

10

INFERENCIA ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES

- 1** Dada una distribución $N(0, 1)$, comprueba que el intervalo característico correspondiente a la probabilidad 0,99 es $(-2,575; 2,575)$.
- 2** Calcula las siguientes probabilidades, siendo la distribución una $N(0, 1)$.
- a) $P(Z \leq 1,18)$ d) $P(Z \geq -0,93)$
 b) $P(Z \geq 3,34)$ e) $P(1,12 \leq Z \leq 1,97)$
 c) $P(Z \leq -1,27)$
- a) 0,8810
 b) 0,0004
 c) 0,1020
 d) 0,8238
 e) 0,1070
- 3** Dada la distribución normal $N(20, 4)$, calcula $P(X \leq 15)$, $P(X \leq 23)$ y $P(X \geq 17)$.
- Sol: $P(X \leq 15) = 0,1056$
 $P(X \leq 23) = 0,7734$
 $P(X \geq 17) = 0,7734$
- 4** Para una distribución $N(0, 1)$, calcula el intervalo característico correspondiente a una probabilidad de 0,5.
- Sol: $(-0,675; 0,675)$
- 5** Para una distribución binomial $N(10; 3)$, calcula el intervalo característico correspondiente a una probabilidad de 0,5.
- Sol: $(7,975; 12,025)$
- 6** Para una distribución $B(100; 0,3)$, calcula el intervalo característico correspondiente a una probabilidad de 0,5.
- Sol: $(26,9085; 33,0915)$
- 7** En una piscifactoría, la longitud media de las truchas es de 25 cm, con una desviación típica de 2 cm. En la piscifactoría hay 4 700 truchas. ¿Cuántas tendrán un tamaño inferior a 26 cm?
- Sol: Aproximadamente 3 250 truchas tendrán un tamaño inferior a 26 cm.
- 8** La probabilidad de que un tenista haga un punto de saque, es de 0,02. Si durante un campeonato realiza 3 000 servicios. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga más de 80 puntos de saque?
- Sol: La probabilidad de que obtenga más de 80 puntos es de aproximadamente 0,0038.
- 9** Una distribución binomial $B(50; 0,3)$ se aproxima por la normal. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que 12?
- Sol: 0,2206
- 10** Una variable aleatoria, X , hace corresponder los valores 1, 2 y 3 a los individuos de una población de modo que los 3 valores se den con la misma probabilidad.
- a) Construye una tabla con todas las muestras de tamaño 3 y halla la media y la desviación típica de X .
 b) Halla la media y la desviación típica de la distribución de las medidas muestrales.
- a) La tabla con todas las muestras de tamaño 3 es:
- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
- La media de la variable aleatoria X es: $\bar{x} = 2$
 La desviación típica de la variable aleatoria X es: $\sigma = 0,8165$
- b) La media de las medias muestrales es $\bar{x} = 2$ y su distribución típica $\sigma = 0,4714$.
- 11** Comprueba el teorema central del límite para los datos del ejercicio resuelto anterior.
- 12** Se sabe que el contenido en fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal, cuya varianza es 0,25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante el valor de la media de una muestra, admitiéndose un error máximo de 0,2 con una confianza del 95 %. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra?
- Sol: La muestra tiene que tener un tamaño de 25 unidades como mínimo.
- 13** En un determinado barrio se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales era de 600 €, con una desviación típica de 120 €.
- a) Si se toma un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de los ingresos mensuales de toda la población?
 b) Si se toma un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor a 18 €?
- a) $(576,48; 623,52)$
 b) El tamaño muestral necesario es de 295 personas.

Ejercicios y problemas

- 14** Una variable aleatoria, X , tiene una distribución normal $N(140, 25)$.
- Calcula las siguientes probabilidades:
- a) $P(X \leq 150)$
 b) $P(100 \leq X \leq 130)$
 c) $P(X \leq 155)$
- a) 0,6554
 b) 0,2898
 c) 0,7257

- 15** Una máquina que expende bebidas está regulada de modo que descarga una media de 200 mL por vaso. Si la cantidad de líquido está distribuida normalmente con desviación típica de 15 mL:
- a)** ¿Qué porcentaje de vasos llenará con más de 224 mL?
- b)** Si vamos a utilizar seis vasos de 224 mL, ¿cuál es la probabilidad de que se derrame líquido solo en uno de los seis?
- a)** 5,48 %.
- b)** 0,248
- 16** La duración de las pilas de una linterna se distribuye según una normal de media 70 h y desviación típica 4 h. A un establecimiento le quedan, del pedido anterior, 40 pilas.
- a)** ¿Aproximadamente, cuántas tendrán una duración superior a 70 h?
- b)** Calcula la probabilidad de que, elegida una pila al azar, tenga una duración de entre 75 h y 82 h.
- a)** 20 pilas tendrán una duración mayor a 70 h
- b)** 0,1043
- 17** En una cierta población, se sabe que el 20 % habla correctamente el castellano. Se elige una muestra al azar de 10 personas.
- Halla la probabilidad de que:
- a)** Todos hablen correctamente el castellano.
- b)** Solo una persona lo hable bien.
- a)** $1,024 \cdot 10^{-7}$
- b)** 0,2684
- 18** En un examen se formulan 42 preguntas del tipo «verdadero-falso». El examen se aprueba si se contestan correctamente, al menos, 20 preguntas. Si se lanza una moneda para decidir la respuesta de cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de aprobar el examen?
- Sol: 0,6772
- 19** En una urna hay 30 bolas, 10 rojas y el resto blancas. Se elige una bola al azar, se anota si es roja y se devuelve la bola a la urna. El proceso se repite 10 veces. Calcula la media y la desviación típica del número de bolas rojas en las 10 extracciones.
- Sol: $\mu = 3,3333$
 $\sigma = 1,4907$
- 20** Las estaturas, en centímetros, de los soldados de un replazo, siguen una distribución normal $N(172, 5)$. Las guardias están formadas por grupos de 8 soldados. Calcula en qué intervalo están comprendidas el 90 % de las estaturas de los soldados de una guardia.
- Sol: (169,0920; 174,9080)
- 21** La altura media de los habitantes de una gran ciudad española se distribuye según una desviación típica de 8 cm.
- a)** Si la media de las alturas de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos, tomada al azar, fuera superior a 176 cm?
- b)** Si se considera una muestra aleatoria de 100 individuos de esta ciudad se obtiene una altura media de 178 cm. Determina un intervalo de confianza del 95 % correspondiente a la altura media de los habitantes de esta ciudad.
- a)** 0,1056
- b)** (176,432; 179,568)
- 22** Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en la sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cc. Si se conoce que la población tiene una desviación 20 mg/cc.
- a)** Obtén un intervalo de confianza del 90 % para el nivel de glucosa en sangre de la población.
- b)** ¿Qué error máximo se comete con la estimación del apartado anterior?
- a)** (106,71; 113,29)
- b)** 3,29 mg/cc
- 23** En un instituto de enseñanza secundaria hay matriculados 800 alumnos.
- A una muestra seleccionada aleatoriamente de un 15 % de ellos, se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto.
- Contestaron negativamente un total de 24 alumnos.
- a)** Estima el porcentaje de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.
- b)** Determina, con una confianza del 99 %, el error máximo cometido en dicha estimación.
- a)** 80 %
- b)** 0,0940
- 24** La media de edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad es de 18,1 años y la desviación típica de 0,6 años.
- a)** De los alumnos anteriores se elige al azar una muestra de 100. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de los alumnos esté comprendida entre 17,9 y 18,3 años?
- b)** ¿Qué tamaño debe tener la muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17,9 y 18,3 años con una confianza del 99,5 %?
- a)** 0,9992
- b)** La muestra debe tener un tamaño de 72 alumnos.
- 25** Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una distribución normal de media 100 y varianza 729.
- a)** Calcula la probabilidad de que, al tomar una muestra de 81 alumnos, esta tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.
- b)** Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.
- a)** 0,9987
- b)** 0,0228
- 26** El salario medio correspondiente a una muestra de 1 600 personas de cierta población es de 563 €. Se sabe que la desviación típica de los salarios de la población es de 120 €. Halla el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 99 %.
- Sol: (555,275; 570,725)

- 27 ■■■ Se desea estimar la proporción, p , de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n .
- a) Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30 %, calcula el valor de n para que, con un nivel de confianza de 0,95, el error cometido en la estimación sea inferior al 3,1 %.
- b) Si el tamaño de la muestra es de 64 individuos y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del 35 %, determina, usando un nivel de significación del 1 %, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.
- a) La muestra debe tener como mínimo 840 personas.
- b) (0,19653; 0,50347)
- 28 ■■■ De 120 alumnos, la proporción de los que tienen dos o más hermanos es de 48/120. Indica los parámetros de la distribución a la que se ajustarían las muestras de tamaño 30.
- Sol: La proporción sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, donde:
- $$\mu = 0,4$$
- $$\sigma = 0,0894$$
- 29 ■■■ Supongamos que, a partir de una muestra aleatoria de tamaño 25, se ha calculado el intervalo de confianza para la media de una población normal, obteniéndose una amplitud de 4.
- Si el tamaño de la muestra hubiera sido 100, permaneciendo invariables todos los demás valores que intervienen en el cálculo, ¿cuál habría sido la amplitud del intervalo?
- Sol: (-2, 2)
- 30 ■■■ La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento, fabricadas por cierta máquina, fue 0,824 cm y la desviación típica, de 0,042 cm. Halla los límites de confianza del 95 % para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.
- Sol: (0,8182; 0,8298)
- 31 ■■■ Tras realizar un test de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18. Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que:
- El primer grupo abarque un 20 % de la población.
 - El segundo grupo abarque el 65 %.
 - El tercer grupo abarque el 15 % restante.
- ¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?
- Sol:
- Los habitantes que tengan menos de 52 puntos, tendrán baja cultura general; los habitantes que tengan entre 53 puntos y 86 puntos, tendrán una cultura general aceptable y los que tengan más de 87 puntos, tendrán una cultural general excelente.
- 32 ■■■ A partir de la información suministrada por una muestra aleatoria de 100 familias de cierta ciudad, se ha determinado el intervalo de confianza al 99 %, (42, 58), para el gasto medio mensual por familia en electricidad. Determina:
- a) La estimación puntual que daríamos para el gasto medio mensual por familia en electricidad en esa ciudad.
- b) ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizarnos, con una confianza del 99 %, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 3 €?
- a) 50 €
- b) Tendríamos que seleccionar 712 familias.
- 33 ■■■ Las estaturas de una muestra aleatoria de 50 estudiantes tienen una media de 174,5 cm; la desviación típica de la variable estatura es 6,9 cm. Calcula el intervalo de confianza al 95 % para la estatura media de los estudiantes.
- Sol: (172,5874; 176,4126)
- 34 ■■■ Sea una población formada por tres elementos con valores 2, 4 y 6. Consideremos todas las muestras, con remplazamiento, de tamaño 2. Calcula la media y la desviación típica de la población y de las medias muestrales. ¿Qué relación hay entre ambas medias?
- Sol: La relación entre ambas medias es que son iguales.
- 35 ■■■ El peso de las naranjas producidas en una determinada región sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 g. Un almacenista compra 120 000 de estas naranjas y observa que su peso medio es de 190 g. Razona si se puede afirmar con un nivel de significación del 0,05, que el peso medio de las naranjas producidas en esta región es de 200 g.
- Sol: No se puede afirmar que el peso medio de las naranjas producidas en esta región sea de 200 g.
- 36 ■■■ Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7 h. Halla un intervalo de confianza al 96 % para la media de horas de sueño, μ .
- Sol: (5,8744; 8,1256)
- 37 ■■■ Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto en 16 comercios, elegidos al azar, en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios, en euros: 95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110
- Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una distribución normal de varianza 25 y media desconocida:
- a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?
- b) Determina el intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional.
- a) $N(104; 1,25)$
- b) (101,55; 106,45)
- 38 ■■■ La variable aleatoria *altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas* sigue una distribución normal de media 1,62 m y desviación típica 0,12 m. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1,60 m?
- Sol: 0,9525

39 ■■■ Tomada al azar una muestra de 500 personas de una determinada comunidad, se encontró que 300 leían la prensa regularmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de lectores entre las personas de esa comunidad.

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,05 con un nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

a) (0,5640; 0,6360)

b) La muestra debe tener 260 individuos.

Evaluación

1. En cierto barrio se quiere hacer un estudio para conocer el tipo de actividades de ocio que gustan a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar. Explica cuál sería el procedimiento de selección más adecuado.

Sol: Muestreo estratificado.

2. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por los clientes de una compañía de telefonía móvil se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y desviación típica 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49 ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,37 Mb?

Sol: 0,2578.

3. Un profesor quiere saber cuánto tiempo dedican sus alumnos al ocio. Para ello selecciona al azar una muestra de 10 alumnos obteniendo los siguientes resultados en minutos:

90 150 360 120 240 90 480 270 60 120

Suponiendo que el tiempo de ocio se distribuye normalmente con desviación típica 63 min:

a) Encuentra un estimador puntual para la media de la población.

b) Halla un intervalo para la media de la población con un nivel de confianza del 95 %.

c) ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra que debe seleccionar para que el error cometido, con un nivel de confianza del 95 %, sea inferior a 30 min?

a) 198

b) (158,9521; 237,0478)

c) 17 alumnos.

4. Tomada al azar una muestra de 500 personas de una comunidad autónoma, se encontró que 220 leían algún periódico habitualmente. Calcula con un nivel de confianza del 95 % el intervalo en qué se encontrará la verdadera proporción de lectores de periódicos.

Sol: (0,3965; 0,4835)

5. Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 s. ¿Cuál será el número de medidas que deberá realizar para que sea del 99 % la confianza de que el error de su estimación no excederá en 0,1 s?

Sol: Deberá realizar 166 medidas.

6. Durante la celebración de unas elecciones, y a la salida de un colegio electoral, se realizó una encuesta que indicó que, de las 300 personas encuestadas, 75 habían votado a un determinado partido.

a) Estima puntualmente, a partir de estos datos la proporción de votantes favorables a dicho partido.

b) Halla un intervalo para la proporción con un nivel de confianza del 95 %.

a) 0,25

b) (0,201; 0,299)