1) Determinar los valores de a y b para quien la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

f(x)= $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+ax} & \boldsymbol{si\ x \le -1} \\ \boldsymbol{\frac{x^2+2ax+1}{x-1}} & \boldsymbol{si -1 < x < 0} \\ \boldsymbol{\sqrt{x+4}} & \boldsymbol{si\ x \ge 0} \end{cases}$

- Continuidad

- En x≠-1 y x≠0 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- En x=-1

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} bx^2+ax = b-a \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2ax+1}{x-1} = \frac{2-2a}{-2} = -1+a \\ f(-1) = b-a \end{cases}$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Por lo tanto b-a= -1+a → 2a-b = 1

- En x=0

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2ax+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$ → La función no es continua en x=0 ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

- Derivabilidad

- Si x≠ -1 y x≠0 → $f(x)$ es derivable, y su derivada es →

f´(x)= $\begin{cases} 2bx+a & x < -1 \\ \frac{(2x+2a)\cdot(x-1)-1\cdot(x^2+2ax+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2a-1}{(x-1)^2} & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & x > 0 \end{cases}$

- En x=0 no es derivable ya que no es continua, cualesquiera que sean a y b.

- Si x=-1

Para que $f(x)$ sea derivable en x=-1, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(-1^-) = f(-1^+)$

$$\left.\begin{array}{r} f(-1^-) = -2b + a \\ f(-1^+) = \frac{1+2-2a-1}{4} = \frac{2-2a}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \text{-2b+a} = \frac{2-2a}{4} \rightarrow \text{-8b+4a=2-2a} \rightarrow \text{6a-8b=2}$$

Por tanto, f(x) será derivable en ℝ - {0} cuando y solo cuando: $\left.\begin{array}{r} 2a - b = 1 \\ 6a - 8b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{array}$

2) Dada la función (Junio 2010)

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{-7x}{3} + 5 & \text{si} -3 < x \le 1 \\ -x^2 + ax + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \frac{bx - 15}{x - 1} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}}$$

a) Determinar los valores de *a* y *b* para los que se obtiene una función continua en todo su dominio.

b) ¿En qué puntos de su dominio la función obtenida en el apartado anterior es derivable?

a) La función dada está definida en todo **R**; y cada una de las tres funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: las dos primeras son de tipo polinómico; la tercera es racional con una discontinuidad en x = 1, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo (3, 6).

Por tanto, la única dificultad para su continuidad y derivabilidad se da en los puntos x = 1 y x = 3.

Para que la función sea continua en esos puntos debe cumplirse que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{8}{3}$ y que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 3a - 5$; y para ello es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.

En x = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{-7x}{3} + 5 \right) = \frac{8}{3} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-x^2 + ax + 4 \right) = a + 3$$

Como los límites deben ser iguales: $\frac{8}{3} = a + 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

En x = 3:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(-x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \right) = -6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{bx - 15}{x - 1} = \frac{3b - 15}{2}$$

Como los límites deben ser iguales: $-6 = \frac{3b - 15}{2} \Rightarrow b$ = 1.

Luego, la función continua es: $f(x) = \begin{cases} \frac{-7x}{3} + 5 & \text{si} -3 < x \le 1 \\ -x^2 - \frac{1}{3}x + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \frac{x - 15}{x - 1} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}$.

b) Salvo en los puntos x = 1 y x = 3, su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-7}{3} & \text{si} -3 < x < 1 \\ -2x-\dfrac{1}{3} & \text{si} \, 1 < x < 3 \\ \dfrac{14}{(x-1)^2} & \text{si} \, 3 < x < 6 \end{cases}$$

La derivada de $f(x)=\dfrac{x-15}{x-1}$ es: $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-1)-(x-15)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{14}{(x-1)^2}$

Para que sea derivable en los puntos x = 1 y x = 3 deben coincidir las derivadas laterales.

En x = 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{7}{3} \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-2x-\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x = 1.

En x = 3:

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-2x-\frac{1}{3}\right)=-\frac{19}{3} \text{ y } \lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{14}{(x-1)^2}=\frac{7}{2}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en x = 1.

-

3) Dada la función: f(x)= $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + ax +} & \boldsymbol{si\ x < 1} \\ \boldsymbol{cx} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$ calcula a,b y c para que la función sea derivable en x=1, sabiendo que f(0)=f(4)

- Continuidad

En x≠1 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Para x=1

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b \\ \lim_{x\to 1^+} cx = c \\ f(1) = c \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto tendremos que **1+a+b =c**

- Derivabilidad

- Si x≠ 1 → $f(x)$ es derivable, y su derivada es →

f´(x)= $\begin{cases} 2x + a & si\ x < 1 \\ c & si\ x > 1 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea derivable en x=1, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(1^-) = f(1^+)$

$\left.\begin{array}{r} f'(1^-) = 2 + a \\ f'(1^+) = c \end{array}\right\}$ → **2+a = c**

- Otra condición que nos da el problema es f(0)=f(4)

Pues calculamos el valor de la función para x=0 y x=4 . El valor de la función para x=0 debemos coger la función f(x)= $\mathrm{x}^2 + \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ ya que es donde está definida y para x=4 debemos coger la función f(x)=cx ya que es donde está definida.

$\left.\begin{array}{r} \mathrm{f}(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b \\ \mathrm{f}(4) = 4\mathrm{c} \end{array}\right\}$ → f(0)=f(4)→ b=4c

Con las tres ecuaciones se plantea un sistema: $\begin{cases} 1 + a + b = c \\ 2 + a = c \\ b = 4c \end{cases}$

Se cumplen las condiciones del enunciado para la función f(x) si → $\begin{cases} a = \frac{-7}{4} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$

4) Se sabe que la función f:[0,5] →ℝ dada por f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{ax + \quad x^2} & \boldsymbol{si\ 0 \leq x < 2} \\ \boldsymbol{c + \sqrt{x-1}} & \boldsymbol{si\ 2 \leq x \leq 5} \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0)=f(5). ¿Cuánto valen a,b y c?

- En primer lugar, como f(0)=f(5)

$$\left.\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ f(5) = c + \sqrt{5-1} = c + 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Como } f(0)=f(5) \rightarrow 0=c+2 \rightarrow \mathbf{c=-2}$$

- Continuidad

En x≠2 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Para x=2

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ \lim_{x\to 2^+} c + \sqrt{x-1} = c + 1 \\ f(2) = c + 1 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x= 2 se tiene que cumplir $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

Por lo tanto tendremos que **2a+4b= c+1 → 2a+4b=-2+1 → 2a + 4b=-1**

- **Derivabilidad**

- Si x≠ 1 → $f(x)$ es derivable, y su derivada es →

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & si\quad 2 < x < 5 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en x=2, han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(2^-) = f(2^+)$

$$\left.\begin{array}{c} f'(2^-) = a + 4b \\ f'(2^+) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Así pues, para que f sea derivable en x=2debe ser } \mathbf{a+4b=\frac{1}{2}}$$

Con las ecuaciones obtenidas se plantea un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} 2a + 4b = -1 \\ -2a - 8b = -1 \end{cases} \rightarrow a = \frac{-3}{2} \text{ y } b = \frac{1}{2}$$

Para que la función f cumpla las condiciones de enunciado **a=** $\mathbf{\frac{-3}{2}}$ **y b=** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **y c=-2**

5) **Explica por qué no existe la derivada de f(x)=$|x^2 - 7x + 12|$ en x=4**

Primero se define la función a trozos, estudiando qué valores de x anulan el valor absoluto y para qué valores es positiva y para cuáles negativa: g(x)= $x^2 - 7x + 12$ **,** se hace cero si x=3 o si x=4, es positiva si x<3 o si x>4 y es negativa si 3<x4

Así pues, la función es f(x)=$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 & si\ x < 3 \\ -x^2 + 7x - 12 & si\ 3 \le x \le 4 \\ x^2 - 7x + 12 & si\ x > 4 \end{cases}$, que es continua en todo $\mathbb{R}$

- Continuidad

- x= 3

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 3^-} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} -x^2 + 7x - 12 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$ Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$ la función es continua

- x= 4

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 4^-} -x^2 + 7x - 12 = 0 \\ \lim_{x\to 4^+} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$ Como $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$ la función es continua

- Derivabilidad

- Si x≠ 3 y x≠4 → *f* (*x*) es derivable, y su derivada es →

f´(x)= $\begin{cases} 2x - 7 & si\ x < 3 \\ -2x + 7 & si\ 3 < x < 4 \\ 2x - 7 & si\ x > 4 \end{cases}$

x=3

Para que *f* (*x*) sea derivable en *x*=3, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(3^-) = f(3^+)$

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f(3^+) = +1 \end{array}\right\}$ → Como f´$(3^-) \neq f(3^+)$ no es derivable

x=4

Para que *f* (*x*) sea derivable en *x*=4, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(4^-) = f(4^+)$

$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = -1 \\ f(4^+) = +1 \end{array}\right\}$ → Como f´$(4^-) \neq f(4^+)$ no es derivable

La función no será derivable en x=3 y x=4