OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
b) Calcula las componentes de la matriz E^{20}. Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

A 2 *(hasta 3 puntos)*

Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2+24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2+44x-96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

a) Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.
b) El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo decreciente.

A 3 *(hasta 2 puntos)*

Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30% en tren y el 10% en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el 10% en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

a) Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.
b) Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

A 4 *(hasta 2 puntos)*

La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica σ=0'35 años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18'2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96% para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*
Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “*P*” y de tomates “*T*”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

a) Dibuja en el plano (P,T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
b) Escribe la función que calcula el beneficio $F(P,T)$ y encuentra el valor (P,T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

B 2 *(hasta 3 puntos)*
La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

a) Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.
b) Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

B 3 *(hasta 2 puntos)*
En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocula la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.

a) Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
b) Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

B 4 *(hasta 2 puntos)*
Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2'5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13’7 años. Responder:

a) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0’4 años, con un nivel de confianza del 95%?
b) Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95%?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 (Ejercicio de cálculo matricial)

a) $\cdot \mathrm{B} = \mathrm{C} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+6y & 2x-6 \\ -9-5y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$,

se deduce: $x = 5,\ y = -1,\ z = 4$

b) Dados $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ con $a = 1$ y $b = 2$ e $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

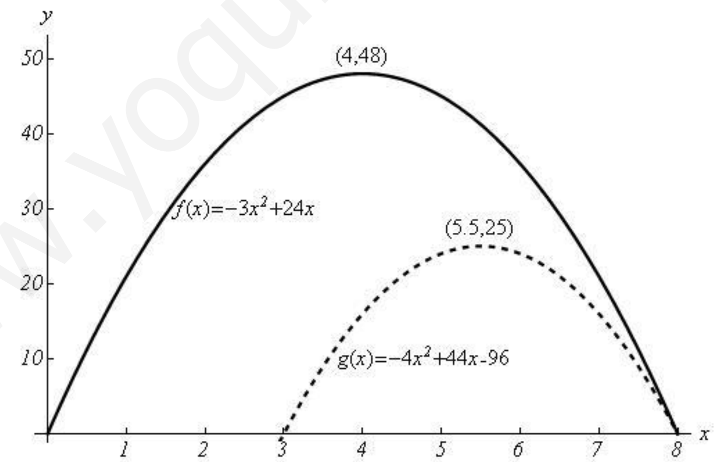
$$\mathrm{E}^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = (a^2+b^2)\cdot \mathrm{I},$$

$$\mathrm{E}^3 = (a^2+b^2)\cdot E,\ E^4 = (a^2+b^2)^2\cdot \mathrm{I},\ldots$$

se deduce: $E^{20} = (a^2+b^2)^{10}\cdot \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$

A 2 (Cálculo de valores y máximo de una función. Interpretación)

a) Gráfica de las funciones



Puntos de corte con el eje OX: $\begin{cases} f(x) = -3x^2+24x = 0 \Longrightarrow x = 0, x = 8, \\ g(x) = -4x^2+44x-96 = 0 \Longrightarrow x = 3, x = 8. \end{cases}$

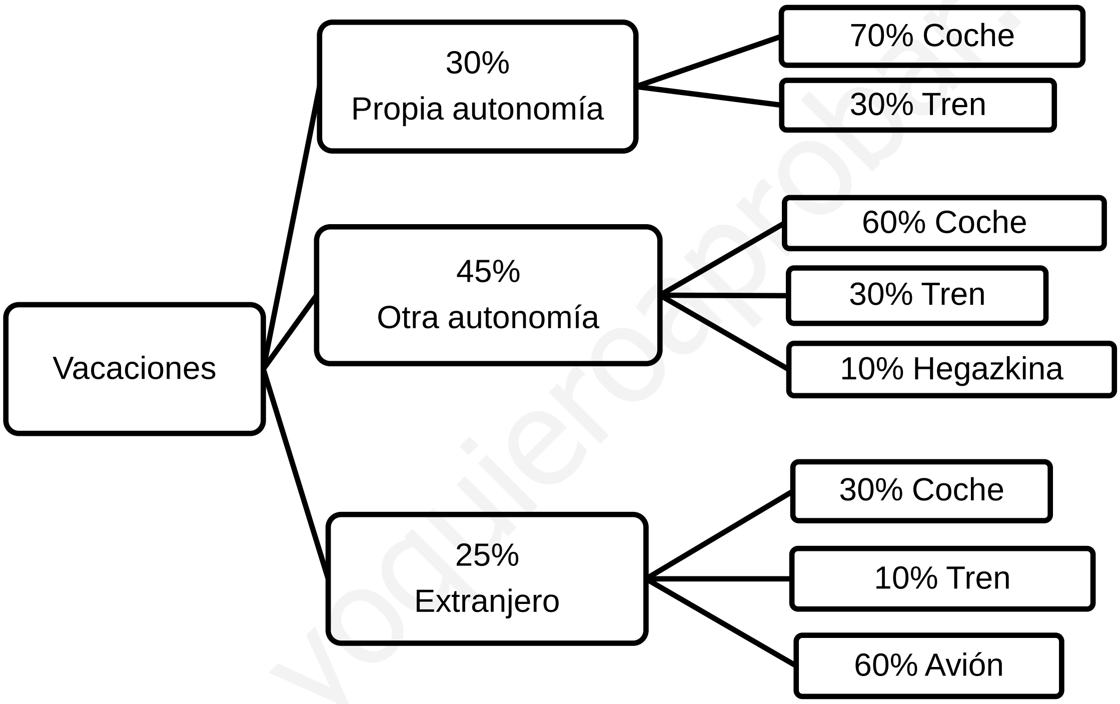
Máximos: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 4,\ f(4) = 48.\ g'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{11}{2},\ g\left(\frac{11}{2}\right) = 25$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -3x^2+24x,\ 0 \le x \le 3, \\ x^2-20x+96,\ 3 \le x \le 8. \end{cases}$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

En el intervalo $0 \leq x < 3$, $h(x)$ es creciente ya que $h'(x) = -6x + 24 > 0$. En el intervalo $3 < x \leq 8$, $h(x)$ es decreciente ya que $h'(x) = 2x - 20 < 0$.

A 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)*



a) P(coche o avión) = 1 – P(tren) =
$$1 - (0'3 \cdot 0'3 + 0'45 \cdot 0'3 + 0'25 \cdot 0'1) = 1 - 0'25 = 0.75 \equiv 75\%.$$
b) La única opción es un desplazamiento a otra autonomía del Estado:

$$P(\overline{\text{Ext}}|\text{Avión}) = \frac{0'45 \cdot 0'1}{0'45 \cdot 0'1 + 0'25 \cdot 0'6} = \frac{0'045}{0'195} = 0'2307 \equiv 23'07\%.$$

A 4 *(Ejercicio de cálculo de un intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal)*

Datos del problema: σ = 0'35 años, $\bar{x}$ = 18'2 años, n = 120 tamaño muestra
Nivel de confianza: $n_c = 0'96 \Rightarrow \alpha = 0'04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'02 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$
Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'055 \cdot \frac{0'35}{\sqrt{120}} = 0'065$.

Intervalo de confianza = (18'2-0'065, 18'2+0'065) = (18'135, 18'265).

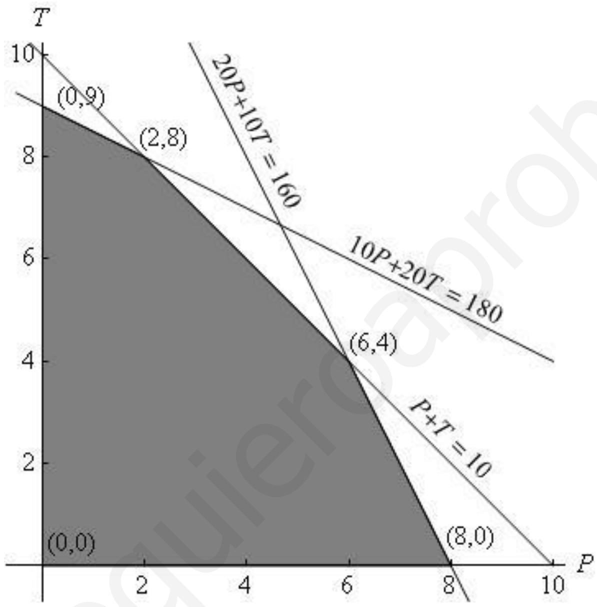
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

OPCIÓN B

B 1 *(Resolución de un problema de programación lineal en dos variables)*

a) Las restricciones del problema y el recinto que limitan son:

$P + T \leq 10,\quad 10P + 20T \leq 180,\quad 20P + 10T \leq 160.$



b) Función objetivo: $F(P, T) = 200\,P + 250\,T$. Los vértices del dominio de soluciones factibles: A=(0,0), B=(0,9), C=(2,8), D=(6,4) y E=(8,0). Máximo de la función objetivo: $F(2,8) = 2400$ que se alcanza en C=(2,8).

B 2 *(Continuidad de una función cálculo de parámetros y cálculo de un área mediante integral)*

a) $f(0)=3$, luego para que $f(x)$ sea continua el limite izquierdo en $x=0$ es:

$3 = \lim_{x\to 0}(ax+b) = b \Longrightarrow b = 3$. Por otra parte, $0 = f\left(\frac{3}{2}\right) \Longrightarrow a = -2$.

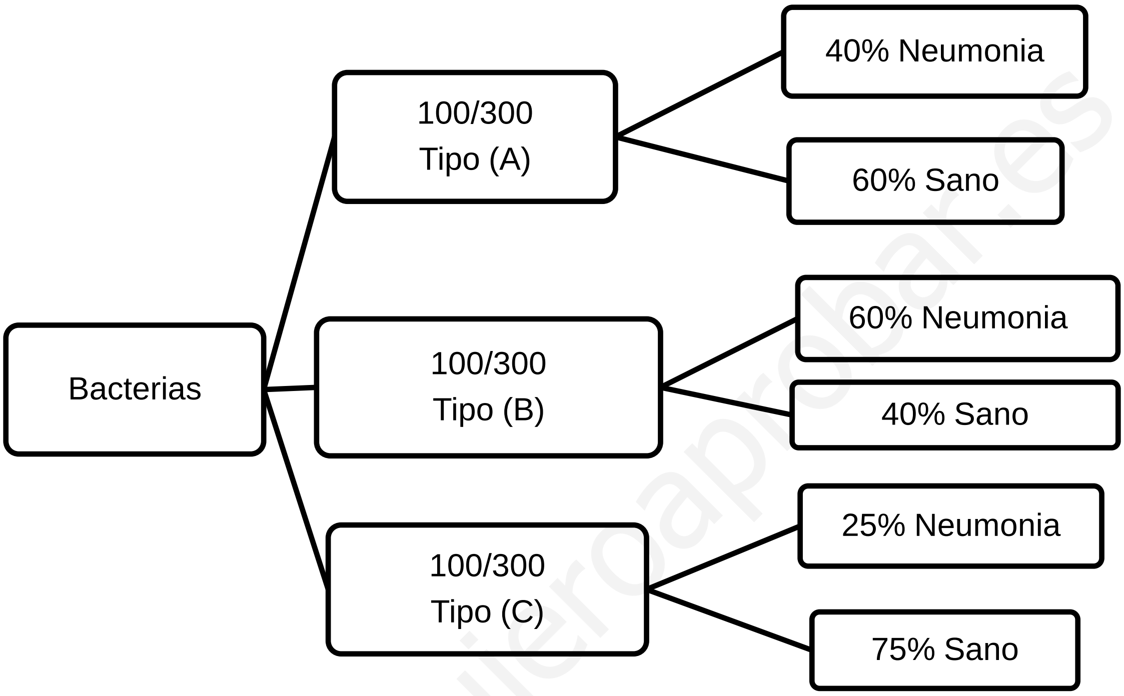
b) $\begin{cases} x \leq 0,\ f(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 \\ x > 0,\ f(x) = -2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Azalera = $\int_{-3}^{0}(-x^2 - 2x + 3)\,dx + \int_{0}^{\frac{3}{2}}(-2x+3)\,dx =$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-3}^{0} + \left[-x^2 + 3x\right]_0^{3/2} = \frac{45}{4}.$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)*



a) $P(\text{Neumonía}) = \frac{40+60+25}{300} = \frac{125}{300} = 0'4166 \equiv 41'66\%$.

b) $P(\text{B}|\text{Neumonía}) = \frac{0'6}{0'4+0'6+0'25} = \frac{0'6}{1'25} = 0'48 \equiv 48\%$.

B 4 *(Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal)*

Datos del problema: σ = 2’5 años, $\bar{x}$ = 13’7 años.

a) Nivel de confianza: $\text{n}_\text{c} = 0'95 \Rightarrow \alpha = 0'05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Amplit. int. confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\text{n}}} = 1'96 \cdot \frac{2'5}{\sqrt{\text{n}}} \leq 0'4 \Rightarrow \text{n} \geq 150'06 \Rightarrow \text{n} = 151.$

b) Tamaño muestra: $\text{n} = 144$.

Nivel de confianza: $\text{n}_\text{c} = 0'95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\text{n}}} = 1'96 \cdot \frac{2'5}{12} = 0'408.$

Intervalo de confianza = (13’7-0’408, 13’7+0’408) = (13’292, 14’108).