $\overrightarrow{u_s}=(1,0,1)$:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha=60^\circ$$

## 2.21. Año 2020

### 2.21.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.21.1** *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r_1:\left\{\begin{array}{l}x=z-1\\ y=2-3z\end{array}\right.$ y $r_2:\left\{\begin{array}{l}x=4+5z\\ y=4z-3\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta $r_2$ y el plano que contiene a $r_1$ y pasa por el origen de coordenadas.

**Solución:**

$$r_1 : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2-3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-3,1) \\ P_{r_1}(-1,2,0) \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 4+5\lambda \\ y = -3+4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (5,4,1) \\ P_{r_2}(4,-3,0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (4,-3,0) - (-1,2,0) = (5,-5,0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}| = |(-7,4,19)| = \sqrt{426}$$

$$d(r_1,r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{55}{\sqrt{426}} = \frac{55\sqrt{426}}{426}\ u$$

b) $$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-3,1) \\ \overrightarrow{OP_{r_1}} = (-1,2,0) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + y + z = 0$$

El punto de corte de $r_2$ con $\pi$ será:

$$2(4+5\lambda) + (-3+4\lambda) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P\left(\frac{7}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

## Opción B

**Problema 2.21.2** *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo $OPQ$, siendo $O(0,0,0)$, $P$ el punto medio del segmento $AB$ y $Q$ la intersección de la recta que pasa por $A$ y $B$ y el plano $\pi : z = 7$.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A$ y es perpendicular a la recta $r$.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta $r$ y la recta que pasa por $A$ y $B$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,5,0) \\ P_r(1,-2,3) \end{cases}$$

a) $P=\dfrac{A+B}{2}=(2,0,1)$, la recta que pasa por $AB$ es

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=2(1,-1,3)\\ P_s=A(1,1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{array}\right.$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano $\pi: z=7$: $-2+3\lambda=7\Longrightarrow \lambda=3$, el punto $Q$ es $Q(4,-2,7)$.

$$\overrightarrow{OP}=(2,0,1),\ \ \overrightarrow{OQ}=(4,-2,7)$$

$$S_T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 2&0&1\\ 4&-2&7\end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2,-10,-4)|=\sqrt{30}\ \ u^2$$

b) $\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(3,5,0)\Longrightarrow \pi':3x+5y+\lambda=0$ sustituyendo $A$ tenemos $3+5+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-8\Longrightarrow \pi':3x+5y-8=0$

c)

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|-2|}{\sqrt{34}\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{374}}{187}=0,1034175379$$

### 2.21.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.21.3** *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ 3x-z=-1\end{array}\right. \ \text{y}\ s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+2\lambda\\ y=-4-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.,$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta $r$ y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta $r$ que contiene a la recta $s$.

**Solución:**

a) $r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+3\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,3)\\ P_r(0,-2,1)\end{array}\right.,\ s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+2\lambda\\ y=-4-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-1,-4,0)\end{array}\right.$

y $\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,-2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc}-1&-2&-1\\ 1&1&3\\ 2&-1&1\end{array}\right|=-11\neq 0\Longrightarrow r\ \text{y}\ s\ \text{se cruzan}$$

b) $\pi\perp r\Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,3)\Longrightarrow x+y+3z+\lambda=0$ como $P(2,-1,5)\in\pi\Longrightarrow 2-1+15+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-16\Longrightarrow \pi:x+y+3z-16=0$.

c) $\pi'\parallel r$ y $s\subset\pi'\Longrightarrow \pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,3)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-1,-4,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x+1&y+4&z\\ 1&1&3\\ 2&-1&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi':$ $4x+5y-3z+24=0$

**Opción B**

**Problema 2.21.4** *(2,5 puntos)* Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano $\pi$ de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de $Q$ sobre $\pi$.

b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a $\pi$ que pasa por el punto $P$.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a $\pi$ que contiene a los puntos $P$ y $Q$.

**Solución:**

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,2,-3)\\ P_t=Q(-1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1-3\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto $Q'$ proyección de $Q$ sobre $\pi$ en el punto de corte de $t$ con $\pi$:

$$(-1+\lambda)+2(2\lambda)-3(1-3\lambda)=4 \Longrightarrow \lambda=\frac{4}{7} \Longrightarrow Q'\left(-\frac{3}{7},\frac{8}{7},-\frac{5}{7}\right)$$

b) Si $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \pi': x+2y-3z+\lambda=0$ como $P(-3,1,2)\in\pi' \Longrightarrow -3+2-6+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=7 \Longrightarrow \pi': x+2y-3z+7=0$

c) $\pi'' \perp \pi \Longrightarrow \pi'':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-3)\\ \overrightarrow{PQ}=(2,-1,-1)\\ P(-3,1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\pi'':\left|\begin{array}{ccc} x+3 & y-1 & z-2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & -1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': x+y+z=0$$

### 2.21.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.21.5** *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,-4,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

b) (0,75 puntos) Determinar una ecuación del plano $\pi$ que contiene a los tres puntos.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $A$ respecto de la recta que pasa por los puntos $B$ y $C$.

**Solución:**

a) Sean $\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$. Tenemos que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ luego los tres puntos determinan un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se encuentra en el vértice $A$. Los catetos serán los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la hipotenusa el segmento $\overline{BC}$.

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,2,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,1) \\ A(0,-4,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+4 & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - 4y + 5z - 26 = 0$$

c) Sea $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BC} = (-4,-1,0) = -(4,1,0) \\ P_r = B(3,-2,3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$

Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r / A \in \pi' \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r}$:

$$\pi' : 4x + y + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \Longrightarrow \pi' : 4x + y + 4 = 0$$

- Calculamos el punto $A'$ de corte de $r$ y $\pi'$:

$$4(3+4\lambda) + (-2+\lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{14}{17} \Longrightarrow A'\left(-\frac{5}{17}, -\frac{48}{17}, 3\right)$$

- $\dfrac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(-\frac{5}{17}, -\frac{48}{17}, 3\right) - (0,-4,2) \Longrightarrow A''\left(-\frac{10}{17}, -\frac{28}{17}, 4\right)$

**Opción B**

**Problema 2.21.6** *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y la recta $s$ que pasa por $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1,1,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta $r$ y a un vector perpendicular a $r$ y a $s$.

c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a $r$ y a $s$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_s = A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \frac{1}{4} - \lambda \\ y = \frac{1}{4} + \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Hacemos $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - (0,2,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) Sea $\overrightarrow{u_t} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi := \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -x + 2y + z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

c) La recta perpendicular a $r$ y $s$ la calculamos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 = \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ \\ P_s = A\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x - 1/4 & y - 1/4 & z - 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \pi_2 : 2x + 2y + 4z - 3 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x + 2y + 4z - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - \lambda \\ \\ y = \dfrac{11}{6} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{cases}$$

### 2.21.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 2.21.7** *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto $P$ y a la recta $r$.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P$ respecto de $r$.

c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos $A$ y $B$ de $r$ tales que el triángulo $ABP$ sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en $A$.

**Solución:**

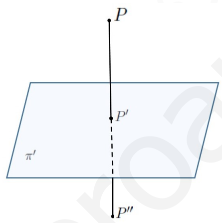
Tenemos $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{cases}$

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,3,1) \\ P(3,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

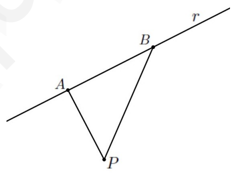
$$\pi : x + y - 4z - 6 = 0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r / P \in \pi'$:
  $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \Longrightarrow \pi' : -x + y + \lambda = 0$
  $P \in \pi' \Longrightarrow -3 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : -x + y = 0$
- Calculamos el punto $P'$ de corte de $\pi'$ con $r$. Para ello pasamos la ecuación de la recta $r$ a paramétricas y sustituimos en el plano.
  $r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow -(2-\lambda) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. Y sustituyendo en $r$ tenemos $P'(1,1,-1)$
- Ahora tenemos que $P'$ es el punto medio entre $P$ y su simétrico $P''$: $\dfrac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow$ $P'' = 2P' - P = (2,2,-2) - (3,3,0) \Longrightarrow P''(-1,-1,-2)$




c) Como $A$ y $B$ están en la recta $r$ podemos poner de forma general $A(2-\lambda, \lambda, -1)$ y $B(2-\mu, \mu, -1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (\lambda - \mu)(1,-1,0)$.




Tenemos que el vector $\overrightarrow{AP} = (3,3,0) - (2-\lambda, \lambda, -1) = (1+\lambda, 3-\lambda, 1)$
Como el ángulo recto se encuentra en el vértice $A$ tenemos que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \Longrightarrow (1,-1,0)\cdot(1+\lambda, 3-\lambda, 1) = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A(1,1,-1)$, el vector $\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (1-\mu)(1,-1,0)$.
El área sería:

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}|(1-\mu)\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(1-\mu)(1,1,-4)| = \frac{1}{2}|1-\mu|\sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2}|1-\mu| = \frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |1-\mu| = 1.$$

- ☛ $1-\mu=1 \Longrightarrow \mu=0 \Longrightarrow B(2,0,-1)$ y $A(1,1,-1)$.
- ☛ $1-\mu=-1 \Longrightarrow \mu=2 \Longrightarrow B(0,2,-1)$ y $A(1,1,-1)$.

**Opción B**

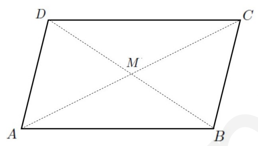
**Problema 2.21.8** *(2,5 puntos)* Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $AC$ y es perpendicular a los segmentos $AC$ y $BC$.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice $D$ y el área del paralelogramo resultante.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

**Solución:**




a) $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$. $\overrightarrow{AC}=(3,3,-1)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,2,-2)$.

Tenemos: $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4(1,-1,0)$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ P_r=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{2}+\lambda \\ \\ y=\frac{3}{2}-\lambda \\ \\ z=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

b) $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=(1,0,-1)+(2,2,-2)=(3,2,-3)$
Tenemos $\overrightarrow{AD}=(2,2,-2)$ y $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}|=|-4(1,-1,0)|=4\sqrt{2}\ u^2$$

c)

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3+3-1}{\sqrt{19}\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{57}}{57}\Longrightarrow \alpha=48^\circ 31' 38''$$

## 2.22. Año 2021

### 2.22.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.22.1** *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto $Q$ sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta $r$ que contiene a $A$ y $P$, y de la recta $s$ que contiene a $B$ y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) (0,75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{AB}=(-3,2,2)$ y $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{AB}=(3,-2,-2)$. Tenemos $\overrightarrow{PQ}=Q-P\Longrightarrow Q=P+\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)+(3,-2,-2)\Longrightarrow Q(2,-1,-2)$.

b) Tenemos:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AP}=(-4,0,-2)=-2(2,0,1)\\ P_r=A(3,1,2)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=1\\ z=2+\lambda\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{BC}=(2,-4,-6)=2(1,-2,-3)\\ P_s=B(0,3,4)\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=\mu\\ y=3-2\mu\\ z=4-3\mu\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda=\mu\\ y=1=3-2\mu\\ z=2+\lambda=4-3\mu\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=-1\\ \mu=1\end{array}\right.\Longrightarrow H(1,1,1)$$

c) $\overrightarrow{PA}=(4,0,2)\Longrightarrow\left|\overrightarrow{PA}\right|=2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{PB}=(1,2,4)\Longrightarrow\left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{21}$ y $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4+0+8=12$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\frac{12}{2\sqrt{5}\sqrt{21}}=\frac{6}{\sqrt{105}}=\frac{6\sqrt{105}}{105}$$

$$\alpha=54^\circ 9'32''$$

**Opción B**

**Problema 2.22.2** *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r:\left\{\begin{array}{l}x+2z=1\\ y+z=2\end{array}\right.$, $s:\left\{\begin{array}{l}x=-3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta $s$.

b) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de $r$ y $s$.

c) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta $r$ y al vector perpendicular a $r$ y a $s$.

d) (0,75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a $r$ y a $s$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+2z=1\\ y+z=2\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} x=-3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-3,2,1)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{OP_s}=(-3,2,1)$ y

$\left|\overrightarrow{u_s}\times\overrightarrow{OP_s}\right| = |\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{array}\right|| = |(-3,-5,1)| = \sqrt{35}$

$d(O,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_s}\times\overrightarrow{OP_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|}=\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{210}}{6}$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(-4,0,1)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc} -4 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right| = 4\neq 0 \Longrightarrow r$ y $s$ se cruzan $r \nparallel s$.

c) $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right| = (0,4,4)=4(0,1,1)$

$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{ccc} x-1 & y-2 & z\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$

$\pi_1: x-y+z+1=0$

d) Como intersección de dos planos. Uno de ellos sería el calculado en el apartado anterior y el otro sería:

$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-3,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left|\begin{array}{ccc} x+3 & y-2 & z-1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$

$\pi_2: x+y-z+2=0$

$$t:\left\{\begin{array}{l} x-y+z+1=0\\ x+y-z+2=0\end{array}\right.$$

### 2.22.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 2.22.3** *(2,5 puntos)* Sean la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l} -x-y+z=0\\ 2x+3y-z+1=0\end{array}\right.$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el ángulo que forman $r$ y $\pi$.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta $r$ y el plano $\pi$ con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0,75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta $r$ sobre el plano $\pi$.

**Solución:**

a) $\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1)$ y un punto de la recta puede ser $P_r(-1, 0, -1)$. El vector ortogonal al plano $\pi$ es $\overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|-4+1+1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = 19^\circ 28' 16,39''$$

b) Calculamos el punto de intersección de $r$ con $\pi$, tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en $\pi \Longrightarrow 2(-1-2\lambda) + \lambda - (-1-\lambda) + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y sustituyendo en $r \Longrightarrow A(-3, 1, -2)$

Para calcular el simétro de $A$ respecto del plano $\pi' : -y + z = 0$ seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi' / A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi'}}(0, -1, 1) \\ P_t = A(-3, 1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array} \right.$$

- ☛ Calculamos el punto de corte $A'$ de $t$ con $\pi'$:

$$-(1-\lambda) + (-2+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

  Sustituyendo en $t \Longrightarrow A'\left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- ☛ Calculamos el punto de corte $A''$ sabiendo que $A'$ es el punto medio entre $A''$ y $A$:

$$A' = \frac{A + A''}{2} \Longrightarrow A'' = 2A' - A = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-3, -2, 1)$$

c) Calculamos la recta proyección como intersección de dos planos, uno de ellos es $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ y el otro $\pi''$ será un plano perpendicular a $\pi$ que contenga a $r$:

$$\pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi'' : y + z + 1 = 0$$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z == \lambda \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.22.4** *(2,5 puntos)* Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.

a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano $\pi_1$ tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0,2,0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2$.

c) (0,5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano $\pi_1$ con los ejes $x$ e $y$.

**Solución:**

a) Los planos paralelos a $\pi_1$ tienen de ecuación $\pi' : x+y+\lambda = 0$

$$d(O,\pi') = \frac{|0+0+\lambda|}{\sqrt{2}} = 2 \Longrightarrow |\lambda| = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

Los planos serían: $\pi_1' : x+y+2\sqrt{2} = 0$ y $\pi_2' : x+y-2\sqrt{2} = 0$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$

c) $\pi_1 : x+y=1$ con eje $OX$ hacemos $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow A(1,0,0)$
$\pi_1 : x+y=1$ con eje $OY$ hacemos $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow B(0,1,0)$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-1,1,0)| = \sqrt{2}\ u$$

## 2.22.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción A**

**Problema 2.22.5** *(2,5 puntos)* Desde el punto $P_1 = (1,1,-1)$ se ha trazado una recta, $r$, perpendicular a un plano, $\pi$. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0,0,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta $r$.

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano $\pi$.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia de $P_1$ al plano $\pi$.

**Solución:**

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{P_2P_1} = (1,1,-1) \\ P_r = P_2 = (0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \Longrightarrow \pi : x+y-z+\lambda = 0$ como $P_2(0,0,0) \in \pi \Longrightarrow 0+0-0+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x+y-z = 0$

c) $d(P_1,\pi) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$

**Opción B**

**Problema 2.22.6** *(2,5 puntos)* En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2,3,-5)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1,-2,2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a $45°$, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde $P$ en dirección perpendicular a $\pi$, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a $\pi$, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de $\pi$ que $P$. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

**Solución:**

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (-1,-2,2) \\ P_r = P(2,3,-5) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en el plano:

$$3(2-\lambda) - 2(3-2\lambda) - 2(-5+2\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow P_1(-1,-3,1)$$

b) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|(-1,-2,2)\cdot(3,-2,-2)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{17}} =$
$\frac{|-3+4-4|}{3\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \Longrightarrow \alpha = 14°2'11'' \Longrightarrow$ no se realiza la perforación.

c) Hay que calcular el punto simétrico de $P$ respecto de $\pi$:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (3,-2,-2) \\ P_r = P(2,3,-5) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 - 2\lambda \end{array} \right.$$

- ☛ Calculamos el punto $P'$ de corte de $t$ con $\pi$

$$3(2+3\lambda) - 2(3-2\lambda) - 2(-5-2\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{9}{17} \Longrightarrow$$

$$P'\left(\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, -\frac{67}{17}\right)$$

- ☛ El punto $P'$ calculado en apartado anterior será el punto medio entre el buscado $P''$ y el dado $P$:
$P' = \frac{P+P''}{2} \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{14}{17}, \frac{138}{17}, -\frac{134}{17}\right) - (2,3,-5) = \left(-\frac{20}{17}, \frac{87}{17}, -\frac{49}{17}\right)$

### 2.22.4. Extrordinaria

**Opción A**

**Problema 2.22.7** *(2,5 puntos)* Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano $\pi$ y el plano perpendicular a la recta $r$ que pasa por el punto $A$.

b) (0,75 puntos) Determinar la distancia entre la recta $r$ y el plano $\pi$.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por $A$, forma un ángulo recto con la recta $r$ y no corta al plano $\pi$.

**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(1,-1,2) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,-1)$$

a) El plano $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \Longrightarrow \pi' : x+y+2z+\lambda = 0$ imponiendo $A \in \pi' \Longrightarrow 1+0-2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \pi' : x+y+2z+1=0$
$\cos\alpha = \frac{|u_\pi \cdot u_{\pi'}|}{|u_\pi|\cdot|u_{\pi'}|} = \frac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^\circ$

b) Para que este apartado tenga sentido $r$ y $\pi$ tienen que ser paralelos. En efecto, $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2)\cdot(1,1,-1) = 1+1-2 = 0$.
Por el apartado anterior ya sabíamos que $r \parallel \pi$.

Elegimos un punto $B(1,-1,2) \in r$ y calculamos la distancia de $B$ a $\pi$

$$d(B,\pi) = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ u$$

c) La recta $s$ que buscamos es perpendicular a $r$ y paralela a $\pi$ por lo que $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_\pi} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| =$
$(-3,3,0) = 3(-1,1,0)$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_s = A(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right.$$

**Opción B**

**Problema 2.22.8** *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a $r$ y a $s$.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -3) \\ P_r(2, -1, -4) \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2(2 - \lambda) + 2\lambda = 5 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(2, 5, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 1)$ Calculamos la recta $t$ como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -3) \\ P_r(2, -1, -4) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 := \begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z + 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_1 : 7x - 4y + z - 14 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(2, 5, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 := \begin{vmatrix} x - 2 & y - 5 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_2 : x - y + z + 3 = 0$$

$$t : \begin{cases} 7x - 4y + z - 14 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, 5, 0) - (2, -1, -4) = (0, 6, 4)$

$\left| \left[ \overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \right] \right| = | \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} | = |16| = 16$

$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\overrightarrow{u_t}| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{6}$

$d(r, s) = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \right] \right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}\ u$

## 2.23. Año 2022

### 2.23.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 2.23.1** *(2,5 puntos)* Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1, 0, 2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3, 1, 0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano $\pi$.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

**Solución:**

a) Tenemos:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (2,1,-2) \\ P_r = P(1,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{array} \right.$$

El punto de impacto es el punto de corte de $r$ con $\pi$:
$2(1+2\lambda) - \lambda + 2(2-2\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 11$
Sustituyendo en $r$ tenemos el punto $H(23, 11, -20)$
Si $\alpha$ es el ángulo que forma $\overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,2)$ con $\overrightarrow{u_r} = (2,1,-2)$
$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_\pi}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{|4-1-4|}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \frac{1}{9}$

b) Un punto genérico de la trayectoria sería $A(1+2\lambda, \lambda, 2-2\lambda)$ y sería $d(A,\pi) = 1$:
$d(A,\pi) = \frac{|2(1+2\lambda)-\lambda+2(2-2\lambda)+5|}{\sqrt{9}} = \frac{|11-\lambda|}{3} = 1 \Longrightarrow |11-\lambda| = 3$
$\left\{ \begin{array}{l} 11-\lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 8 \Longrightarrow A_1(17,8,-14) \\ 11-\lambda = -3 \Longrightarrow \lambda = 14 \Longrightarrow A_2(29,14,-26) \end{array} \right.$ Lo lógico es que los puntos calculados estén separados por el plano $\pi$ y pertenecen a la recta. Observamos la segunda coordenada en la que $y = \lambda$ y tenemos $P(1,0,2)$, continúa con $Q(3,1,0)$, continúa con $A_1(17,8,-14)$ e impacta en $H(23,11,-20)$. Luego el punto $A_2(29,14,-26)$ vendría después del impacto y no sería válido.

**Opción B**

**Problema 2.23.2** *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1,7,1)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Comprobar que $\pi_1$ y $\pi_2$ son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano $\pi_1$, otra cara en el plano $\pi_2$, y un vértice en el punto $A$.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $A$ respecto de $\pi_1$.

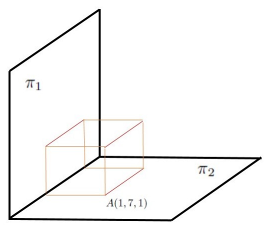
**Solución:**

a) Los vectores normales a los planos tienen que ser perpendiculares $\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1,-2,3)(3,0,-1) = 3 + 0 - 3 = 0$

b) Analizamos:
Observamos que el punto $A \in \pi_2$ luego el lado del cubo es la distancia de $A$ a $\pi_1$:

$$d(A,\pi_1) = \frac{|1-14+3-6|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

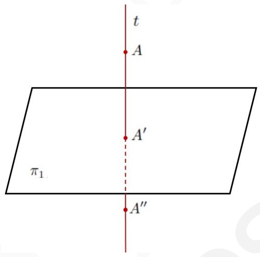
El volumen del cubo es $\left(\frac{16}{\sqrt{14}}\right)^3 = \frac{1024\sqrt{14}}{49} \simeq 78,193\ u^3$




c) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos una recta $t \perp \pi_1$ tal que $A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, -2, 3) \\ P_t = A(1, 7, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$$




☛ Calculamos el punto de corte $A'$ de $t$ con $\pi_1$:

$$(1 + \lambda) - 2(7 - 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = \frac{8}{7}$$

Sustituyendo en $t$: $A' \left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$

☛ $A'$ es el punto medio entre $A$ y el punto que buscamos $A''$:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{30}{7}, \frac{66}{7}, \frac{62}{7}\right) - (1, 7, 1) = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7}\right)$$