A 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ \ 2,5\ puntos}]\!]$

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x,\quad y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

A 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.
b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.
c) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.
Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de "sobresaliente", ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

B 1 $[\![\boldsymbol{hasta}\ \mathbf{2,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $[\![\mathbf{1,25}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.

b) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) $[\![\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \qquad y \qquad A^t \cdot B$$

B 2 $[\![\boldsymbol{hasta}\ \mathbf{2,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$

a) $[\![\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c) $[\![\mathbf{1,25}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

B 3 $[\![\boldsymbol{hasta}\ \mathbf{2,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) $[\![\mathbf{1,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) $[\![\mathbf{1}\ \boldsymbol{punto}]\!]$ Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 $[\![\boldsymbol{hasta}\ \mathbf{2,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) $[\![\mathbf{1}\ \boldsymbol{punto}]\!]$ Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

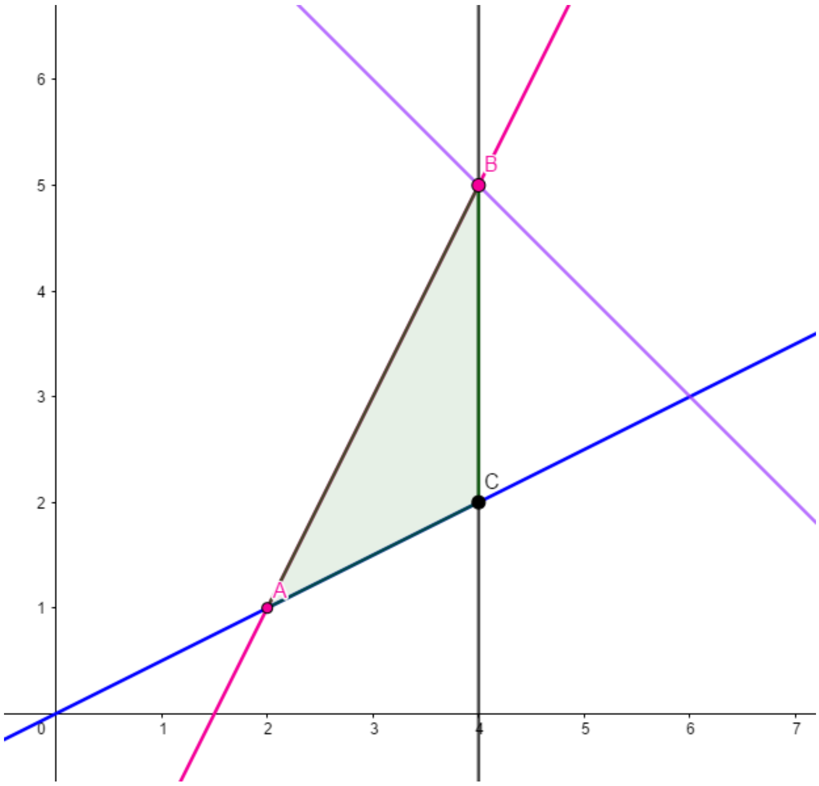
SOLUCIONES

A 1 *Problema de programación lineal con dos variables:*

- La función objetivo a maximizar es: $F(x, \quad y) = 5x + 4y$
- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

- En el plano XY la región factible es:



- Por lo tanto, los vértices son:

$A(2,1)$, $B(4,5)$ y $C(4,2)$.

- $F(A) = F(2,1) = 14$

  $F(B) = F(4,5) = 40$

  $F(C) = F(4,2) = 28$

Por lo tanto, el máximo de la función se consigue en el punto $\boldsymbol{B(4, \ 5)}$ **, y el valor máximo es 40.**

A 2 *Representación gráfica de una función. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con otra función.*

a) Encontrar los parámetros a y b, $\quad f(x) = ax^3 + bx + 1$

- En el punto $(1,-5)$ hay un extremo relativo $\Rightarrow \begin{cases} f(1)=-5 & (1) \\ f'(1)=0 & (2) \end{cases}$
- $f'(x)=3ax^2+b$
- $(1)\ f(1)=-5 \quad \Rightarrow \quad a+b+1=-5 \ \Rightarrow \ a+b=-6$
- $(2)\ f'(1)=0 \quad \Rightarrow \ 3a+b=0$

- Por lo tanto: $\begin{cases} a+b=-6 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \ \boldsymbol{a=3}, \quad \boldsymbol{b=-9} \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{f(x)=3x^3-9x+1}$

b) Determinar los puntos singulares de $f(x)=2x^3-6x+1$.

- Máximos y mínimos relativos $\Rightarrow \ f'(x)=0$
  - $f'(x)=6x^2-6$

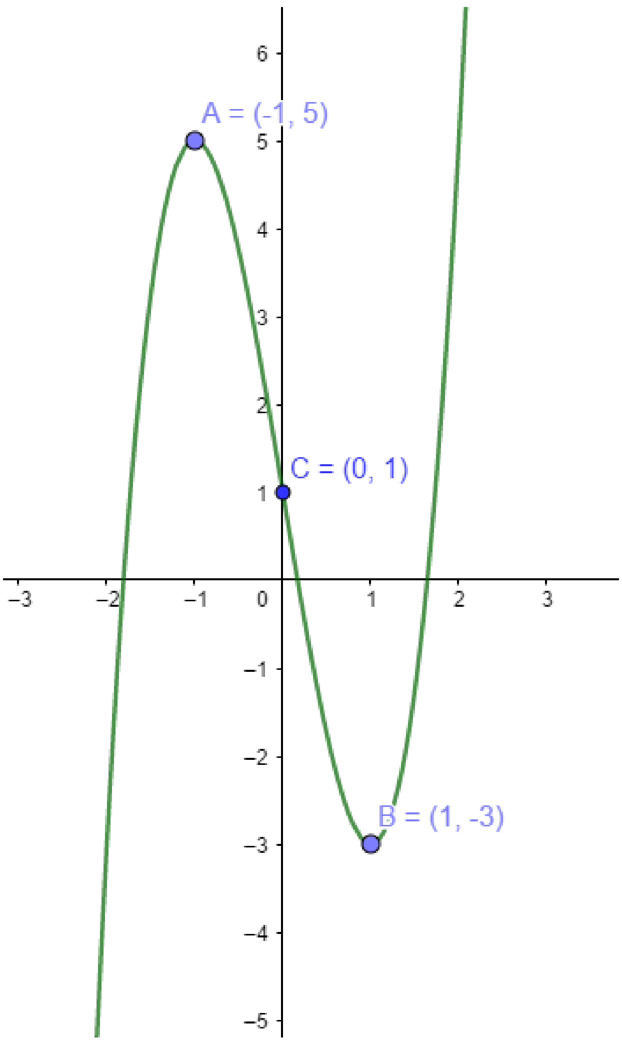
  $\Rightarrow \ f'(x)=0=6x^2-6 \ \Rightarrow$

  $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$
  - $f''(x)=12x$

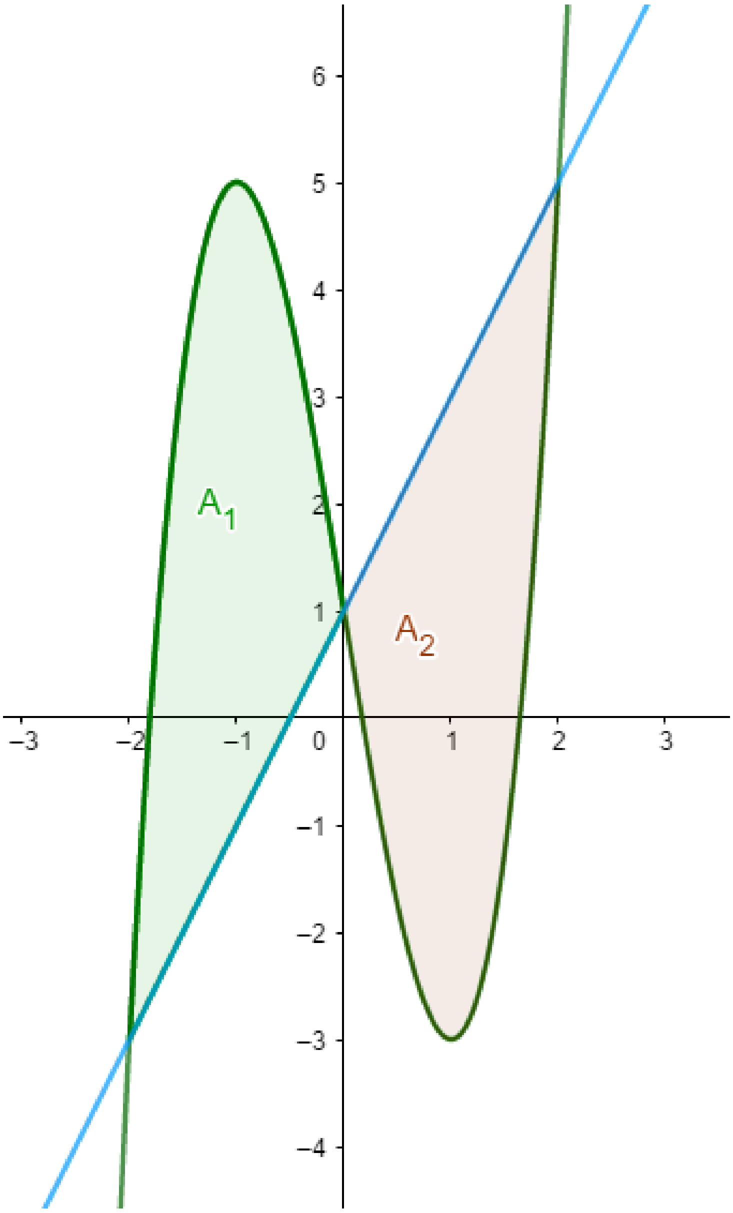
  $\Rightarrow \begin{cases} f''(1)=12>0 & \Rightarrow x=1 \quad \text{mínimo} \\ f''(-1)=-12<0 & \Rightarrow x=-1 \ \text{máximo} \end{cases}$

  - $f(1)=-3 \ \Rightarrow (\mathbf{1},\mathbf{-3})$ **mínimo**
  - $f(-1)=5 \Rightarrow (\mathbf{-1},\mathbf{5})$ **máximo**

- Puntos de inflexión $\Rightarrow \ f''(x)=0$
  - $f''(x)=12x \ \Rightarrow \ 12x=0 \ \Rightarrow x=0$
  - $f(0)=1 \ \Rightarrow (\mathbf{0},\mathbf{1})$ **punto de inflexión**



c) Área delimitada por $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ y $y = 2x + 1$



$f(x)$ es simétrico respecto de la recta entonces $A_1 = A_2$

Por lo tanto:

$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot A_2 =$

$$= 2\int_0^2 [(2x+1) - (2x^3 - 6x + 1)]dx = 2\left[\left(2\frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{2x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_0^2 =$$

$$= 2\left[x^2 + x - \frac{x^4}{2} + 3x^2 - x\right]_0^2 = 2\left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 2(16 - 8) = \mathbf{16\ u^2}$$

A 3 *Problema sobre cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada.*

	Nacidas en la ciudad	No nacidas en la ciudad	
CHICAS	0,54	0,04	**0,58**
CHICOS	0,36	0,06	**0,42**
	0,9	**0,1**	**1**

a) Probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto
$P\ (\text{no nacida en la ciudad}) = \mathbf{0,1}$

b) Probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad
$P\ (\ \text{chica}\ \cap \text{no nacida en la ciudad}\ ) = \mathbf{0,04}$

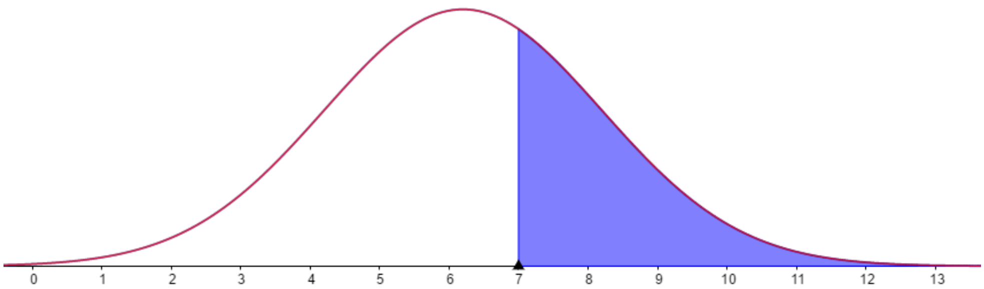
c) Se toma una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad, probabilidad de que sea chico

$$P(\text{chico}|\ \text{nacida en la ciudad}) = \frac{P(\text{chico} \cap \text{nacida en la ciudad})}{P(\text{nacida en la ciudad})} = \frac{0{,}36}{0{,}90} = \mathbf{0,4}$$

A 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

a) $\text{X} \equiv N(\mu = 6{,}2\ ,\ \ \sigma = 2)$

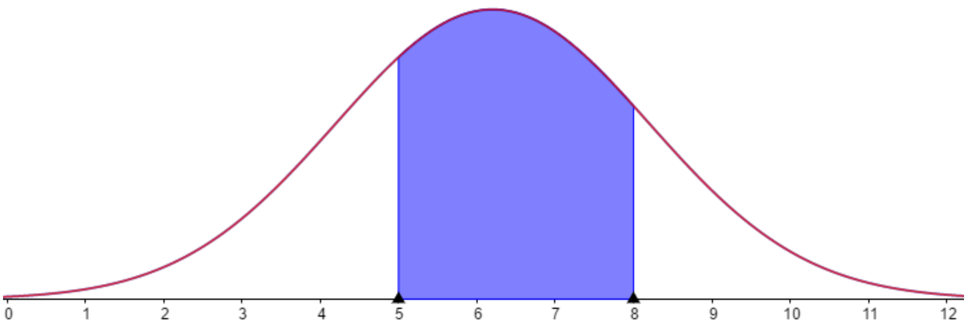
$P(X > 7) = ?$



$$P\left(\frac{X - 6{,}2}{2} > \frac{7 - 6{,}2}{2}\right) = P(Z > 0{,}4) = 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - F(0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{P(X > 7)} \ = \mathbf{0,3446}$$

b) $P(5 \le X \le 8) = ?$

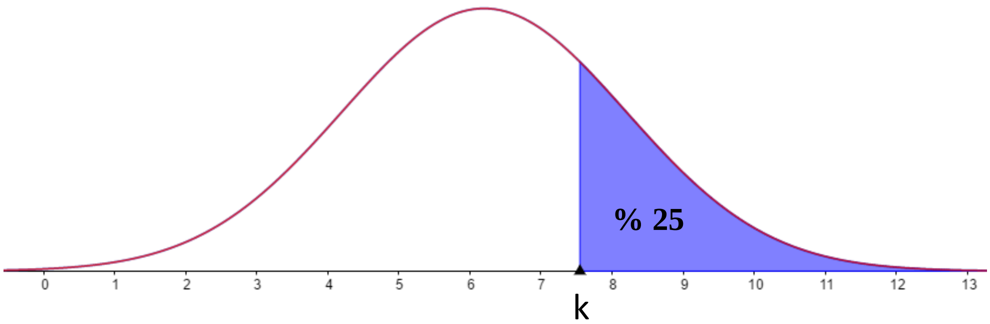


$$P(5 \le X \le 8) = P\left(\frac{5-6{,}2}{2} \le \frac{X-6{,}2}{2} \le \frac{8-6{,}2}{2}\right) = P(-0{,}6 \le Z \le 0{,}9) = F(0{,}9) - F(-0{,}6) =$$

$$= F(0{,}9) - \big(1 - F(0{,}6)\big) = 0{,}8159 - (1 - 0{,}7257) = 0{,}5416$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{P(5 \le X \le 8) = 0,5416}$$

c) k tal que $P(X > k) = 0{,}25$.



$$P(X \le k) = P\left(\frac{X-6{,}2}{2} \le \frac{k-6{,}2}{2}\right) = 0{,}75$$

Entonces,

$$\frac{k-6{,}2}{2} = 0{,}675 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{k = 7,55}$$

Por lo tanto, el 25 % de los alumnos y alumnas ha sacado más de **7,55 puntos** en el examen, y por lo tanto la nota mínima para obtener la calificación de sobresaliente en el examen es 7,55.

B 1 *Dimensión de una matriz. Cálculo matricial. Matriz inversa de una matriz.*

a) $(A \cdot A^t)^{-1} = ?$

- $(A \cdot A^t) = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$
- $(A \cdot A^t)^{-1} = C^{-1}$
- $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$
- $|C| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 6$

Entonces;

$$C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{C^{-1} = (A \cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}}$$

b) ¿La matriz $(A^t \cdot A)$ tiene inversa?

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0$ **Por lo tanto, no existe la matriz inversa.**

c) Calcular $A \cdot B$ y $A^t \cdot B$

- $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{2x3}}$ **y** $\boldsymbol{B \epsilon \mathcal{M}_{2x2}}$ **por lo tanto no existe** $\boldsymbol{A \cdot B}$ **.**
- $\boldsymbol{A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}$

B 2 *Análisis de las características de una función. Representación gráfica. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas.*

a) Análisis de la función $y = 4 - x^2$.

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento

  $f(x)$ es creciente si $f'(x) > 0$

  $f'(x) = -2x \Rightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow$ Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, \ 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \ \infty)$.
- Máximos y mínimos relativos.

- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en el intervalo $(-\infty, 0)$ creciente y en el intervalo $(0,\ \infty)$ decreciente, por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisas $x = 0$.
- $f(0) = 4 \Rightarrow (0,\quad 4)$ es un máximo relativo.

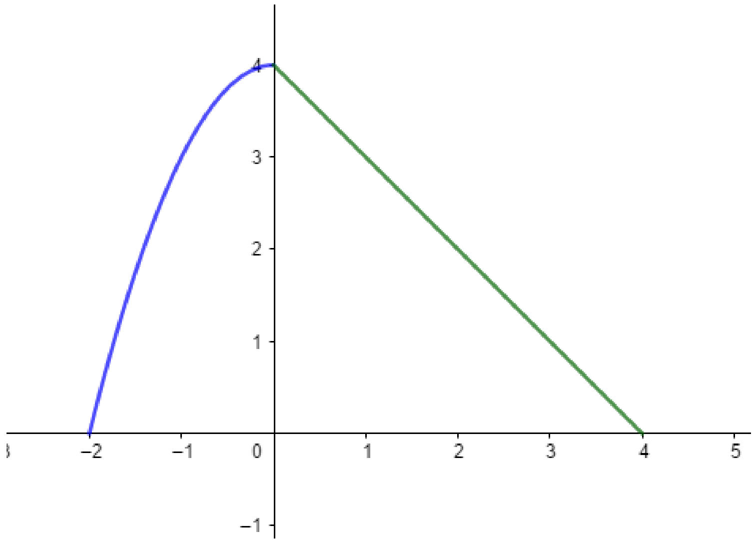
OTRA MANERA:

- $f'(x) = -2x \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ En el punto de abscisas $x = 0$ hay un máximo relativo.

Por lo tanto, $(0,\quad 4)$ es un máximo relativo.

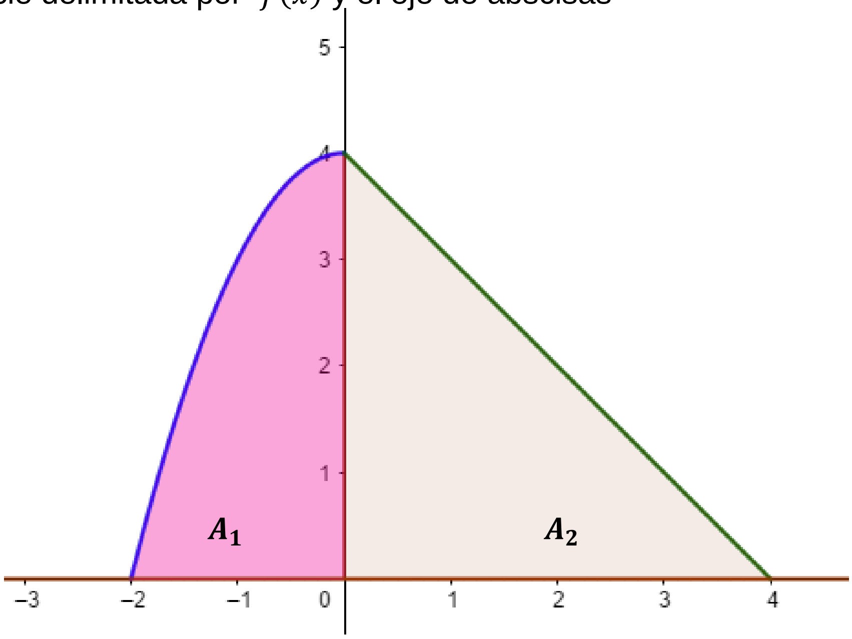
b) Representación gráfica

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



c) Área de la superficie delimitada por $f(x)$ y el eje de abscisas

$A = A_1 + A_2$

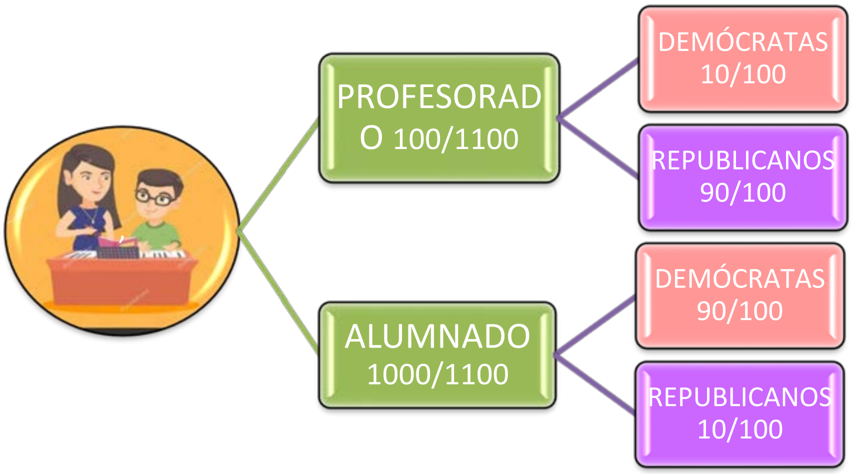


$$A_1 = \int_{-2}^{0}(4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = \frac{16}{3}\,u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{4}(4 - x)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4} = (16 - 8) = 8\,u^2$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A = {}^{40}/_{3}\ u^2}$

B 3 *Cálculo de probabilidades*; *probabilidad total y probabilidad a posteriori.*



a) A través de la probabilidad total:

$$P(\text{repub.}) = P(\text{ profesor}) \cdot P(\text{repub.}\,|\text{profesor}) + P(\text{alumno}) \cdot P(\text{repub.}\,|\text{alumno}) =$$

$$= \frac{100}{1100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100} = \mathbf{0,1727}$$

b) Probabilidad “a posteriori”

$$P(\text{alumno}|\text{republicano}) = \frac{P(\text{ alumno} \cap \text{repub.})}{P(\text{republicano})} = \frac{P(\text{alumno}) \cdot P(\text{repub.}\,|\text{alumno})}{0{,}1727} = \frac{\frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100}}{0{,}1727} =$$

$$= \frac{0{,}0909}{0{,}1727} = \mathbf{0,5263}$$

OTRA MANERA (tabla de contingencia)

	DEMÓCRATAS	REPUBLICANOS	
ALUMNADO	900	100	**1000**

PROFESORADO	10	90	**100**
	910	**190**	**1100**

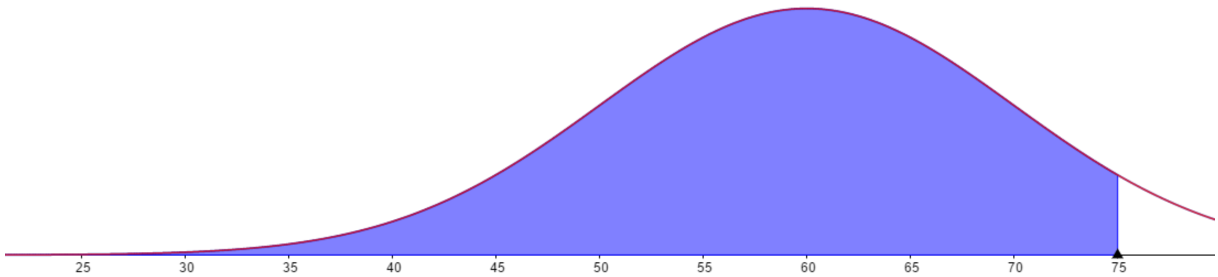
$$P(\text{republicano}) = \frac{190}{1100} = \mathbf{0,1727}$$

$$P(\text{alumno}|\text{republicano}) = \frac{P(\text{alumno} \cap \text{repub.})}{P(\text{republicano})} = \frac{100}{190} = \mathbf{0,5263}$$

B 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

$$X \equiv N(\mu = 60\,,\ \ \sigma = 10)$$

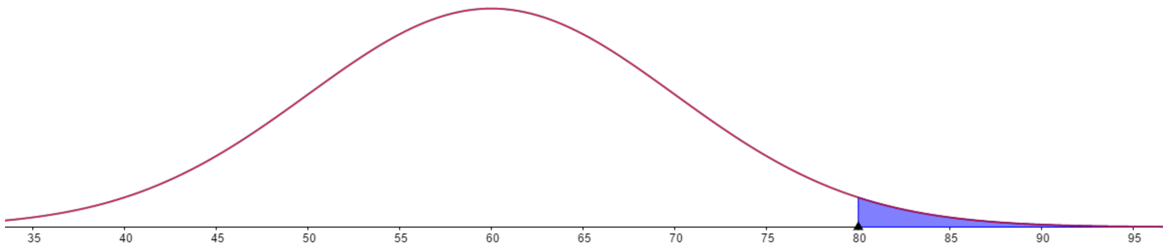
a) $P(X \leq 75) = ?$



$$P(X \leq 75) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \leq 1{,}5) = F(1{,}5) = 0{,}9332 \Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 75) = 0,9332}$$

Por lo tanto, el 93,32 % del alumnado terminará a tiempo el examen.

b) $P(X \geq 80) = ?$

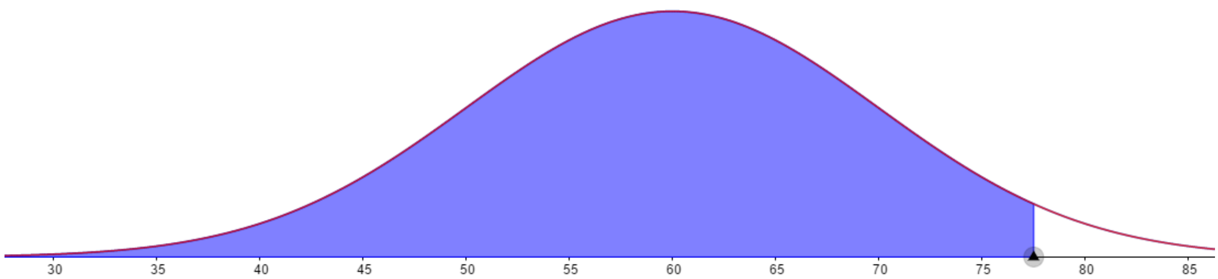


$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X-60}{10} \geq \frac{80-60}{10}\right) = 1 - P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{80-60}{10}\right) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F(2) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = \mathbf{0,0228}$$

Esto es, **el 2,28 % del alumnado no terminará a tiempo el examen.**

c) k tal que $P(X \leq k) = 0{,}96$.



% 96

$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{k-60}{10}\right) = 0{,}96 \quad \Rightarrow \frac{k-60}{10} = 1{,}75 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 77,5}$

Esto es, se tienen que dar **77,5 minutos** si se quiere que el 96 % del alumnado acabe el examen a tiempo.