UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS DE GRADO
Curso 2019-2020 (Julio)

MATERIA: FÍSICA

INSTRUCCIONES GENERALES y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Todas las preguntas se calificarán sobre 2 puntos (1 punto cada apartado).

A.1 (2 puntos). Un satélite sigue una órbita circular sincrónica (es decir, del mismo período que el de rotación del planeta) de radio $1{,}59 \times 10^5$ km en torno a un planeta de masa $1{,}90\times10^{27}$ kg. Calcule:

a) La velocidad del satélite en la órbita.

b) El periodo de rotación del planeta sobre su eje.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Solución.

a. Si el satélite realiza una orbita circular con un movimiento uniforme, se debe cumplir que la suma de fuerzas que actúa sobre él debe ser igual a la fuerza centrípeta, responsable del tipo de movimiento.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_c \qquad \vec{F}_G = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo:

$$G \cdot \frac{M_{Planeta} \cdot m_{Satélite}}{r^2} = m_{Satélite} \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{M_{Planeta}}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M_{Planeta}}{r}}$$

$$v = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\,\frac{1{,}90\times10^{27}}{1{,}59\times10^{8}}} \approx 28\,232\ {}^{m}\!/\!_{s}$$

b. Aplicando la definición de velocidad lineal a un ciclo completo del satélite:

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi\, r}{v} = \frac{2\pi\cdot 1{,}59\times10^{8}}{28\,232} =\approx 35\,386\ s \cong 9\ h\ 49'\ 36''\ \pi$$

A.2 (2 puntos). Una onda armónica unidimensional, que se propaga en un medio con una velocidad de 400 m s^{-1}, está descrita por la siguiente expresión matemática:

$$y(x, t) = 3\,\text{sen}\,(k\,x - 200\pi\, t + \varphi_o)\ \text{cm}$$

donde x y t están en m y s, respectivamente. Sabiendo que y(0, 0) = 1,5 cm y que la velocidad de oscilación en t = 0 y x = 0 es positiva, halle:

a) El número de onda k y la fase inicial φ_o.

b) La aceleración máxima de oscilación de un punto genérico del eje x.

Solución.

a. De la ecuación de la onda se pueden obtener los siguientes datos:

- Amplitud: A = 3 cm
- Velocidad angular: $\omega = 200\pi$ rad/s
- Se desplaza en el sentido positivo del eje OX
- De la definición de velocidad de propagación, se puede obtener el número de onda.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda/2\pi}{T/2\pi} = \frac{1/k}{1/\omega} = \frac{\omega}{k} \qquad\qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{200\pi\ {}^{rad}\!/\!_{s}}{400\ {}^{m}\!/\!_{s}} = \frac{\pi}{2}\ {}^{rad}\!/\!_{m}$$

Para calcular la fase inicial, se puede hacer de dos formas diferentes:

i. Manteniendo el signo de la fase: Desplazando en OX$^+$ $y(x, t) = A\,\text{sen}\,(k\,x - \omega\, t + \varphi_o)$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$y(0, 0) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}0 - 200\pi\cdot 0 + \varphi_o\right) = 3\,\text{sen}\,\varphi_o = 1{,}5 \quad \text{sen}\,\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_o = \text{arcsen}\frac{1}{2} = \begin{cases} = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} \\ = \dfrac{5\pi}{6}\,\text{rad} \end{cases}$$

Para discernir cual de los dos posibles valores corresponde a φ_o se tiene en cuenta que la velocidad inicial es positiva.

Si $y(x,t) = A \operatorname{sen}(k\,x - \omega\,t + \varphi_o) \Rightarrow v(x,t) = \dfrac{d\,y}{dt} = A\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi_o)\cdot(-\omega)$

$v(x,t) = -\omega A\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi_o)$: $v(0,0) = -\omega A\cos(k\cdot 0 - \omega\cdot 0 + \varphi_o) = -\omega A\cos\varphi_o$

Teniendo en cuenta que ω y A son valores positivos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si}\quad \varphi_o = \dfrac{\pi}{6} \quad v(0,0) \overset{*}{=} -A\omega\cos\dfrac{\pi}{6} < 0 \\ \text{Si}\quad \varphi_o = \dfrac{5\pi}{6} \quad v(0,0) \overset{*}{=} -A\omega\cos\dfrac{5\pi}{6} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_o = \frac{5\pi}{6}\ \text{rad} \qquad * \left\{\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi}{6} > 0 \\ \cos\dfrac{5\pi}{6} < 0 \end{array}\right.$$

ii. Cambiando el signo de la fase: Desplazando en OX^+ $y(x,t) = A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$

$$y(x,t) = A\operatorname{sen}(k\,x - \omega\,t + \varphi_o) = A\operatorname{sen}\left[-(-k\,x + \omega\,t - \varphi_o)\right] \overset{*}{=} -A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o)$$

* sen (–α) = –sen α

Por trigonometría, también se sabe: $-\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \pi)$

$$y(x,t) = -A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o) = A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi)$$
$$y(0,0) = 3\operatorname{sen}(\omega\cdot 0 - k\cdot 0 - \varphi_o + \pi) = A\operatorname{sen}(-\varphi_o + \pi) = 1{,}5$$

$$\operatorname{sen}(-\varphi_o + \pi) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\varphi_o + \pi = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \left\{\begin{array}{ll} -\varphi_o + \pi = \dfrac{\pi}{6} & \varphi_o = \dfrac{5\pi}{6}\ \text{rad} \\ -\varphi_o + \pi = \dfrac{5\pi}{6} & \varphi_o = \dfrac{\pi}{6}\ \text{rad} \end{array}\right.$$

Si $y(x,t) = A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi) \Rightarrow v(x,t) = \dfrac{d\,y}{dt} = A\cos(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi)\cdot\omega$

$v(x,t) = \omega A\cos(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi)$: $v(0,0) = \omega A\cos(\omega\cdot 0 - k\cdot 0 - \varphi_o + \pi) = \omega A\cos(-\varphi_o + \pi)$

Teniendo en cuenta que ω y A son valores positivos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si}\quad \varphi_o = \dfrac{5\pi}{6} \quad v(0,0) = A\omega\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6} + \pi\right) = A\omega\cos\dfrac{\pi}{6} > 0 \\ \text{Si}\quad \varphi_o = \dfrac{\pi}{6} \quad v(0,0) = A\omega\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi\right) = A\omega\cos\dfrac{5\pi}{6} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_o = \frac{5\pi}{6}\ \text{rad}$$

b. Si $y(x,t) = A\operatorname{sen}(k\,x - \omega\,t + \varphi_o) \Rightarrow v(x,t) = -\omega A\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi_o)$

$$a(x,t) = \frac{d\,v}{dt} = -\omega A\cdot(-\operatorname{sen}(k\,x - \omega\,t + \varphi_o))\cdot(-\omega) = -\omega^2 A\operatorname{sen}(k\,x - \omega\,t + \varphi_o)$$

La aceleración máxima se obtiene cuando el seno de la fase vale ±1.

$$|a_{max}| = \omega^2 A = (200\pi)^2\cdot 3\times 10^{-2} = 1200\pi^2\ \mathrm{m/s^2}$$

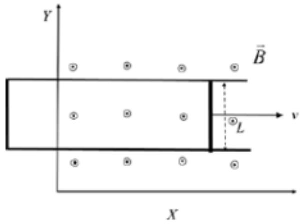
Si $y(x,t) = A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi) \Rightarrow v(x,t) = \omega A\cos(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi)$

$$a(x,t) = \frac{d\,v}{dt} = \omega A\cdot(-\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi))\cdot\omega = -\omega^2 A\operatorname{sen}(\omega\,t - k\,x - \varphi_o + \pi)$$

La aceleración máxima se obtiene cuando el seno de la fase vale ±1.

$$|a_{max}| = \omega^2 A = (200\pi)^2\cdot 3\times 10^{-2} = 1200\pi^2\ \mathrm{m/s^2}$$

A.3 (2 puntos). Una barra conductora, de 30 cm de longitud y paralela al eje y, se mueve en el plano xy con una velocidad en el sentido positivo del eje x. La barra se mueve sobre unos rieles conductores paralelos en forma de U (ver figura). Perpendicular al plano, hay un campo magnético uniforme $10^{-3}\,\vec{k}\,\mathrm{T}$. Halle la fuerza electromotriz inducida en la barra en función del tiempo en los siguientes casos:



a) La velocidad de la barra es constante e igual a $10^2\,\vec{i}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) La barra parte del reposo y su aceleración es constante e igual a $5\,\vec{i}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Solución.

Según la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida en una espira es proporcional a la variación del flujo de líneas de campo magnético que atraviesan la espira.

La Ley de Lenz explica que siempre que se induce una corriente, su campo magnético se opone al cambio de flujo.

Combinando ambas leyes se llega a que la fuerza electromotriz inducida en una espira viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Siendo Φ el flujo de líneas de campo magnético que atraviesan la espira que se expresa como:

$$\Phi = \vec{B}\circ\vec{S} = \left|\vec{B}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cdot\cos\alpha = B\cdot S\cdot\cos\alpha$$

En los dos casos que se plantean, la variación del flujo es debido a la variación de la superficie de la espira.

$$\Phi = B\cdot S\cdot\cos\alpha = B\cdot(\text{base}\cdot\text{altura})\cdot\cos\alpha = 10^{-3}\cdot x\cdot 0{,}3\cdot\cos 0 = 3\cdot 10^{-4}\,x$$

a. La barra conductora se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme:

$$x = x_o + v\cdot t = \left\{\begin{matrix} x_o = 0 \\ v = 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}\end{matrix}\right\} = 10^2\,t \;\Rightarrow\; \Phi = 3\cdot 10^{-4}\,x = 3\cdot 10^{-4}\cdot 10^2\,t = 3\cdot 10^{-2}\,t\,(\mathrm{wb})$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(3\cdot 10^{-2}\,t\right) = -3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{v} = -0{,}03\,\mathrm{v}$$

b. La barra conductora se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme acelerado:

$$x = x_o + v_o\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2 = \left\{\begin{matrix} x_o = 0 \\ v = 0 \\ a = 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}5\cdot t^2 \;\Rightarrow\; \Phi = 3\cdot 10^{-4}\,x = 3\cdot 10^{-4}\cdot\frac{5}{2}t^2 = 7{,}5\cdot 10^{-4}\,t^2\,(\mathrm{wb})$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(7{,}5\cdot 10^{-4}\,t^2\right) = -1{,}5\cdot 10^{-3}\,t\,(\mathrm{v})$$

Aunque no se pide en el enunciado, y por tanto no es necesario indicarlo, según la ley de Lenz, la fuerza electromotriz inducida debe compensar la variación del flujo a través de la espira, debido al desplazamiento de la barra hacia la derecha, aumentando la superficie de la espira, el número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira aumenta en el sentido positivo de $\vec{k}$ (hacia fuera del plano del papel) por lo que la corriente inducida en la espira deberá generar un campo magnético dirigido en el sentido negativo de $\vec{k}$ y de esa forma compensar la variación del flujo inductor. Según la regla de la mano derecha, si la corriente debe crear un campo magnético dirigido hacia dentro del plano del papel, la corriente se deberá desplazar en el sentido horario, sentido negativo de giro, siendo válido este razonamiento para los dos apartados.

A.4 (2 puntos). Un objeto está situado en una posición s_1 a la izquierda de una lente convergente de distancia focal 50 mm, de modo que forma una imagen real, invertida y de tamaño doble que el objeto. A continuación, el objeto se va moviendo hacia la lente hasta una posición s_2 en la que la imagen es virtual, derecha y de tamaño doble que la del objeto. Calcule:

a) La posición s_1 inicial del objeto y la distancia inicial entre la imagen y la lente.

b) La posición s_2 final del objeto y la distancia final entre la imagen y la lente.

Solución.

a. Aplicando la ecuación general de las lentes delgadas y la relación de aumento lateral, se plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incognitas que permiten resolver el apartado.

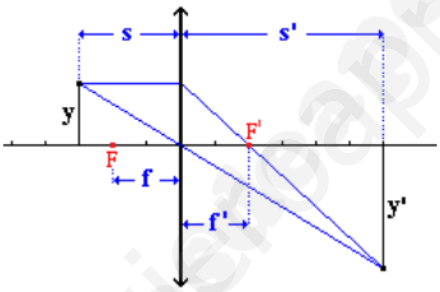
Ecuación general de las lentes delgadas: $\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$

Aumento lateral: $\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}$

$$\begin{cases}\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f'}\\ \frac{y_1'}{y_1}=\frac{s_1'}{s_1}\end{cases};\ \begin{Bmatrix}f'=50\text{ mm}\\ y_1'=-2y_1\end{Bmatrix};\ \begin{cases}\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{50}\\ -2=\frac{s_1'}{s_1}\end{cases};\ \begin{cases}\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{50}\\ s_1'=-2s_1\end{cases};\ \left\{\frac{1}{-2s_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{50}\right.;\ \left\{-\frac{3}{2s_1}=\frac{1}{50}\right.$$

$$s_1=-75\text{ mm}\quad\Rightarrow\quad s_1'=-2\cdot(-75)=150\text{ mm}$$

Aunque no se pide, la construcción gráfica es la siguiente:



Ima
gen Real Invertida y Mayor

b. Con las mismas ecuaciones del apartado anterior, se plantea el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases}\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f'}\\ \frac{y_2'}{y_2}=\frac{s_2'}{s_2}\end{cases};\ \begin{Bmatrix}f'=50\text{ mm}\\ y_2'=2y_2\end{Bmatrix};\ \begin{cases}\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{50}\\ 2=\frac{s_2'}{s_2}\end{cases};\ \begin{cases}\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{50}\\ s_2'=2s_2\end{cases};\ \left\{\frac{1}{2s_2}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{50}\right.;\ \left\{\frac{-1}{2s_2}=\frac{1}{50}\right.$$

$$s_2=-25\text{ mm}\quad\Rightarrow\quad s_1'=2\cdot(-25)=-50\text{ mm}$$

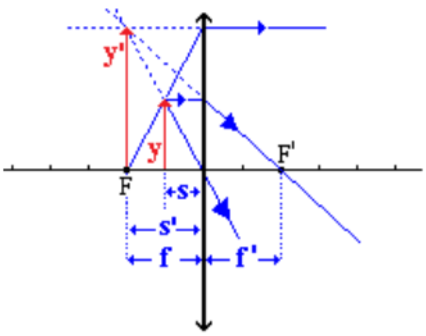


Imagen Virtual Derecha y Mayor

A.5 (2 puntos). Se tienen dos fuentes radiactivas cuya actividad a día de hoy es la misma. Se sabe que dentro de 10 años la actividad de la primera fuente será el doble que la de la segunda. Determine:

a) La diferencia, $\lambda_2 - \lambda_1$, que existe entre las constantes de desintegración de ambas fuentes.

b) La relación entre las actividades de dichas fuentes dentro de 20 años.

Solución.

a. La actividad de una fuente radioactiva en función del tiempo esta definida por la expresión:

$$A = A_o \cdot e^{-\lambda t}$$

Aplicando esta expresión a las dos fuentes y comparando, se obtiene la relación que se pide.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_{o_1} \cdot e^{-\lambda_1 t} \\ A_2 = A_{o_2} \cdot e^{-\lambda_2 t} \end{array}\right\} : \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_{o_1} \cdot e^{-\lambda_1 t}}{A_{o_2} \cdot e^{-\lambda_2 t}}$$

Simplificando as actividades iniciales, que según el enunciado son iguales, y operando con las exponenciales:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{-\lambda_1 t - (-\lambda_2 t)} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t}$$

Aplicando la expresión para t = 10 años, se despeja la diferencia $\lambda_2 - \lambda_1$ tomando logaritmos en la igualdad.

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) 10} = 2 \qquad 10(\lambda_2 - \lambda_1) = \text{Ln } 2 \qquad \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\text{Ln } 2}{10}\left(a^{-1}\right)$$

b. Aplicando la relación entre las actividades obtenidas en el apartado anterior y el valor de la diferencia entre las constantes de desintegración se obtiene la relación entre las actividades 20 años después del inicio.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_1}{A_2} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t} \\ \lambda_2 - \lambda_1 = \dfrac{\text{Ln } 2}{10} \end{array}\right\} : \frac{A_1}{A_2} = e^{\frac{\text{Ln } 2}{10} t} \xrightarrow{T=20\,a} \frac{A_1}{A_2} = e^{\frac{\text{Ln } 2}{10} 20} = e^{2 \text{ Ln } 2} = e^{\text{Ln } 2^2} = e^{\text{Ln } 4} = 4$$

Para t = 20 años: $\dfrac{A_1}{A_2} = 4$

B.1 (2 puntos). Se tiene un planeta de masa $1{,}95\times10^{25}$ kg y radio 5500 km. Determine:

- **a)** El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.
- **b)** La velocidad de escape desde la superficie del planeta.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Solución.

a. Para calcular el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta, se iguala la fuerza gravitacional a la que se vería sometido un cuerpo situado en su superficie con su peso definido según la 2º ley de la dinámica.

$$\vec{F}_G = \vec{P} \xrightarrow{\text{módulo}} G\frac{Mm}{R^2} = mg \qquad g = G\frac{M}{R^2}$$

Donde M y R son la masa y el radio del planeta.

$$g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{1{,}95\times10^{25}}{\left(5{,}5\times10^{6}\right)^2} \approx 43\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

b. Para calcular la velocidad de escape desde la superficie de un planeta se tiene en cuenta que el campo gravitatorio es conservativo, por lo tanto, la energía mecánica en la superficie del planeta será la misma que en el infinito.

$$E_{\text{Mecánica}}(\text{Superficie}) = E_{\text{Mecánica}}(\text{Infinito})$$

Teóricamente, se supone que al infinito se llega con velocidad nula, y como la distancia es infinita, la energía mecánica en el infinito es nula

$$E_c(\text{Superficie}) + E_p(\text{Superficie}) = \underbrace{E_c(\text{Infinito})}_{\substack{0\\ \text{porque } v=0}} + \underbrace{E_p(\text{Infinito})}_{\substack{0\\ \text{porque } r=\infty}}$$

Si se denomina como v_e a la velocidad de escape, velocidad que deberá tener el cuerpo en la superficie del planeta:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 + \left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right) = 0$$

Expresión que permite despejar la velocidad en función de la masa del asteroide y de su radio.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Aplicando a los datos de planeta: $v_e = \sqrt{\dfrac{2\cdot 6{,}67\times10^{-11}\cdot 1{,}95\times10^{25}}{5{,}5\times10^{6}}} = 21747{,}7\ \mathrm{m/s}$

B.2 (2 puntos). A una distancia de 10 m, el nivel de intensidad sonora producida por un foco puntual es de 20 dB. Halle:

- **a)** La potencia del foco.
- **b)** El nivel de intensidad sonora a 2 m del foco.

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_o = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución.

a. La intensidad de un sonido se expresa en función de la potencia del foco y de la distancia del punto de medición al foco.

$$I = \frac{P}{S}$$

Siendo P la potencia del foco y S la superficie de la onda sonora que se considera esférica

$$P = I\cdot S = I\cdot 4\pi r^2$$

Por otro lado, la intensidad de la onda se puede relacionar con el nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_o} \qquad I = I_o\cdot 10^{\beta/10}$$

Sustituyendo en la expresión de la potencia:

$$P = 4\pi I\cdot r^2 = 4\pi I_o\cdot 10^{\beta/10}\cdot r^2 = 4\pi\cdot 10^{-12}\cdot 10^{20/10}\cdot 10^2 \approx 1{,}26\cdot 10^{-7}\ \mathrm{w}$$

b. Conocida la potencia del foco, la intensidad del sonido a dos metros es:

$$I=\frac{P}{S}=\frac{P}{4\pi\,r^2}=\frac{1{,}26\cdot10^{-7}}{4\pi\cdot2^2}=2{,}5\cdot10^{-9}\ \text{w m}^{-2}$$

Conocida la intensidad de la onda, se calcula la intensidad sonora a esa distancia:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_o}=10\cdot\log\frac{2{,}5\cdot10^{-9}}{10^{-12}}=33{,}98\,\text{dB}$$

B.3 (2 puntos). Se tienen cuatro cargas cuyo valor absoluto es $|q| = 1\times10^{-6}$ C, situadas en los vértices de un cuadrado de lado a = 30 cm, que está en el plano xy. Dos de ellas son positivas y están en los puntos (0, 0) y (a, a). Las otras dos son negativas y están situadas en los puntos (0, a) y (a, 0). Calcule:

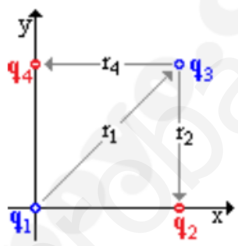
a) La fuerza que se ejerce sobre la carga +q situada en el punto (a, a) debida a las otras tres.

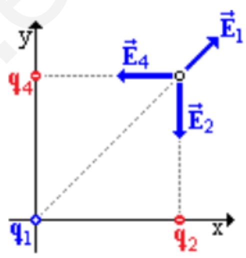
b) La energía potencial de la carga situada en el origen de coordenadas debida a las otras tres.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9\times10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución.

a. Para calcular la fuerza que ejercen las cargas q_1, q_2 y q_4 sobre la carga q_3, se calcula el campo creado por las cargas q_1, q_2 y q_4 en el punto donde se sitúa la carga q_3, y a continuación se calcula la fuerza sobre q_3 con la expresión:





$$\vec{F}=q_3\cdot\vec{E}_T$$

El campo creado por las tres cargas se calcula mediante el principio de superposición y aplicando la ley de Coulomb:

$$\vec{E}=K\cdot\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

El vector unitario se puede expresar en función del vector que une el punto donde esta la carga con el punto donde se calcula el campo y su módulo: $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{\vec{r}}{r}$

Dado el carácter vectorial de la expresión, el signo de las cargas se tendrá en cuenta en el sentido de los vectores y se tomarán las cargas en valor absoluto.

Sustituyendo en la Ley de Coulomb se obtiene una expresión del campo eléctrico que permite resolver el problema de forma muy cómoda.

$$\vec{E}=K\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=K\cdot\frac{q}{r^3}\vec{r}:\begin{cases}\vec{E}_1=K\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 & \vec{r}_1=0{,}3\,\vec{i}+0{,}3\,\vec{j}\,(\text{m}) & r_1=\sqrt{0{,}3^2+0{,}3^2}=0{,}3\sqrt{2}\ \text{m}\\ \vec{E}_2=K\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2 & \vec{r}_2=-0{,}3\,\vec{j}\,(\text{m}) & r_2=\sqrt{0+(-0{,}3)^2}=0{,}3\ \text{m}\\ \vec{E}_4=K\frac{q_4}{r_4^3}\vec{r}_4 & \vec{r}_4=-0{,}3\,\vec{i}\,(\text{m}) & r_4=\sqrt{(-0{,}3)^2+0}=0{,}3\ \text{m}\end{cases}$$

$$\vec{E}_1=9\times10^9\cdot\frac{1\times10^{-6}}{\left(0{,}3\sqrt{2}\right)^3}\left(0{,}3\,\vec{i}+0{,}3\,\vec{j}\right)=35\,355{,}4\,\vec{i}+35\,355{,}4\,\vec{j}\,(\text{N/C})$$

$$\vec{E}_2=9\times10^9\cdot\frac{1\times10^{-6}}{0{,}3^3}\left(-0{,}3\,\vec{j}\right)=-100\,000\,\vec{j}\,(\text{N/C})$$

$$\vec{E}_4=9\times10^9\cdot\frac{1\times10^{-6}}{0{,}3^3}\left(-0{,}3\,\vec{i}\right)=-100\,000\,\vec{i}\,(\text{N/C})$$

$$\vec{E}_{Total}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_4=-64\,644{,}7\,\vec{i}-64\,644{,}7\,\vec{j}\,(\text{N/C})$$

$$\vec{F}=q_3\cdot\vec{E}_T=1\times10^{-6}\cdot\left(-64\,644{,}7\,\vec{i}-64\,644{,}7\,\vec{j}\right)=-0{,}065\,\vec{i}-0{,}065\,\vec{j}\,(\text{N})$$

b. Para calcular la energía potencial de de la carga q1 debido a la presencia de las otras tres cargas se puede emplear la expresión:

$$E_{P_1}=q_1\cdot V$$

Donde V representa el potencial creado por las cargas q_2, q_3 y q_4 en la posición de la carga q_1.

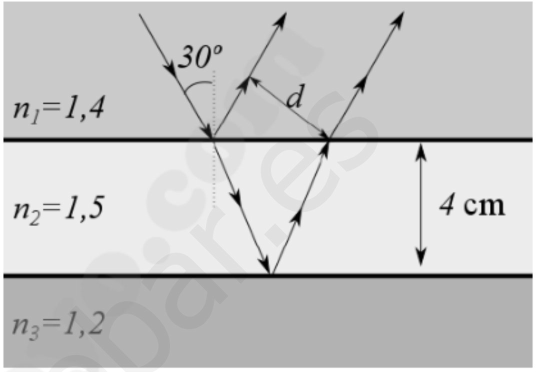
El potencial debido a las tres cargas se calcula mediante el principio de superposición y la Ley de Colulomb, teniendo en cuenta que ahora la magnitud es escalar y por tanto habrá que tener en cuenta el signo de las cargas

$$V = V_2 + V_3 + V_4 = K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3} + K \cdot \frac{q_4}{r_4} + = K \cdot \left(\frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4} \right) = 9 \times 10^9 \cdot \left(\frac{-1 \times 10^{-6}}{0{,}3} + \frac{1 \times 10^{-6}}{0{,}3\sqrt{2}} + \frac{-1 \times 10^{-6}}{0{,}3} \right)$$

$$V = -38\,787 \text{ v}$$

$$E_{P_1} = q_1 \cdot V = 1 \times 10^6 \cdot (-38\,787) = -0{,}0388 \text{ J}$$

B.4 (2 puntos). Una placa de vidrio de 4 cm de espesor y de índice de refracción 1,5 se encuentra sumergida entre dos aceites de índices de refracción 1,4 y 1,2 respectivamente. Proveniente del aceite de índice 1,4 incide sobre el vidrio un haz de luz con un ángulo de incidencia de 30º. Calcule:

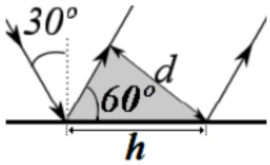


a) La distancia, d, entre el rayo reflejado por la cara superior del vidrio y el refractado después de reflejarse en la cara inferior del vidrio.

b) El ángulo de incidencia mínimo en la cara superior del vidrio necesario para que se produzca el fenómeno de reflexión total en la cara inferior de la placa de vidrio.

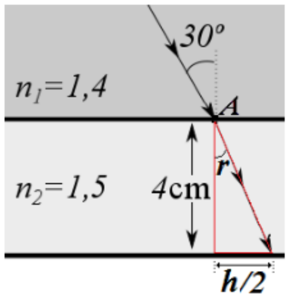
Solución.

a. La distancia d que se pide en este apartado, se puede calcular en el triangulo adjunto del que se conoce el ángulo de 60º, que es complementario al ángulo de reflexión, que teniendo en cuenta las leyes de Snell es igual al de incidencia (30º), y conocida la distancia h.



$$\text{sen } 60º = \frac{d}{h} \qquad\qquad d = h \cdot \text{sen } 60º$$

Para calcular la distancia h se recurre al triangulo descrito en color rojo en la figura adjunta, siendo r ángulo de refracción en la interfase entre los medios 1 y 2.



$$\text{tg } \hat{r} = \frac{h/2}{\text{espesor}}$$

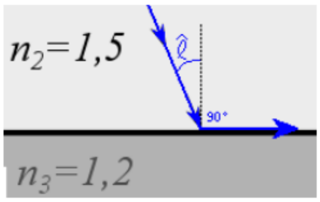
El ángulo r se calcula aplicando la 2º Ley de Snell en el punto A:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r} \qquad \hat{r} = \text{arcsen} \frac{n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}}{n_2} = \text{arcsen} \frac{1{,}4 \cdot \text{sen } 30º}{1{,}5} = 27{,}8º$$

$$\frac{h}{2} = \text{espesor} \cdot \text{tg } \hat{r} \qquad\qquad h = 2 \cdot 4 \cdot \text{tg } 27{,}8 = 4{,}22 \text{ cm}$$

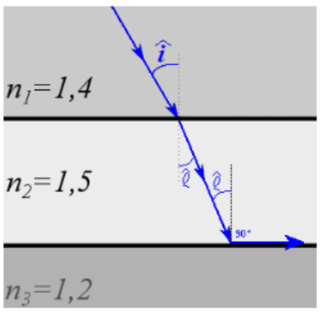
$$d = h \cdot \text{sen } 60º = 4{,}22 \cdot \text{sen } 60º = 3{,}65 \text{ cm}$$

b. Aplicando la 2ª Ley de Snell a la interese entre los medios 2 y 3, se calcula en ángulo límite.



$$n_2 \cdot \text{sen } \hat{\ell} = n_3 \cdot \text{sen } 90º \qquad\qquad \hat{\ell} = \text{arcsen} \frac{n_3}{n_2} = \text{arcsen} \frac{1{,}2}{1{,}5} = 53{,}1º$$

Teniendo en cuenta que el ángulo de refracción en la interfase 1-2 coincide con el ángulo límite de la interfase 2-3, se calcula el ángulo de incidencia sobre la interfase 1-2 para que se produzca el fenómeno de reflexión total en la interfase 2-3.

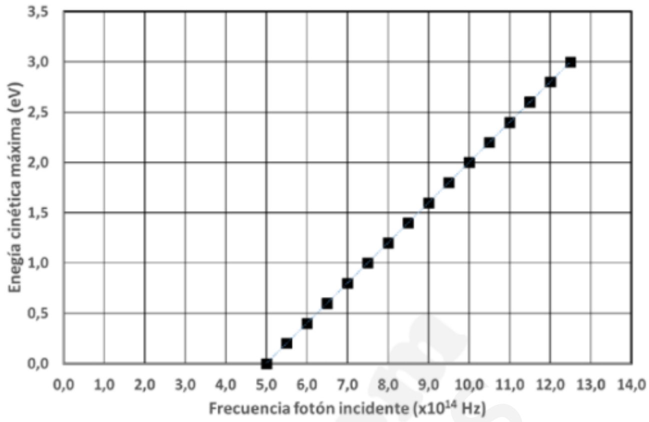


$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{\ell} \qquad\qquad \hat{i} = \text{arcsen} \frac{n_2 \cdot \text{sen } \hat{\ell}}{n_1} = \text{arcsen} \frac{1{,}5 \cdot \text{sen } 53{,}1º}{1{,}4} \approx 59º$$

B.5 (2 puntos). Se hace incidir un haz de fotones de frecuencia variable sobre una lámina de material metálico, de manera que se emiten electrones cuya energía cinética máxima se mide, obteniendo la gráfica que se adjunta. Determine:

a) El trabajo de extracción del metal en eV.

b) La longitud de onda de de Broglie asociada a los electrones que se emiten, con máxima energía cinética, cuando la frecuencia de los fotones incidentes es de 10×10^{14} Hz.



Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6\times10^{-19}$ C; Masa del electrón, $m_e = 9,1\times10^{-31}$ kg; Constante de Planck, $h = 6,63\times10^{-34}$ J s.

Solución.

a. El trabajo de extracción del metal se obtiene a partir de la frecuencia umbral, y está se obtiene de la tabla adjunta.

La frecuencia umbral es característica de cada metal y se corresponde a la mínima frecuencia por debajo de la cual no se produce el efecto fotoeléctrico, independientemente de la intensidad de la radiación luminosa.

$$\nu_{\text{Umbral}} = 5\times10^{14}\ \text{Hz}$$

$$W_{\text{Extracción}} = h\cdot\nu_{\text{Umbral}} = 6,63\times10^{-34}\cdot 5\times10^{14} = 3,31\times10^{-19}\ \text{J}$$

$$W_{\text{Extracción}} = 3,31\times10^{-19}\ \text{J}\cdot\frac{1\ \text{eV}}{1,6\times10^{-19}\ \text{J}} = 2,07\ \text{eV}$$

b. La longitud de onda de de Broglie viene expresada por:

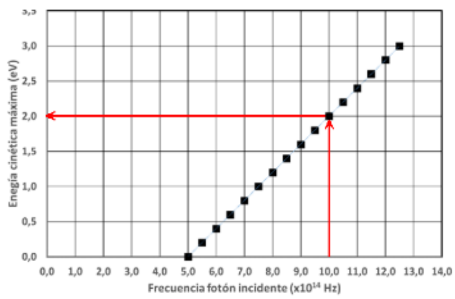
$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m\cdot v}$$

El producto m·v se puede obtener de la energía cinética máxima de los electrones emitidos si se tiene en cuenta la definición de energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}m_{e^-}\cdot v^2 \qquad 2m_{e^-}\cdot E_c = m_{e^-}^2\cdot v^2 \qquad m\cdot v = \sqrt{2m_{e^-}\cdot E_c}$$

Sustituyendo en la expresión de la longitud de onda:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m\cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2m_{e^-}\cdot E_c}}$$



Según la tabla adjunta, la energía cinética máxima de los electrones emitidos mediante una radiación de frecuencia 10×10^{14} Hz es de 2,0 eV, sustituyendo en la expresión y utilizando los factores de conversión adecuados, se obtiene la longitud de onda de De Broglie que se pide.

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2m_{e^-}\cdot E_c}} = \frac{6,63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2\cdot 9,1\times10^{-31}\ \text{kg}\cdot 2,0\ \text{eV}\cdot\frac{1,6\times10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}} = 8,69\times10^{-10}\ \text{m}$$