

Ejercicio 1.

Halla la matriz X que satisface la siguiente ecuación: $A \cdot X \cdot B - C = D$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$X \in M_{2 \times 3}$. La mejor forma de resolver esta ecuación matricial, dado que las matrices que intervienen en el producto tienen pocos ceros, es la siguiente:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B - C = D &\Rightarrow A \cdot X \cdot B = D + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1} \\ &\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1}, \text{ entonces calculamos las inversas de } A \text{ y } B \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= -2 & A_{21} &= -3 & \Rightarrow A^{-1} &= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ A_{12} &= -(-1) = 1 & A_{22} &= 2 \end{aligned}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 2 = -2$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 & B_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 & B_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ B_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 & B_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 & B_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \Rightarrow B^{-1} &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ B_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & B_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & B_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 & -5 \\ -9 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & 12 & 16 \\ 10 & -8 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -8 \\ -5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 5$. Calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{vmatrix}$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{vmatrix} & \stackrel{\text{trasponemos}}{=} \begin{vmatrix} b & 4 & a+2 \\ 5 & c+2 & 2a+1 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} \stackrel{\text{intercambiamos filas}}{=} - \begin{vmatrix} b & 4 & a+2 \\ 0 & 2 & 2a \\ 5 & c+2 & 2a+1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{intercambiamos columnas 2 veces}}{=} \\ & = - \begin{vmatrix} a+2 & b & 4 \\ 2a & 0 & 2 \\ 2a+1 & 5 & c+2 \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_3-F_2}{=} - \begin{vmatrix} a+2 & b & 4 \\ 2a & 0 & 2 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} \stackrel{\text{sacamos factor común en } F_2}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & b & 4 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} \stackrel{F_1=F_1-F_2}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{vmatrix} & \stackrel{\text{intercambiamos filas}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ 2-3a & b & 0 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2-F_1, F_3=F_3-2F_1}{=} - \begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ -3a & 0 & -3 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} \stackrel{\text{sacamos factor común en } F_2}{=} \\ & = -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Sea H el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por los vectores $u_1 = (-1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (2, -1, 0, 3)$, $u_3 = (3, 0, 2, 2)$, $u_4 = (2, -1, 2, a)$.

- Encontrar a sabiendo que $H \neq \mathbb{R}^4$
- Hallar la dimensión y una base de H y calcular el valor de b para que el vector $v = (b, 5, 7, 7)$ pertenezca a H .

Examen de matrices y determinantes

Como el subespacio generado por los cuatro vectores no coincide con el espacio total, éstos deben ser linealmente dependientes, puesto que en caso contrario serían base de \mathbb{R}^4 y generarían todo el espacio.

$$\text{Entonces se tiene que cumplir: } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollamos por } C_1}{=} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = -8a - 8 - 75 + 48 + 20 + 5a \Rightarrow -3a - 15 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Ya sabemos que los cuatro vectores son linealmente dependientes, veamos cuántos de ellos son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \text{ buscamos menores distintos de cero: } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Las tres primeras columnas de la matriz son linealmente independientes \Rightarrow los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ son linealmente independientes, entonces $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base de H y $\dim H = 3$

Para que el vector $v = (b, 5, 7, 7)$ pertenezca a H , v tiene que ser combinación lineal de $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$\Rightarrow \text{debe cumplirse } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & b+7 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollamos por } C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & b+7 \\ -1 & -4 & -9 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10b - 50$$

$$10b - 50 = 0 \Rightarrow b = 5$$

Ejercicio 4.

- Sea A una matriz 3×3 tal que $|A| = 3$, calcula, justificando la respuesta:

$$|5A| ; |2(A^2)^{-1}| ; |M \cdot A \cdot M^{-1}| ; |Adj(A)|$$

- Si A es una matriz 3×3 que verifica la igualdad $A^2 = 2A$, ¿cuánto vale $|A|$?

$$* |5A| = 5^3 \cdot |A| = 125 \cdot 3 = 375 \quad (A \text{ es una matriz } 3 \times 3)$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$* |2(A^2)^{-1}| = (2)^3 \cdot |(A^2)^{-1}| = \frac{8}{|A^2|} = \frac{8}{|A \cdot A|} = \frac{8}{|A| \cdot |A|} = \frac{8}{9}$$

$$* |M \cdot A \cdot M^{-1}| = |M| \cdot |A| \cdot |M^{-1}| = |M| \cdot |A| \cdot \frac{1}{|M|} = |A| = 3$$

$$\text{Como } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t \Rightarrow |A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t \right| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|^3} |[Adj(A)]^t| \Rightarrow$$

$$* |Adj(A)| = |[Adj(A)]^t| = |A^{-1}| \cdot |A|^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$$

$$A \in M_{3 \times 3} \text{ y } A^2 = 2A \Rightarrow |A^2| = |2A| \Rightarrow |A| \cdot |A| = 2^3 \cdot |A| \Rightarrow |A| = 8$$

Ejercicio 5.

Calcula para qué valor, o valores, de m no admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Halla A^{-1} para $m \neq 0$ y comprueba el resultado.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 4m + 3$$

$$A^{-1} \text{ existe} \Leftrightarrow |A| \neq 0 ; m^2 + 4m + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases} \Rightarrow A \text{ no admite inversa si } m = -1 \text{ o } m = -3$$

para $m=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $|A|=3$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.

Probar que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} = ac - bd$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2=C_2-C_1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & a & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollamos por } F_2} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -d & 0 \\ b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1=C_1+C_2 \\ C_3=C_3+C_4}} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ a & 0 & -d & 0 \\ b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollamos por } F_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & -d \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3+C_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -d \\ b & -c & -c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollamos por } F_1} = - \begin{vmatrix} a & -d \\ b & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} = ac - bd$$