

Evaluación 1

Unidad 1: Números reales

1. (0.75p) Dados $A = (-\infty, -6]$ y $B = (-10, -5)$, representa gráficamente y expresa en forma de intervalo y de desigualdad $A \cap B$.

2. (1p) Representa sobre la recta real y expresa en forma de intervalo o semirrecta $|4 - 2x| \geq 6$.

3. (1.5p) Simplifica las siguientes expresiones todo lo posible:

a. $\sqrt[3]{\frac{81}{a^{18}}}$ b. $\left(\sqrt[5]{r^2 s^4 t^6}\right)^3$

4. (3p) Resuelve las siguientes operaciones y simplifica:

a. $\sqrt{\frac{3}{16}} + \sqrt{\frac{27}{100}} - \sqrt{3}$ b. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ c. $(2\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$

5. (2p) Racionaliza y simplifica:

a. $\frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ b. $\frac{ab}{\sqrt[5]{a^3 b}}$

6. (0.75p) Calcula $\log_{1/3} \sqrt[3]{9}$

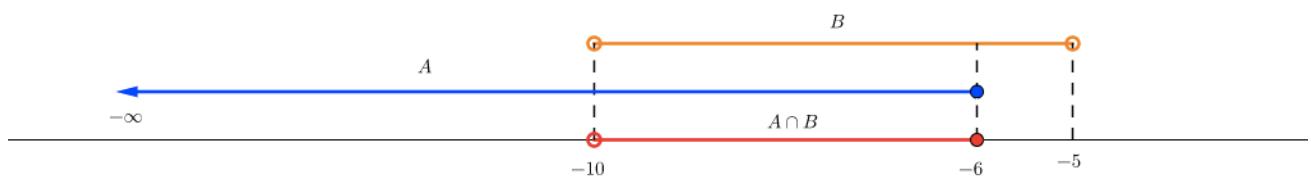
7. (1p) Si $\log A = -1$ y $\log B = 5$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de:

$$\log \frac{100 \cdot A^3}{\sqrt[4]{A \cdot B}}$$

SOLUCIÓN

1. Dados $A = (-\infty, -6]$ y $B = (-10, -5)$, representa gráficamente y expresa en forma de intervalo y de desigualdad $A \cap B$.

Gráficamente serán los valores comunes a ambos intervalos (solución en rojo):



Solución en forma de intervalo: $(-10, -6]$

Solución en forma de desigualdad: $-10 < x \leq -6$

2. Representa sobre la recta real y expresa en forma de intervalo o semirrecta $|4 - 2x| \geq 6$.

Las soluciones de la ecuación $|4 - 2x| = 6$ son:

$$4 - 2x = 6 \rightarrow -2x = 2 \rightarrow x = -1$$

$$-(4 - 2x) = 6 \rightarrow -4 + 2x = 6 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

Se representan los valores obtenidos sobre la recta real y se estudia el signo de cada uno de los intervalos.

Para $x = 0 \rightarrow |4 - 2 \cdot 0| = 4$ No es mayor o igual que 6

Para $x = -2 \rightarrow |4 - 2 \cdot (-2)| = 8$ Sí es mayor o igual que 6

Para $x = 6 \rightarrow |4 - 2 \cdot 6| = 8$ Sí es mayor o igual que 6

Solución gráfica:



Solución como unión de semirrectas: $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

3. Simplifica las siguientes expresiones todo lo posible:

$$\text{a. } \sqrt[3]{\sqrt{\frac{81}{a^{18}}}} = \sqrt[6]{\frac{3^4}{a^6 \cdot a^6 \cdot a^6}} = \frac{1}{a^3} \sqrt[6]{3^4} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{a^3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{a^3}$$

$$\text{b. } \left(\sqrt[5]{r^2 s^4 t^6}\right)^3 = \sqrt[5]{r^6 s^{12} t^{18}} = \sqrt[5]{r^5 r s^5 s^5 s^2 t^5 t^5 t^3} = r s^2 t^3 \sqrt[5]{r s^2 t^3}$$

4. Resuelve las siguientes operaciones y simplifica:

$$\text{a. } \sqrt{\frac{3}{16}} + \sqrt{\frac{27}{100}} - \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2^2 \cdot 2^2}} + \sqrt{\frac{3^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 5^2}} - \sqrt{3} = \frac{1}{4} \sqrt{3} + \frac{3}{10} \sqrt{3} - \sqrt{3} = \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10} - 1\right) \sqrt{3} = \left(\frac{5+6-20}{20}\right) \sqrt{3} = -\frac{9}{20} \sqrt{3}$$

$$\text{b. } \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6} \cdot \sqrt[12]{x^8} \cdot \sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^{23}} = \sqrt[12]{x^{12} \cdot x^{11}} = x \sqrt[12]{x^{11}}$$

$$\text{c. } (2\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - 4\sqrt{12} = 8 + 6 - 4\sqrt{2^2 \cdot 3} = 14 - 8\sqrt{3}$$

5. Racionaliza y simplifica:

$$\text{a. } \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

$$\text{b. } \frac{ab}{\sqrt[5]{a^3 b}} = \frac{ab \cdot \sqrt[5]{a^2 b^4}}{\sqrt[5]{a^3 b} \cdot \sqrt[5]{a^2 b^4}} = \frac{ab \cdot \sqrt[5]{a^2 b^4}}{\sqrt[5]{a^5 b^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt[5]{a^2 b^4}}{ab} = \sqrt[5]{a^2 b^4}$$

6. Calcula $\log_{1/3} \sqrt[3]{9}$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_{1/3} \sqrt[3]{9} = x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9} \rightarrow 3^{-x} = \sqrt[3]{3^2} \rightarrow 3^{-x} = 3^{2/3} \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

7. Si $\log A = -1$ y $\log B = 5$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de:

$$\begin{aligned}\log \frac{100 \cdot A^3}{\sqrt[4]{A \cdot B}} &= \log \frac{100 \cdot A^3}{(A \cdot B)^{1/4}} = \log(100 \cdot A^3) - \log(A \cdot B)^{1/4} = \\ \log 100 + \log A^3 - \frac{1}{4} \cdot \log(A \cdot B) &= 2 + 3 \log A - \frac{1}{4}(\log A + \log B) = \\ 2 + 3(-1) - \frac{1}{4}(-1 + 5) &= 2 - 3 - \frac{4}{4} = -1 - 1 = \textcolor{red}{-2}\end{aligned}$$