UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2016-2017**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & -z & = -2 \\ -2x & & -az & = 2 \\ & y & +az & = -2 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para $a = 4$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5\ ; \quad 2 \leq y \leq 6; \quad x - y \geq -4\ ; \quad 3x - y \leq 10.$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S y obténganse los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < -1, \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.
b) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0'02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0'06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

a) No salga defectuoso.
b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo, $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.
b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo (24'24 ; 47'76) para μ.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz C^{40}.
b) Calcúlese la matriz X que verifica

$$X \cdot A + 3B = C.$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}.$$

a) Estúdiense sus asíntotas.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 + ax.$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

b) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0’6, por sulfatos es 0’4, y por ambos es 0’2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

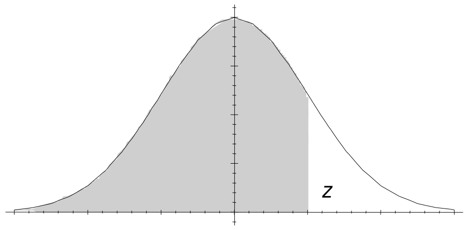
Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0'6$ cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{x} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0’1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto del valor crítico...0,50 puntos.
Discusión correcta...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Solución correcta del sistema...1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Representación correcta de la región S...0,50 puntos.
Cálculo correcto de las coordenadas de los vértices.....................................0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Obtención de las coordenadas del máximo y su valor objetivo......................0,50 puntos.
Obtención de las coordenadas del mínimo y su valor objetivo.......................0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto de la condición de continuidad.................................0,50 puntos.
Cálculo correcto de la constante a ....0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Obtención correcta de los puntos de corte...0,25 puntos.
Obtención correcta de la derivada de f...0,25 puntos.
Estudio correcto del crecimiento y decrecimiento..0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Expresión correcta de la distribución de la media muestral ....0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta del error ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$..0,25 puntos.
Obtención correcta del nivel de confianza...0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de la matriz C^{40}.. 1 punto.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación de la matriz X despejando...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la matriz X...0,50 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Obtención correcta de la asíntota vertical..0,50 puntos.
Obtención correcta de la asíntota oblicua..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de la derivada ....0,50 puntos.
Determinación correcta de los intervalos de crecimiento..............................0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,25 puntos.
Cálculo correcto de la constante *a* ....0,25 puntos.
Determinación correcta del tipo de extremo (mínimo) ....0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la función primitiva...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida..0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.
Apartado (b): 1punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$...0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza..........................0,25 puntos.
Obtención correcta del intervalo de confianza..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta de la fórmula del tamaño..0,50 puntos.
Cálculo correcto del tamaño de la muestra...0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCION A

Problema 1

a) $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} |A| = 2 - 3a = 0 \Rightarrow a = {}^{2}/_{3}$

$$Si\ a \neq {}^{2}/_{3}\ Rango(A) = rango(A') = 3 \Rightarrow SCD$$

$$Si\ a = {}^{2}/_{3} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -{}^{2}/_{3} & 2 \\ 0 & 1 & {}^{2}/_{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow rango(A') = 3$$

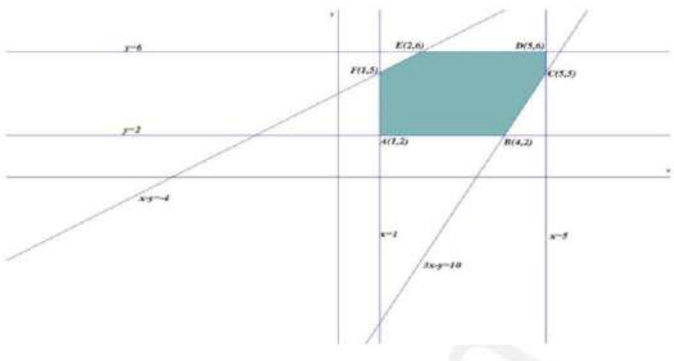
$$rango(A) \neq rango(A') \Rightarrow SI$$

b) $Si\ a = 4 \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - 4z = 2 \\ y + 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

Problema 2

a)

$$Función\ objetivo\ F(x,y) = -200x + 60y S: \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \\ x - y \geq -4 \\ 3x - y \leq 10 \end{cases} Vértices: (1,2)\ (4,2)\ (5,5)\ (5,6)\ (2,6)\ (1,5)$$



b) $F(1,2) = 1000 \quad F(4,2) = 400\ Mínimo$

$F(5,5) = 2000 \quad F(5,6) = 2600 \quad F(2,6) = 3200\ Máximo \quad F(1,5) = 2800$

Problema 3

a) $Continuidad\ en\ x = -1$

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} ax + 1 = a + 1 \\ \lim_{x\to -1^+} x^2 + x - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow -a + 1 = -2 \Rightarrow a = 3$$

b) $Para\ a = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1\ si\ x < -1 \\ x^2 + x - 2\ si\ x \geqslant -1 \end{cases}$$

$Si\ x < -1\ \ f'(x) = 2\ con\ lo\ que\ crece\ siempre\ en\ (-\infty, -1)\ y\ no\ corta\ a\ los\ ejes$

$Si\ x \geq -1\ f'(x) = 2x + 1 = 0\ \Rightarrow x = {}^{-1}/_{2}\ y\ f''(x) = 2 > 0\ con\ lo\ que\ es\ un\ mínimo.$

$La\ función\ decrece\ en\ (-1, {}^{-1}/_{2})\ y\ crece\ en\ ({}^{-1}/_{2}, \infty)$

$Haciendo\ x = 0\ tendrá\ corte\ con\ OY\ en\ (0, -2)$

$Haciendo\ f(x) = 0\ tendrá\ corte\ con\ OX\ en\ x = 1\ (x = -2\ no\ está\ en\ esta\ rama)$

$luego\ el\ punto\ de\ corte\ es\ (1{,}0)$

Problema 5

a) $N(\mu, 24)n = 16$

$$P(\overline{X} \geq 48) = 1 - P(\overline{X} \leq 48)1 - P(Z \leq \frac{18 - 36}{24/\sqrt{16}}) = 1 - P(Z \leq 2 = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b)$E = \frac{47.76 - 24.24}{2} = 11.76$

$$E = Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 11.76 = Z\alpha/_2 \frac{24}{\sqrt{16}} \Rightarrow Z\alpha/_2 = 1.96$$

$El\ nivel\ de\ confianza\ es\ 95\%$

OPCION B

Problema 1

a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$$C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$$

b) $XA + 3B = C \Rightarrow\ XA = C - 3B\ \Rightarrow X = (C - 3B)A^{-1}$

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Problema 2

a) $Verticales\ en\ x = {}^2/_3$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to {}^2/_3{}^-} \dfrac{x^2 - 1}{3x - 2} = \left[\dfrac{{}^{-5}/_9}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to {}^2/_3{}^+} \dfrac{x^2 - 1}{3x - 2} = \left[\dfrac{{}^{-5}/_9}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$Horizantales \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \pm\infty\ \Rightarrow no\ hay$$

$$Oblicuas\ y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} - \frac{1}{3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 3}{3(3x - 2)} = \frac{2}{9}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

b) $f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x - 2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0\ no\ tiene\ solución$

$$f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{{}^2/_3\} \Rightarrow f\ crece\ en\ \mathbb{R} - \{{}^2/_3\}$$

Problema 3

a) $f'(x) = 2x + a \quad f'(2) = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$

$$Como\ f''(x) = 2 > 0\ \Rightarrow x = 2\ es\ un\ mínimo$$

b) $Si\ a = -2 \quad f(x) = x^2 - 2x = 0 \ \Rightarrow x = 0\ x = 2$

$$A_1 = \int_0^2 x^2 - 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$A = |A_1| = \frac{4}{3}$$

Problema 4

a) $P\left({}^{\overline{N}}/_{S}\right) = \frac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \frac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5$

b) $P(\overline{N} \cap \overline{S}) = P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - \big(P(N) + P(S) - P(N \cap S)\big) =$
$= 1 - (0.6 + 0.4 - 0.2) = 0.2$

Problema 5

a) $\sigma = 0.6 \quad n = 100 \quad Z\alpha/_2 = 2.325$

$$E = Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \frac{0.6}{\sqrt{100}} = 0.1395$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = 6.8605, 7.1395)$$

b)$Z\alpha/_2 = 2.325\ E = 0.1$

$$E = Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.1 = 2.325 \frac{0.6}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 194.605 \Rightarrow n = 195$$