UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2017-2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.
b) Calculése la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, \qquad 2x + y \leq 80, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 2, \\[2ex] \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.
b) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0'5$ gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0'25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.
b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12'25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para $a = 3$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0'8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

a) Una persona que trabaja.
b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

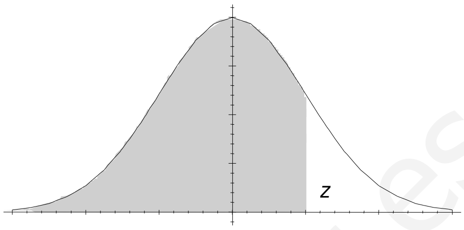
Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99'5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la matriz inversa de A..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta de X en términos de A y B...0,25 puntos.
Cálculo correcto de la matriz X... 0,75 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Representación correcta de la región S……..0,50 puntos.
Determinación correcta de los vértices…...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcta de la abscisa del máximo...0,50 puntos.
Determinación correcta del valor máximo……………………………………..0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto de la condición de continuidad .... 0,50 puntos.
Estudio de la continuidad en x=2 ………... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Elección correcta de la rama a derivar ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la derivada………...0,75 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.
Apartado (b): 1punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$...0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del tamaño……………..........................0,25 puntos.
Obtención correcta del tamaño de la muestra..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta de la distribución de la media muestral ....0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto del determinante y valores críticos…….............................0,50 puntos.
Discusión correcta...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Solución correcta del sistema..1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Determinación correcta del dominio ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la asíntota vertical………...0,25 puntos.
Cálculo correcto de la asíntota oblicua…..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación correcta de la derivada...0,50 puntos.
Determinación correcta de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.....0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto………… ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la función primitiva..0,50 puntos.
Cálculo correcto del área……………...0,25 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta de la ecuación de la tangente..0,25 puntos.
Cálculo correcto de la derivada……..0,50 puntos.
Ecuación correcta de la tangente………... .0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto..0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.. 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto..0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$...0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza..........................0,25 puntos.
Obtención correcta del intervalo de confianza...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión correcta de la distribución de la media muestral ....0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCION A

Ejercicio 1

a) Si A es la matriz inversa de B

$$A^{-1} = B \Rightarrow B \cdot A = A \cdot B = I \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A es la inversa de B y viceversa

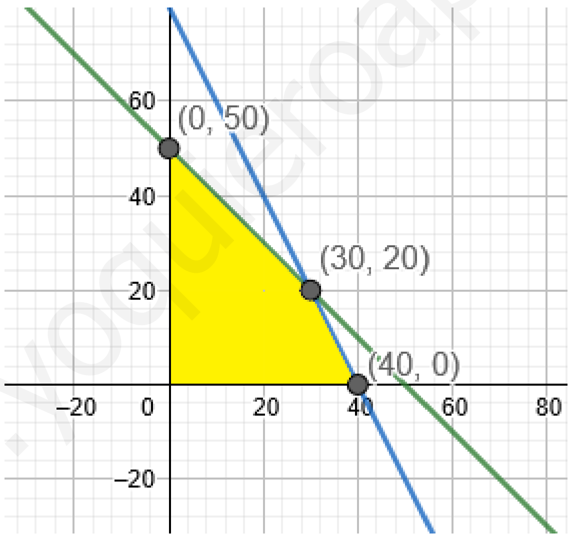
b)

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} = B \cdot B = B^2$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Creamos la región factible a partir de las rectas y calculamos los vértices:



b) El valor Máximo de la función f(x,y)=5x+4y

f(0,50)=200

f(30,20)=230

f(40,0)=200

El máximo es (30,20) y vale 230

Ejercicio 3

a)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & x>2 \end{cases}$$

La función no existe en x=1 pues el denominador se anula

Estudiamos la continuidad en x=2

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=2 \end{cases} \Rightarrow La\ función\ no\ es\ continua\ en\ x=2$$

b)

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Ejercicio 4

“Billetes de transporte” =75%

“Reserva de hotel” =80%

“transporte y hotel” =65%

a)

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.75+0.8-0.65=0.9$$

b)

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.65}{0.8}=0.8125$$

Ejercicio 5

a) Estimamos el número o tamaño de la muestra para el error de 0.25

$$\sigma = 0.5$$

$$Z\alpha_{/2} = 1.96$$

$$n = \left(Z\alpha_{/2}\frac{0.5}{0.25}\right)^2 = 15.35 \approx 16$$

b)

La distribución de la media muestras por el teorema central del limite

$$N\left(12, \frac{0.5}{\sqrt{25}}\right) = N(12{,}0.1)$$

$$P(\overline{X} > 12.25) = 1 - P(\overline{X} \leq 12.25) = 1 - P(Z \leq \frac{12.25 - 12}{0.1}) = 1 - P(Z \leq 2.5)$$
$$= 1 - 0.9938 = 0.0062$$

OPCION B

Ejercicio 1

a)

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Si a≠1 rango(A)=rango(A^*)=3 SCD

Si a=1

Rango(A)=2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \; Rango(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \; rango(A^*) = 3$$

Rango(A)≠rango(A*) Sistema incompatible

b) Si a=3 SCD Resolvemos por Cramer

$$|A| = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{13}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3}{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 12$$

<u>Ejercicio 2</u>

a)

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$Domf = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$Asíntota\ Horizontal$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = R.d.g = \pm\infty$$

$Asíntota\ Vertical$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$Asintota\ Oblicua$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = R.d.g = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2} = R.d.g = -2$$

$$y = x - 2$$

b)

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 3x^2}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

	(-∞,-1)	(-1,0)	(0,∞)
f'(x)	+	-	+
f(x)	Crece	Decrece	Crece

Ejercicio 3

a)

Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x-1)(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 1; x = 3/2$$

Evaluamos la función para ver si es positiva o negativa entre esos valores:

	(0,1)	(1,3/2)
f(x)	+	-

$$A = \int_0^1 2x^3 - 5x^2 + 3x\,dx + \int_1^{3/2} -2x^3 + 5x^2 - 3x\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{2} + 5\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_1^{3/2} = 1/3 + 0.05 = 0.382u^2$$

b) La recta tangente es:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$$y - 0 = 3(x)$$

$$y = 3x$$

Ejercicio 4

$P(H) = 0.7$

$P(M) = 0.3$

$P\left(\frac{T}{H}\right) = 0.8$

$P\left(\frac{T}{M}\right) = 0.7$

a)

$$P(T) = P(H) \cdot P\left(\frac{T}{H}\right) + P(M) \cdot P\left(\frac{T}{M}\right) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.56 + 0.21 = 0.77$$

b)

$$P(H/T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.77} = 0.72$$

Ejercicio 5

a) n=40

$Z_{\alpha/2} = 1.96$

$\sigma = 20$

$\overline{X} = 99.5$

$$I.C = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(99.5 \pm 1.96\frac{20}{\sqrt{40}}\right) = (99.5 \pm 6.19)$$

b)

$$N(100{,}20) \rightarrow N\left(100,\frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(100{,}6.32)$$

$$P\left(\overline{X} \in (100{,}110)\right) = P\left(100 < \overline{X} < 110\right) = P\left(\overline{X} < 110\right) - P\left(\overline{X} < 100\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{110-100}{6.32}\right) - P\left(z < \frac{100-100}{6.32}\right) = P(Z < 1.58) - P(z < 0) =$$

$$= 0.9429 - 0.5 = 0.4429$$