

DISTRIBUCIÓN NORMAL

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea Z una variable normal estándar; halla las probabilidades:

a) $P(Z \leq 2,22)$ b) $P(Z \leq -2,22)$ c) $P(-1,5 < Z < 3)$

Solución:

a) Basta con buscar en la tabla $N(0, 1)$.

$$P(Z \leq 2,22) = 0,9868.$$

b) $P(Z \leq -2,22) = 1 - P(Z \leq 2,22) = 1 - 0,9868 = 0,0132.$

c) $P(-1,5 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1,5) = 0,9987 - (1 - P(Z < 1,5)) = 0,9987 - (1 - 0,9332) = 0,9319.$

2. Siendo X una variable que se distribuye $N(4, 1,5)$, halla el valor tipificado de:

a) 7 b) 5,5 c) 1,5

Para esta distribución, calcula las probabilidades: $P(X < 7)$; $P(X < 5,5)$; $P(X < 1,5)$.

Solución:

Se tipifica haciendo $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

a) $Z = \frac{7 - 4}{1,5} = 2 \Rightarrow P(X < 7) = P(Z < 2) = 0,9772.$

b) $Z = \frac{5,5 - 4}{1,5} = 1 \Rightarrow P(X < 5,5) = P(Z < 1) = 0,8413.$

c) $Z = \frac{1,5 - 4}{1,5} = -\frac{5}{3} \approx -1,67 : P(X < 1,5) = P(Z < -1,67) = 1 - P(Z < 1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475.$

3. Si X es una variable continua $N(28, 5)$, halla:

a) $P(X > 31)$ b) $P(28 < X < 35,5)$ c) $P(20 < X < 38)$

Solución:

a) $P(X > 31) = P\left(Z > \frac{31 - 28}{5}\right) = P(Z > 0,6) = 1 - P(Z < 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743.$

b) $P(28 < X < 35,5) = P\left(\frac{28 - 28}{5} < Z < \frac{35,5 - 28}{5}\right) = P(0 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - 0,5 = 0,9332 - 0,5 = 0,4332.$

c) $P(20 < X < 38) = P\left(\frac{20 - 28}{5} < Z < \frac{38 - 28}{5}\right) = P(-1,6 < Z < 2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1,6)) = 0,9772 - (1 - 0,9452) = 0,9224.$

4. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$, determina el valor de k que cumple:

a) $P(Z < k) = 0,9115$ b) $P(Z < k) = 0,9452$

c) $P(Z < k) = 0,1587$ d) $P(Z < k) = 0,95$

Solución:

a) El valor 0,9115 de la tabla se corresponde con $Z = 1,29$. Por tanto, $k = 1,29$.

b) El valor 0,9452 de la tabla se corresponde con $Z = 1,6$. Por tanto, $k = 1,6$.

c) Como 0,1587 es menor que 0,5 hay que buscar el valor de Z que deja por debajo $1 - 0,1587 = 0,8413$. Ese valor es $Z = 1$. Por tanto, $k = -1$.

d) El valor 0,95 no aparece en la tabla. Como está entre 0,9495, correspondiente a $Z = 1,64$, y 0,9505, correspondiente a $Z = 1,65$, el valor de k buscado es $k = 1,645$.

5. Si X es variable $N(\mu, \sigma)$ y se tiene que $P(X < 4) = 0,2549$ y $P(X < 7) = 0,9082$, halla los valores de μ y σ .

Solución:

Tipificando se tiene:

$$P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0,2546 \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma} = -0,66 \rightarrow (\text{Se corresponde con un valor de } Z \text{ negativo}).$$

En la tabla se busca $1 - 0,2546 = 0,7454$. El valor de Z correspondiente es 0,66.

$$P\left(Z < \frac{7-\mu}{\sigma}\right) = 0,9082 \Rightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} = 1,33.$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} \mu - 0,66\sigma = 4 \\ \mu + 1,33\sigma = 7 \end{cases}$. Su solución es: $\mu = 5$ y $\sigma = 3/2$.

6. En una distribución normal, halla el porcentaje de valores que distan de la media:

- a) Menos de 1,2 desviaciones típicas. b) Entre 0,5 y 1 desviación típica.

Solución:

a) Se pide calcular X tal que $|X - \mu| < 1,2\sigma \Rightarrow -1,2 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1,2$.

Como

$$\begin{aligned} P\left(-1,2 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1,2\right) &= P(-1,2 < Z < 1,2) = P(Z < 1,2) - P(Z < -1,2) = 2 \cdot P(Z < 1,2) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,8849 - 1 = 0,7698 \Rightarrow \text{el } 76,98 \% \text{ de valores de } X \text{ distan de } \mu \text{ menos de } 1,2\sigma. \end{aligned}$$

b) Hay que calcular: $P\left(0,5 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1\right)$.

$$P\left(0,5 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1\right) = P(0,5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < 0,5) = 0,8413 - 0,6915 = 0,1498.$$

7. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato se distribuye normalmente con media $\mu = 166$ cm y desviación típica 9 cm. Si se elige una alumna al azar halla la probabilidad de que su estatura sea:

- a) Superior a 175 cm. b) Inferior a 155 cm. c) Esté entre 155 cm y 175 cm.

Solución:

La normal de media μ y desviación típica σ , $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, (en

este caso, para $\mu = 166$ y $\sigma = 9 \rightarrow Z = \frac{X - 166}{9}$), se tendrá:

$$a) P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175 - 166}{9}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

$$b) P(X < 155) = P\left(Z < \frac{155-166}{9}\right) = P(Z < -1,22) = 1 - P(Z < 1,22) = 1 - 0,8888 = 0,1112.$$

$$c) P(155 < X < 175) = P(X < 175) - P(X < 155) = 0,8413 - 0,1112 = 0,7301.$$

8. Las alturas de 500 estudiantes varones están distribuidas normalmente con media 172 cm y desviación típica 12 cm. Aproximadamente, ¿cuántos estudiantes tienen una altura?:

- a) Igual a 170 cm. b) Menor que 170 cm. c) Entre 175 y 190 cm.

Solución:

a) $P(X = 170) = 0$. La probabilidad de un valor concreto (de un punto) siempre es 0.

b) Para un estudiante:

$$P(X < 170) = P\left(Z < \frac{170-172}{12}\right) = P(Z < -0,166...) \approx P(Z < -0,17) = 1 - 0,5675 = 0,4325.$$

Para 500 estudiantes: $500 \cdot 0,4325 = 216,25 \rightarrow$ aproximadamente 216.

$$c) P(175 < X < 190) = P\left(\frac{175-172}{12} < Z < \frac{190-172}{12}\right) = P(0,25 < Z < 1,5) = \\ = P(Z < 1,5) - P(Z < 0,25) = 0,9932 - 0,5987 = 0,3945 \rightarrow 0,3945 \cdot 500 = 197,25.$$

Aproximadamente 197 estudiantes.

9. La longitud de cierto tipo de peces sigue una distribución normal de media 100 mm y desviación típica 9 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos peces mida entre 82 mm y 91 mm?

Solución:

La distribución es $N(100, 9)$. La variable X que mide la longitud de esos peces se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-100}{9}$. Luego:

$$P(X < 91) = P\left(Z < \frac{91-100}{9}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

$$P(X < 82) = P\left(Z < \frac{82-100}{9}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

$$P(82 < X < 91) = P(X < 91) - P(X < 82) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$

10. El diámetro de las ciruelas de una determinada variedad se distribuye normalmente con media 4,5 cm y desviación típica 0,3 cm. Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

Solución:

La medida X de su diámetro se distribuye según la normal: $N(4,5, 0,3)$. Esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-4,5}{0,3}$.

Se desea encontrar el valor d (de diámetro) tal que $P(X > d) = 0,10 \Rightarrow$

$$P\left(Z > \frac{d-4,5}{0,3}\right) = 0,10 \Rightarrow \frac{d-4,5}{0,3} = 1,28 \Rightarrow d = 0,3 \cdot 1,28 + 4,5 = 4,884 \text{ cm.}$$

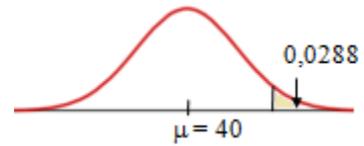
11. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años?

Solución:

La distribución de edad de la población es como se indica en la figura adjunta.



a) Se sabe que $P(X > 60) = 0,0228$.

Como la normal de media μ y desviación típica σ , $N(\mu, \sigma)$, se

tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para $\mu = 40$ y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60 - 40}{\sigma}\right) = 0,0228 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{20}{\sigma}\right) = 0,0228 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - 0,0228 = 0,9772 \Rightarrow \frac{20}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 10.$$

Esto es, la desviación típica vale 10.