Límites. Regla de L'Hôpital

1. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(Septiembre 1999)

Solución:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Llamemos $f(x) = \operatorname{tg} x - 8$ y $g(x) = \sec x + 10 = \dfrac{1}{\cos x} + 10$. Entonces f y g son derivables en su domino de definición (en particular en $\dfrac{\pi}{2}$ y en un entorno suyo):

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ y } g'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}\cdot(-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

De este modo, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$

Al ser f y g son derivables en un entorno de $\dfrac{\pi}{2}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se tiene que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} = 1$. †

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Llamemos $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$. Entonces f y g son derivables en su domino de definición (en particular en 0 y en un entorno suyo):

$$f'(x) = 1 - \cos x \text{ y } g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$$

Por tanto $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x(1-\cos x)}{1-\cos^3 x}$ **(1)**, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Llamemos $\cos x = z$. Entonces $1-\cos^3 x = 1 - z^3$. Pero, aplicando la regla de Ruffini, $1 - z^3 = -z^3 + 1 = (z-1)(-z^2 - z - 1) = (1-z)(z^2 + z + 1)$. Por tanto se tiene que $1 - \cos^3 x = (1-\cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)$. Luego la expresión **(1)** es igual a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(\cos^2 x+\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos x+1}=\frac{1}{3}.$$

Como f y g son derivables en un entorno de 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se tiene que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=\frac{1}{3}$

Se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital pues la derivada de f(x), $f'(x)=\cos^2 x(1-\cos x)=\cos^2 x-\cos^3 x$, y la derivada de g(x), $g'(x)=1-\cos^3 x$, vuelven a ser derivables en un entorno de 0:

$$f''(x)=2\cos x(-\operatorname{sen} x)-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=\operatorname{sen} x(3\cos^2 x-2\cos x)$$

$$g''(x)=-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=3\operatorname{sen} x\cos^2 x$$

Entonces $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(3\cos^2 x-2\cos x)}{3\operatorname{sen} x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x-2\cos x}{3\cos^2 x}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=\frac{1}{3}$. †

3. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

Solución:

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}=$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Procediendo como en los dos ejercicios anteriores, aplicamos la regla de L'Hôpital, pues tanto $f(x)=1-\cos x$ como $g(x)=\left(e^x-1\right)^2$ son funciones derivable en todo ¡ :

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\operatorname{sen} x)}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2(e^{2x}-e^x)}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos pues la regla de L'Hôpital a f '(x) y a g'(x), que son también derivables en todo ¡ : $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(2e^{2x}-e^x)}=\frac{1}{2(2-1)}=\frac{1}{6}$

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{1}{6}$. †

4. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}$

Solución:

Regla de L'Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_o verificando:

a) $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_o$ del intervalo

c) Existe $\lim_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces existe $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Tanto $f(x) = 4(x-\ln(1+x))$ como $g(x) = x\ln(1+x)$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (que en ambos casos es (−1, +∞), pues el logaritmo está definido para todo x > 0), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 4\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 4\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{4x}{1+x}$$

$$g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones f '(x) y g'(x), pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

$$f''(x) = 4$$

$$g''(x) = \ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} + 1 = \ln(1+x) + 2$$

Así: $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{\ln(1+x)+2} = \frac{4}{0+2} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)} = 2$. †

5. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

(L = logaritmo neperiano)

Solución:

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio anterior.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{L(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ es una indeterminación del tipo ∞ − ∞. Operando tenemos $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{L(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-L(1+x)}{x\cdot L(1+x)}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos $f(x)=x-L(1+x)$ y $g(x)=x\cdot L(1+x)$, que son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (en ambos casos es (−1, +∞), pues el logaritmo está definido para todo x > 0), y en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x},\quad g'(x)=L(1+x)+\frac{x}{1+x}=\frac{(1+x)\cdot L(1+x)+x}{1+x}$$

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\cdot L(1+x)+x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\cdot L(1+x)+x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones f '(x) y g'(x), pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

$$f''(x)=1$$

$$g''(x)=L(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}+1=L(1+x)+2$$

Así: $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{L(1+x)+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$. †

6. Enuncia la regla de L'Hôpital. Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$

Solución:

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio 4.

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Tanto $f(x)=x-\operatorname{sen}x$ como $g(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (f es derivable en todo ¡ y g es derivable en ¡ −{π/2+k π, k∈ ¢ }), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x)=1-\cos x,\; g'(x)=\sec^2 x-\cos x=\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x=\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$$

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^3 x}{1-\cos^3 x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones f '(x) y g'(x), pues estas son también derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

$$f''(x)=2\cos x(-\operatorname{sen} x)-3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=3\cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x-2\cos x\cdot\operatorname{sen} x$$

$$g''(x)=3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)=-3\cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x$$

Así: $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x-2\cos x\cdot\operatorname{sen} x}{-3\cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\left(-1+\frac{2}{3\cos x}\right)=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=-\frac{1}{3}$. †

7. Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x} \quad ; \quad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Tanto $f(x)=x^3-8x^2+7x$ como $g(x)=x^2-x$ son funciones derivables en todo ¡ , en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x)=3x^2-16x+7,\; g'(x)=2x-1$$

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-16x+7}{2x-1}=-7\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}=-7$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$ da lugar a una indeterminación del tipo 1^∞. Supongamos que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}=L$, entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left[\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=\ln L$ (el logaritmo neperiano es una función continua, por tanto el logaritmo del límite coincide con el límite del logaritmo). Entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left[\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)}{\cos x}$$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Las funciones $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)$ y $g(x) = \cos x$ son derivables en todo

¡ , en particular lo son en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)} \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen} x\right) = \frac{\frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{\pi}}{\frac{2x + \pi \cos x}{\pi}} = \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x - \pi \cos x} \quad ; \quad g'(x) = -\operatorname{sen} x .$$

Entonces:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x - \pi \cos x}}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x (2x - \pi \cos x)} = \frac{2 - \pi}{-2\frac{\pi}{2}} = \frac{2 - \pi}{-\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} .$$

Por tanto $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right] = 1 - \frac{2}{\pi}$.

De este modo, $\ln L = 1 - \frac{2}{\pi} \Rightarrow L = e^{1 - \frac{2}{\pi}}$ y entonces $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{1 - \frac{2}{\pi}}$. †