

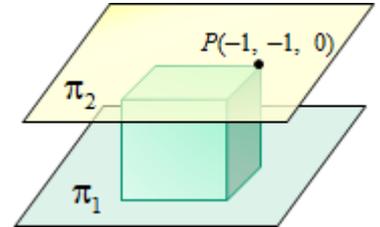
Ejercicio 3: Calificación máxima: 2,5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
 b) (1,5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D , sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Solución:

Como los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ son paralelos, la medida de la arista del cubo viene dada por la distancia entre ambos planos.



La distancia de entre esos planos es:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P(-1, -1, 0) \in \pi_2, \pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0) = \left| \frac{-4 - 6 + 1}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (-12)^2}} \right| = \frac{9}{14}.$$

Por tanto, el volumen del cubo será:

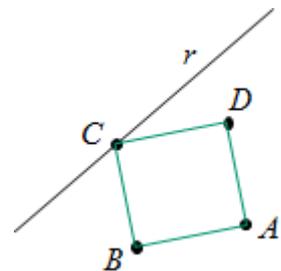
$$V = \left(\frac{9}{14} \right)^3 = \frac{729}{2744} \text{ u}^3.$$

- b) Cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, y C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

El punto C estará en la recta determinada por π_2 y π_3 .

$$\begin{cases} \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} -2x - 3y = 5 - 6z \\ x - y = 2 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t \\ y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}t \\ z = t \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t, -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}t, t\right).$$



Si $ABCD$ es un cuadrado $\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CB} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0$.

$$\overline{AB} = (1, 2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, 1, 0);$$

$$\overline{CB} = (1, 2, 3) - \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t, -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}t, t\right) = \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}t, \frac{19}{5} - \frac{8}{5}t, 3 - t\right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 0) \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}t, \frac{19}{5} - \frac{8}{5}t, 3 - t\right) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}t + \frac{19}{5} - \frac{8}{5}t = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Por tanto: $C(2, 3, 3)$.

Si $D(a, b, c)$, como $\overline{DC} = \overline{AB} \Rightarrow (2 - a, 3 - b, 3 - c) = (-1, 1, 0) \Rightarrow a = 3; b = 2, c = 3$.

Luego, $D(3, 2, 3)$.

Ejercicio 3: Calificación máxima: 2,5 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$, se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
- (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .
- (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P .

Solución:

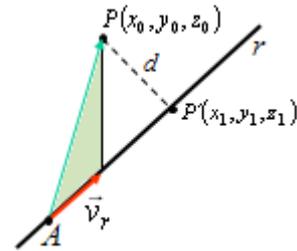
a) Se escribe la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$ en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$.

La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}, \text{ siendo } A \in r.$$

En este caso:

$$A = (0, 2, 6), P = (1, 1, 1), \overrightarrow{AP} = (1, -1, -5), \vec{v}_r = (1, -2, -5).$$



El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-5, 0, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}.$$

El módulo de \vec{v}_r : $|\vec{v}_r| = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$.

$$\text{Luego } d(P, r) = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}.$$

b) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y \overrightarrow{AB} , siendo $A \in r$ y $B \in s$.

Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

$$\vec{v}_r = (1, -2, -5), \vec{v}_s = (-1, 1, 1/3) \text{ y } \overrightarrow{AB} = (2, -1, -1) - (0, 2, 6) = (2, -3, -7).$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1/3 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 1 + 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) - 5 = \frac{5}{3} \neq 0, \text{ los vectores son linealmente}$$

independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

c) El plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P tiene como vector normal a $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$.

Por tanto, su ecuación será: $\pi \equiv -x + y + \frac{1}{3}z + d = 0$.

$$\text{Como se desea que pase por } P(1, 1, 1) \Rightarrow -1 + 1 + \frac{1}{3} + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{El plano pedido será: } \pi \equiv -x + y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0.$$

