Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= \quad 2 \\ x - y + \lambda z &= \quad \lambda \end{aligned}\right\}$$

a) Discútelo según los valores de λ . ¿Tiene siempre solución?

b) Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq -1$	3	3	S. Compatible Determinado

Luego, el sistema siempre tiene solución.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$.

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x + y &= 1 - z \\ 2x + y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{4 - 3z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned}(m+2)x-y-z&=\ \ 1\\ -x-y+z&=-1\\ x+my-z&=\ \ m\end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores de m.
b) Resuélvelo para el caso $m=1$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = m+2-1+m-1+1-m^2-2m=0 \Rightarrow -m^2+1=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=-1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=-1$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 1\ y\ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} 3x-y&=1+z \\ -x-y&=-1-z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+z}{2} \\ y=\dfrac{1+z}{2} \\ z=z \end{cases}$$

Considera el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z= \quad 5 \\ 2x-3y+z=-4 \end{array}\right\}$

a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x+y+\lambda z=9$ sea compatible indeterminado.

b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -9\lambda-2+2+3-3+4\lambda=0 \Rightarrow -5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq 0$	3	3	S. Compatible Determinado

b) No hay ningún valor de λ para el cual el sistema no tenga solución.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α para los que A tiene inversa.
b) Calcula la inversa de A para $\alpha=1$
c) Resuelve, para $\alpha=1$, el sistema de ecuaciones $AX=B$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha+6\alpha-2\alpha^2-6=0 \Rightarrow -2\alpha^2+7\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha=2 \ ; \ \alpha=\frac{3}{2}$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq \frac{3}{2}$

b)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} \lambda x+2y+6z= \quad 0 \\ 2x+\lambda y+4z= \quad 2 \\ 2x+\lambda y+6z=\lambda-2 \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda=2$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 6 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix} = 6\lambda^2+16+12\lambda-12\lambda-24-4\lambda^2=0 \Rightarrow 2\lambda^2-8=0 \Rightarrow \lambda=2\ ;\ \lambda=-2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda=-2$	2	3	S. Incompatible
$\lambda\neq 2\ y\ -2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda=2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+6z=0 \\ 2x+2y+4z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6z=-2y \\ 2x+4z=2-2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-y \\ y=y \\ z=-1 \end{array}\right.$$

a) Discute según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -x+\lambda y+ \quad\quad z &= \lambda \\ \lambda x+2y+(\lambda+2)z &= 4 \\ x+3y+ \quad\quad 2z &= 6-\lambda \end{aligned}\right\}$$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^2+8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = 8$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda = 8$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 0 \ y \ 8$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$.

$$\left.\begin{aligned} -x+z &= 0 \\ 2y+2z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x &= -z \\ 2y &= 4-2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \dfrac{4-2z}{2} = 2-z \\ z = z \end{cases}$$

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} -\lambda x+\ \ y+z&=1\\ x+\lambda y+z&=2\\ \lambda x+\ \ y+z&=1\end{aligned}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = 1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = 1$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 0 \ y \ 1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} y+z&=1 \\ x+z&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 - z \\ z = z \end{cases}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de *A* según los diferentes valores de *t*.

b) Razona para qué valores de t el sistema homogéneo $A\cdot X=O$ tiene más de una solución.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix}=-t^2+3t-2=0\Rightarrow t=1\ ;\ t=2$$

	R(*A*)
$t=1$	2
$t=2$	2
$t\neq 1\ y\ 2$	3

b) El sistema homogéneo tiene más de una solución cuando el rango de *A* sea 2, es decir, para $t=1$ y $t=2$.

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x-2y+4z = 4 \\ 2x \quad\quad + z = a \\ -3x-3y+3z=-3 \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea posible.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6-24+12+6=0$$

Luego el rango de A es 2.

Calculamos el determinante de la matriz ampliada del sistema.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 6a-24-12+6a=0 \Rightarrow a=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$a=3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a \neq 3$	2	3	S. Incompatible

b) $a=3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+4z=4 \\ 2x \quad\quad + z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y=4-4z \\ 2x \quad = 3-z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-z}{2} \\ y=\dfrac{-1+3z}{2} \\ z=z \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=\lambda+1 \\ 3y+2z=2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)y+z=\lambda \end{array}\right\}$

a) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.
b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.
c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$?.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix}=3+6-9-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq 1$	3	3	S. Compatible Determinado

Luego, el sistema tiene solución única si $\lambda\neq 1$.

a) Vamos a resolverlo para $\lambda=1\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-t}{3} \\ y=\dfrac{5-2t}{3} \\ z=t \end{array}\right.$

c) Sustituimos la solución en el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=\lambda+1 \\ 3\cdot 0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2\lambda+3 \\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(\lambda-1)\cdot 0+\frac{1}{2}=\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \end{array}\right\}$$

Luego, vemos que para $\lambda=-1$, la solución del sistema es: $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$$\text{Dado el sistema de ecuaciones: } \left.\begin{array}{r} kx+2y= \quad 3 \\ -x \quad +2kz=-1 \\ 3x-y-7z=k+1 \end{array}\right\}$$

a) Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro *k*.
b) Resuélvelo para $k=1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2k^2+12k-14=0 \Rightarrow k=1 \,;\, k=-7$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k=-7$	2	3	S. Incompatible
$k \neq 1 \ y \ -7$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $k=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ -x+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=3 \\ -x \quad =-1-2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$$

$$\text{Considera el sistema de ecuaciones: } \left.\begin{array}{r} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+\quad y\quad+\quad z=\quad 2 \\ x-\quad 2y\quad-\quad z=k+1 \end{array}\right\}$$

a) Clasifícalo según los distintos valores de *k*.
b) Resuélvelo para $k=2$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = k^2-2k=0 \Rightarrow k=0\ ;\ k=2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=0$	2	3	S. Incompatible
$k=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k\neq 0\ y\, 2$	3	3	S. Compatible determinado

b) $k=2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ 2x+y+\ z=\quad 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=-1-2z \\ 2x+y=2-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{7-z}{5} \\ y=\dfrac{-4-3z}{5} \\ z=z \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rl} \mathbf{x} \quad + \mathbf{ky} + \mathbf{2z} = & \mathbf{k+1} \\ \mathbf{x} \quad + \mathbf{2y} + \mathbf{kz} = & \mathbf{3} \\ \mathbf{(k+1)x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = & \mathbf{k+2} \end{array}\right\}$$

Considera el sistema de ecuaciones:

a) Determina los valores de *k* para los que el sistema tiene más de una solución.
b) ¿Existe algún valor de *k* para el cual el sistema no tiene solución?.
c) Resuelve el sistema para $k=0$
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 6k = 0 \Rightarrow k = 0 \ ; \ k = 2 \ ; \ k = -3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k=-3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 0, 2 \ y -3$	3	3	S. Compatible determinado

b) No hay ningún valor de *k* para el cual el sistema no tenga solución.

c) $k=0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x+2z=1 \\ x+2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-2z \\ x+2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2z \\ y=1+z \\ z=z \end{array}\right.$$

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro?. ¿Y el de la calculadora?. Razona las respuestas.
b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $x =$ Precio del libro, $y =$ Precio de la calculadora, $z =$ Precio del estuche
Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2y+2z=114 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=114 \Rightarrow x=38\text{ €}$$

Luego, el precio del libro es 38 €.
Vamos a ver si podemos calcular el precio de la calculadora:

$$\left.\begin{array}{l} 38+y+z=57 \\ 38-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=19 \\ -2y-2z=-38 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No podemos, ya que es un sistema compatible

indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) Planteamos el sistema con la nueva ecuación que nos dan y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0'5x+0'8y+0'75z=34 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=\ \ 57 \\ x-2y-2z=\ \ 0 \\ 50x+80y+75z=3400 \end{array}\right\} \Rightarrow x=38\text{ €};\ y=15\text{ €};\ z=4\text{ €}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+\quad y+kz=1 \\ 2x+ky\qquad =1 \\ y+2z=k \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro *k*.
b) Resuélvelo para $k=1$.
c) Resuélvelo para $k=-1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k+2k-4=0 \Rightarrow k=1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k\neq 1$	3	3	S. Compatible determinado

b) $k=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1-z \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=1-2z \\ z=z \end{array}\right.$$

c) $k=-1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+\quad y-z=\ \ 1 \\ 2x-y\qquad =\ \ 1 \\ y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ;\ y=0\ ;\ z=-\frac{1}{2}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{array}{r} kx+2y= \ \ 2 \\ 2x+ky= \ \ k \\ x- \ \ y=-1 \end{array}\right\}$

a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro *k*.
b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) Halla las soluciones en cada caso.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz ampliada del sistema

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2+2k-4-2k+4+k^2 = 0$$

Luego, el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y el sistema siempre es compatible para cualquier valor del parámetro *k*.

b) Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2-4=0 \Rightarrow k=\pm 2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=2$	2	2	S. Compatible Determinado
$k=-2$	1	1	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 2$ y -2	2	2	S. Compatible Determinado

Resolvemos el sistema para $k=-2$.

$$\left.-2x+2y \ =2\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=x \\ y=\dfrac{2+2x}{2}=1+x \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema para $k \neq -2$.

$$\left.\begin{array}{r} kx+2y=2 \\ 2x+ky=k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ k & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}=\dfrac{0}{k^2-4}=0 \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}=\dfrac{k^2-4}{k^2-4}=1 \end{array}\right.$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas $\left.\begin{array}{r} x \quad - y \qquad = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -x - y + \lambda z \ = 0 \end{array}\right\}$

a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq 0 \ y \ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x - y \ = 0 \\ -x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} x - y \ = -1 \\ -2y - z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ y = y \\ z = 1 - 2y \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 3 \end{aligned}\right\}$

a) Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.
b) Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema que nos dan es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones, para que tenga las mismas soluciones al añadirle la nueva ecuación el rango de la matriz de los coeficientes tiene que valer 2, luego, el determinante tiene que valer 0.
Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} = 12 + 1 + 2m - 3 + 8 + m = 0 \Rightarrow 3m + 18 = 0 \Rightarrow m = -6$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m = -6$	2	2	S. Compatible Indeterminado

Luego, para $m = -6$, los dos sistemas tienen las mismas soluciones.

b) Nos están pidiendo que $x + y + z = 6$, luego, resolvemos el sistema: $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$

Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{6} = -1 \,;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{6} = 3 \,;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{6} = 4$$

Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el rango de A según los valores del parámetro m.
b) Discute el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro m.
c) Resuelve el sistema $AX = B$ para $m = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4m + m^2 - 2m + 3m^2 + 2 = 4m^2 - 6m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1 \ ; \ m = \frac{1}{2}$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$m = 1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m = \frac{1}{2}$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 1$ y $\frac{1}{2}$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$.

$$\left.\begin{aligned} -2x + y = 1 + 3z \\ -x + y = 1 + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -2z \\ y &= 1 - z \\ z &= z \end{aligned}\right.$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 0 \\ x-y+mz &= m-2 \\ mx+y+3z &= m-2 \end{aligned}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.
b) Resuélvelo, si es posible, para $m=2$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2m^2 - 8 = 0 \Rightarrow m = 2 \ ; \ m = -2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=-2$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 2 \ y \ -2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=2$.

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= -z \\ x-y &= -2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5z}{3} \\ y = \dfrac{z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} 2x-4y+\ \ 6z &= 6 \\ my+\ \ 2z &= m+1 \\ -3x+6y-3mz &= -9 \end{aligned}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.
b) Resuélvelo para $m=3$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $y=0$.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & m & 2 \\ -3 & 6 & -3m \end{vmatrix} = -6m^2+18m=0 \Rightarrow m=0\ ;\ m=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=0$	2	3	S. Incompatible
$m=3$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m\neq 0\ y\ 3$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=3$.

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y+6z=6 \\ 3y+2z=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-6+13y}{2} \\ y=y \\ z=\dfrac{4-3y}{2} \end{cases}$$

Nos piden una solución para $y=0 \Rightarrow x=-3\ ;\ y=0\ ;\ z=2$.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+\ \ z=5 \end{array}\right\}$

a) Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+y-7z=1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema que nos dan es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones, para que tenga las mismas soluciones al añadirle la nueva ecuación el rango de la matriz de los coeficientes tiene que valer 2, luego, el determinante tiene que valer 0.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} = -21+2\alpha-6+9\alpha+28-1=0 \Rightarrow 11\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\alpha=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado

Luego, para $\alpha=0$, los dos sistemas tienen las mismas soluciones.

b) Nos están pidiendo que $x+y+z=4$, luego, resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+\ \ z=5 \\ x+\ \ y+\ \ z=4 \end{array}\right\}$

Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{25}{3}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{11}{3}\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{2}{3}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+(m+1)y+2z = -1 \\ mx+ y+z = m \\ (1-m)x+2y+z = -m-1 \end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) Resuélvelo para $m=2$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2m^2+5m-2=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}\ ;\ m=2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=\frac{1}{2}$	2	3	S. Incompatible
$m=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m\neq\frac{1}{2}$ y 2	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=2$:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2z \\ 2x+y = 2-z \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{7-z}{5}\ ;\ y=\frac{-4-3z}{5}\ ;\ z=z$$

Calculamos la solución para $z=2$: $x=\frac{7-2}{5}=1$; $y=\frac{-4-3\cdot 2}{5}=-2$; $z=2$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, $\left.\begin{array}{r}\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda\\ \lambda x+z=\lambda\\ x+\lambda z=\lambda\end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.
c) Para $\lambda=0$, si es posible, da tres soluciones distintas.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & \lambda & \lambda+1\\ \lambda & 0 & 1\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-\lambda^3=0\Rightarrow\lambda=0\ ;\ \lambda=1\ ;\ \lambda=-1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda=-1$	2	3	S. Incompatible
$\lambda\neq 0,1,-1$	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda=1$. Cogemos 1ª y 2ª ecuación.

$$\left.\begin{array}{r}y+2z=1\\ x+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1-z\\ y=1-2z\\ z=z\end{array}\right.$$

c) Resolvemos el sistema para $\lambda=0$. Cogemos 2ª y 3ª ecuación.

$$\left.\begin{array}{r}z=0\\ x=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=y\\ z=0\end{array}\right.$$

Damos tres posibles soluciones: $(0,1,0)$; $(0,2,0)$; $(0,3,0)$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{mx-2y\ +\ z} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x-2my+\ z} &= \mathbf{-2} \\ \boldsymbol{x-2y\ +mz} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $\boldsymbol{m=-2}$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^3+6m-4=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=-2$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=1$	1	2	S. Incompatible
$m=-2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m\neq 1,-2$	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo para $m=-2$. Cogemos 1ª y 2ª ecuación

$$\left.\begin{aligned} -2x-2y &= 1-z \\ x+4y &= -2-z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=\dfrac{-1-z}{2} \\ z=z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x - y + mz = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2mz = 0 \end{array}\right\}$

a) Halla los valores del parámetro *m* para los que el sistema tiene una única solución.
b) Halla los valores del parámetro *m* para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.
c) Resuelve el sistema para $m = -2$.
MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{vmatrix} = 3m^2 + 6m = 0 \Rightarrow m = 0 \; ; \; m = -2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	
$m = 0$	2	S. Compatible indeterminado
$m = -2$	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 0$ y -2	3	S. Compatible Determinado

a) Para $m \neq 0$ y $m \neq -2$ el sistema sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$

b) Para $m = 0$ y $m = -2$ el sistema tiene otras soluciones además de la trivial.

c) Resolvemos el sistema para $m = -2$

$$\left.\begin{array}{l} -y - 2z = -x \\ 2y + z = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l}\lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0\end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0 = 0 \Rightarrow$$ Para cualquier valor de λ el rango de A es menor que 3.

Calculamos un determinante de orden 3 con la matriz ampliada.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Hacemos la discusión del sistema

	R(*A*)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda \neq 0$	2	3	Sistema incompatible

c) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$

$$\left.\begin{array}{r}y - z = -1 \\ x + y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}y = -1 + z \\ x + y = 0\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}x = 1 - z \\ y = -1 + z \\ z = z\end{array}\right.$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+\lambda z=0 \\ \lambda x+2y+2z=0 \\ \lambda x+2y+z=0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda+2\lambda^2+2\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^2-4\lambda=\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \ ; \ \lambda=2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	
$\lambda=0$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda=2$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda\neq 0 \ y \ 2$	3	S. Compatible determinado

b) Para $\lambda=0$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2y+2z=0 \\ 2y+\ \ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Para $\lambda=2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2y+2z=-2x \\ 2y+\ \ z=-2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$$

Luego vemos que no hay ningún valor de λ para el cual $z\neq 0$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{aligned} x+\alpha z &= 2 \\ 2x+\alpha y &= \alpha+4 \\ 3x+y+(\alpha+4)z &= 7 \end{aligned}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de α
b) Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} = -2\alpha^2+6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \; ; \; \alpha = 3$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\alpha = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha \neq 0 \; y \; 3$	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo para $\alpha = 2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2z &= 2 \\ 2x+2y &= 6 \\ 3x+y+6z &= 7 \end{aligned}\right\}$ Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{aligned} \alpha x+y+3z &= 4 \\ x+y-2z &= -2 \\ -x+2y+(3+\alpha)z &= 4+\alpha \end{aligned}\right.$

a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.
b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2+6\alpha+8=0 \Rightarrow \alpha=-2 \ ; \ \alpha=-4$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha=-2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha=-4$	2	3	S. Incompatible
$\alpha\neq -2 \ y \ -4$	3	3	S. Compatible determinado

Luego para $\alpha\neq -2 \ y \ -4$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única
b) Para $\alpha=-2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+3z &= 4 \\ x+y-2z &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x+y &= 4-3z \\ x+y &= -2+2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{-6+5z}{3} \ ; \ y=\frac{z}{3} \ ; \ z=z$$

Considera el sistema dado por $A \cdot X = B$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1\\ \alpha-2\\ 3\end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
c) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{vmatrix} = \alpha^2-8\alpha+15=0 \Rightarrow \alpha=3 \; ; \; \alpha=5$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\alpha=3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha=5$	2	3	S. Incompatible
$\alpha\neq 3 \; y \; 5$	3	3	S. Compatible determinado

a) Luego para $\alpha\neq 3 \; y \; 5$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ \alpha-2 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{vmatrix}}=\frac{-2\alpha^2+\alpha+15}{\alpha^2-8\alpha+15} \; ; \; y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & 1 & -1\\ 0 & \alpha-2 & 2\\ 3 & 3 & \alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{vmatrix}}=\frac{\alpha^3-2\alpha^2-3\alpha}{\alpha^2-8\alpha+15} \; ;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & 2 & 1\\ 0 & 1 & \alpha-2\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & \alpha\end{vmatrix}}=\frac{-4\alpha^2+17\alpha-15}{\alpha^2-8\alpha+15}$$

b) Para $\alpha=5$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

c) Para $\alpha=3$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned}3x+2y-z&=1\\ y+2z&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{-1+5z}{3} \; ; \; y=1-2z \; ; \; z=z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 2x+y+(\alpha-1)z = \alpha-1 \\ x-\alpha y-3z = 1 \\ x+y+2z = 2\alpha-2 \end{array}\right\}$

a) Resuelve el sistema para $\alpha=1$.
b) Determina, si existe, el valor de α para el que $(x,y,z)=(1,-3,\alpha)$ es la única solución del sistema dado.
MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ x-y-3z=1 \\ x+y+2z=0 \end{array}\right\}$. Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3};\ z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

b) Sustituimos la solución que nos dan en el sistema dado y vemos si tiene sentido.

$$\left.\begin{array}{r} 2-3+(\alpha-1)\alpha=\alpha-1 \\ 1+3\alpha-3\alpha=1 \\ 1-3+2\alpha=2\alpha-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha^2-2\alpha=0 \\ 1=1 \\ -2=-2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos la ecuación: $\alpha^2-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0\ y\ \alpha=2$.

Hacemos la discusión del sistema para estos valores:

	R(A)	R(M)	
$\alpha=0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\alpha=2$	3	3	Sistema compatible determinado

Luego, para $\alpha=2$ la solución del sistema es única y es: $(1,-3,\alpha)$.

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned}(3\alpha-1)x+2y&=5-\alpha\\ \alpha x+\ \ y&=\ \ 2\\ 3\alpha x+3y&=\alpha+5\end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro α.
b) Resuélvelo para $\alpha=1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x=4$.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a cero

$$|M|=\begin{vmatrix}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha\\ \alpha & 1 & 2\\ 3\alpha & 3 & \alpha+5\end{vmatrix}=\alpha^2-2\alpha+1=0\Rightarrow \alpha=1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } \alpha=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=1$$

$$\text{Si } \alpha=1\Rightarrow M=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=1$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha=1$	1	1	S. Compatible indeterminado
$\alpha\neq 1$	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $\alpha=1$:

$$\left.x+y=2\right\}\Rightarrow x=x\ ;\ y=2-x$$

Calculamos la solución para $x=4$: $x=4$; $y=-2$

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} x+\lambda y+z=\lambda \\ \lambda x+y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{array}\right.$

a) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones
b) Resuelve el sistema para $\lambda=-2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=1 \,;\, \lambda=-2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1 \,;\, F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $\lambda=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1 \,;\, F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=1$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1 \,;\, F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1 \,;\, F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=1$	1	1	S. compatible indeterminado
$\lambda=-2$	2	2	S. compatible indeterminado
$\lambda\neq 1 \; y \; -2$	3	3	S. compatible determinado

Luego, para $\lambda=1$ y $\lambda=-2$ el sistema tiene infinitas soluciones

b) Para $\lambda=-2$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{array}\right.$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ **, el rango de la matriz** $A-\lambda I$ **, siendo** ***I*** **la matriz identidad de orden tres.**

b) Resuelve el sistema dado por $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(A − 2I)**

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-\lambda I$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12=0\Rightarrow\lambda=2\ ;\ \lambda=3$$

Para $\lambda=2\Rightarrow A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+2F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A-2I)=2$

Para $\lambda=3\Rightarrow A-3I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A-3I)=2$

Si $\lambda\neq 2\ y\ 3\Rightarrow Rango(A-\lambda I)=3$.

b) Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ -y-z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}\Rightarrow x=t\ ;\ y=0\ ;\ z=0$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{aligned} x+(\lambda+1)y+z&=1\\ \lambda y+z&=0\\ \lambda y+\lambda z&=\lambda\end{aligned}\right.$

a) Discútelo según los valores de λ. b) Resuélvelo para $\lambda=0$. c) Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z=2$. Calcula esa solución.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\ ;\ \lambda=1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\lambda=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=0\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=2$

Para $\lambda=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda=1\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=3$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda=1$	2	3	Sistema incompatible
$\lambda\neq0\ y\ 1$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\lambda=0$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned}x+y+z&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x&=1-t\\ y&=t\\ z&=0\end{aligned}\right.$

c) Si $z=2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned}x+(\lambda+1)y+2&=1\\ \lambda y+2&=0\\ \lambda y+2\lambda&=\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x+(\lambda+1)y&=-1\\ \lambda y&=-2\\ \lambda y&=-\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lambda=2\ ;\ x=2\ ;\ y=-1\ ;\ z=2$$

Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX=B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*.
b) Resuelve el sistema para $m=-3$ y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{vmatrix}=m^2+3m=0 \Rightarrow m=0 \ ; \ m=-3$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=0 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

Para $m=-3 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=-3 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=-3$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m=0$	2	3	Sistema incompatible
$m\neq 0 \ y \ -3$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=-3$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=4 \\ -x-y-3z&=-3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=6-t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$

Si $x=2$, la solución del sistema sería: $x=2 \ ; \ y=4 \ ; \ z=-1$

De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas *A*, *B* y *C* el pasado año, se desprende lo siguiente:

- **la empresa *B* obtiene el mismo beneficio que las empresas *A* y *C* juntas.**
- **el beneficio de la empresa *A* es la media aritmética del de las otras dos.**

a) Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que *A* ha obtenido el doble que *C*.

b) Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema de ecuaciones con los datos del problema

$$\left.\begin{array}{l} B=A+C \\ A=\dfrac{B+C}{2} \\ A=2C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ 2A-B-C=0 \\ A-2C=0 \end{array}\right\}.$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ B-3C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=2C \\ B=3C \\ C=C \end{array}\right.$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) Planteamos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ 2A-B-C=0 \\ A+B+C=210 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 210 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 210 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B+C=0 \\ B-3C=0 \\ 2B=210 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=70 \\ B=105 \\ C=35 \end{array}\right.$$

Luego: $A=70$ *millones de* € ; $B=105$ *millones de* € ; $C=35$ *millones de* €

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} 2x-4y+2z &= 1 \\ 5x-11y+9z &= \lambda \\ x-3y+5z &= 2 \end{aligned}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ
b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.
MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -110-36-30+22+100+54=0$$

Como vale cero, el rango de A es 2. Calculamos el determinante de la ampliada y lo igualamos a cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -44-4\lambda-15+11+40+6\lambda = 2\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda = 4$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 4$	2	2	S. compatible indeterminado
$\lambda \neq 4$	2	3	S. Incompatible

b) Para $\lambda = 4$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y+2z &= 1 \\ 5x-11y+9z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-4y &= 1-2z \\ 5x-11y &= 4-9z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -4 \\ 4-9z & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{5-14z}{-2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-2z \\ 5 & 4-9z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{3-8z}{-2} \\ z &= z \end{aligned}\right.$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (*I* es la matriz identidad).

b) Resuelve $AX=-3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A+\lambda I$.

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para que no tenga inversa el determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12=0\Rightarrow \lambda=2\ ;\ \lambda=-2\ ;\ \lambda=3$$

Luego, la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa para los valores: $\lambda=2$; $\lambda=-2$; $\lambda=3$.

b) Resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{r} -2x-2y=-3x \\ -2x+\ y=-3y \\ -2z=-3z \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \\ z=0 \end{array}\right.\Rightarrow x=2y\ ;\ y=y\ ;z=0$

Si $x=1$, entonces la solución es: $x=1$; $y=\dfrac{1}{2}$; $z=0$

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.
a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos?. Razona la respuesta.
b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos $x =$ Precio del lápiz, $y =$ Precio del rotulador, $z =$ Precio de la carpeta
Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+7y=25 \\ 2x+4y+z=20 \\ 3x+y+2z=15 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 2 & 4 & 1 & 20 \\ 3 & 1 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 0 & -20 & 2 & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y= \ 25 \\ -10y+z=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-7t \\ y=t \\ z=-30+10t \end{array}\right\}$$

Vemos que es un sistema compatible indeterminado, por lo tanto, tiene infinitas soluciones. No podemos deducir el precio de cada artículo, pues algunas soluciones son absurdas, por ejemplo, si $t=1$, entonces: $x=18$; $y=1$; $z=-20$

b) Planteamos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} z=10x \\ 2x+4y+z=20 \\ 3x+y+2z=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+4y+10x=20 \\ 3x+y+20x=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=5 \\ 23x+y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow 20x=10 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \ ; \ y=\frac{7}{2} \ ; \ z=5$$

Luego, el lápiz cuesta 0’5 €, el rotulador 3’5 € y la carpeta 5 €

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ **;** $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Calcula *BM*.
b) Razona si el sistema dado por $A\cdot X=B$ tiene solución o no y, en caso afirmativo, cuántas soluciones tiene.
c) Resuelve $A\cdot X=B$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $B\cdot M=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$

b) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=1$$

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 4 & 2\\ 1 & -1 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=1$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

c) Resolvemos el sistema. Como el rango es 1, solamente tenemos una ecuación, luego, el sistema que tenemos que resolver es: $-x+y+2z=1\}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+y+2z\\ y=y\\ z=z\end{cases}$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{aligned} 3x+ky&=1\\ 2x-y+kz&=1\\ x-3y+2z&=1\end{aligned}\right.$

del que se sabe que para un cierto valor de *k* es compatible indeterminado.
a) Determina el valor de *k*.
b) Resuelve el sistema para $k=1$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & k & 0\\ 2 & -1 & k\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix} = 5k^2+5k-6=0 \Rightarrow k=1\ ;\ k=-6$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema. Cambiamos de orden 1ª y 3ª ecuación.

Para $k=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & 10 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $k=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -3 & -1\\ 0 & 10 & -6 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $k=-6 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & -6\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ 0 & 5 & -10\\ 0 & 3 & -6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$k=-6 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -6 & 1\\ 3 & -6 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -10 & -1\\ 0 & 3 & -6 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{3}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -10 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{5}\end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$k=-6$	2	3	Sistema incompatible
$k\neq 1\ y\ -6$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $k=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=1\\ 2x-y+z&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{2-z}{5}\ ;\ y=\frac{-1+3z}{5}\ ;\ z=z$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para $m = 2$, si es posible, resuelve el sistema dado.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \ ; \ m = -1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = -1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

	R(A)	R(M)	
$m = 2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m = -1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m \neq 2 \ y \ -1$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = 2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3 - 4z}{3} \ ; \ y = -\frac{z}{3} \ ; \ z = z$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad y \qquad B=\begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para $m=2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z=17$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 3+6-2m+4-9=0 \Rightarrow m=2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$m=2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m\neq 2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=2$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+2t \end{array}\right.$

Si $z=17$, la solución del sistema sería: $x=-23$; $y=8$; $z=17$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} x+2y+(m+3)z &= 3 \\ x+y+z &= 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro *m*.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} = -m+3=0 \Rightarrow m=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=3$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 3$	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=-2$:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ x+y+z &= -6 \\ 2x+4y-3z &= 8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F_2-F_1} \left.\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ -y &= -9 \\ -5z &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-\frac{73}{5} \ ; \ y=9 \ ; \ z=-\frac{2}{5}$$

a) Justifica que es posible hacer un pago de 34'50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros

se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas

tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos

$x =$ número de monedas de 50 céntimos

$y =$ número de monedas de 1 €

$z =$ número de monedas de 2 €

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 0'5x + y + 2z = 34'5 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array}\right\}$

Ordenamos y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 30 \\ 0'5x + y + 2z = 34'5 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 30 \\ 0'5y + 1'5z = 19'5 \\ -2y = -30 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 15 \; ; \; z = 8 \; ; \; x = 7$$

Luego, la solución es única y es utilizando 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 € y 8 monedas de 2 €.

b) Planteamos y resolvemos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 30 \\ 0'5x + y + 2z = 35 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 30 \\ 0'5y + 1'5z = 20 \\ -2y = -30 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 15 \; ; \; z = \frac{25}{3} \; ; \; x = \frac{20}{3}$$

Esta solución no es posible, ya que el número de monedas tiene que ser un número entero positivo, no puede ser decimal.

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de A según los valores del parámetro λ.
b) Para $\lambda=-2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX=B$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\lambda^3-6\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=1\ ;\ \lambda=-2$$

Calculamos el rango de la matriz A.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda \neq 1\ y\ -2 \Rightarrow R(A)=3$

b) Calculamos el rango de la matriz ampliada para $\lambda=-2$

$$\lambda=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y-2z=-1 \\ 2x+2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{-1+3z}{6}\ ;\ y=\frac{2-3z}{3}\ ;\ z=z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ x+2y+4z=m \end{array}\right.$ **.**

a) Discute el sistema en función del parámetro *m*.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4m+1+2m-m^2-4-2 = -m^2+6m-5=0 \Rightarrow m=1 \,;\, m=5$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=5 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$m=5 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m=5$	2	3	Sistema incompatible
$m\neq 1$ y 5	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1+2z \;;\; y=-3z \;;\; z=z$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = mX$ según los valores del parámetro m.
b) Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.
c) Para $m=3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x+y+z=3$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $AX = mX \Rightarrow AX - mX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-m)x=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+(3-m)z=0 \end{array}\right\}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)^2 \cdot (3-m) = 0 \Rightarrow m=2 \ ; \ m=3$$

$$Para\ m=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$$

$$Para\ m=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

	R(A)	
$m=2$	1	S. Compatible indeterminado
$m=3$	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 2\ y\ 3$	3	S. Compatible Determinado

b) Para $m \neq 2\ y\ 3$, el sistema es compatible determinado y tiene la solución trivial $x=y=z=0$

c) Resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{r} -x=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ z=z \end{cases}$

Veamos si es posible que una solución sea: $x+y+z=3 \Rightarrow z+z=3 \Rightarrow 2z=3 \Rightarrow z=\dfrac{3}{2}$

Luego, la solución es $x=0\ ;\ y=\dfrac{3}{2}\ ;\ z=\dfrac{3}{2}$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{aligned} x - z &= m \\ my + 3z &= 1 \\ 4x + y - mz &= 5 \end{aligned}\right.$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Para $m=1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x = z$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 ;\ m = 3$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para

$$m = 3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

	R(A)	R(M)	
$m = 1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m = 3$	2	3	Sistema incompatible
$m \neq 1\ y\ 3$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = 1$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned} x - z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 + z \\ y &= 1 - 3z \\ z &= z \end{aligned}\right.$

No es posible ya que $x = 1 + z$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{r} x+y+mz=m^2 \\ y-z=m \\ x+my+z=m \end{array}\right.$ **.**

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) Resuélvelo para $m=1$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1-1-m+m=0 \Rightarrow R(A)<3$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m+m-m^2-m^2=2m-2m^2=0 \Rightarrow m=0 \ ; \ m=1$$

Si $m=0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Si $m=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m=1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 0 \ y \ 1$	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $m=1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2z \ ; \ y=1+z \ ; \ z=z$$

Si $z=2 \Rightarrow x=-4 \ ; \ y=3$